

融合风险比率的双触发巨灾看跌期权及其定价

李世龙,刘茜

(山东财经大学保险学院,山东 济南 250014)

摘要:在普通双触发巨灾看跌期权支付结构中融入基于在险价值(value at risk, VaR)的风险比率,以体现保险公司累积巨灾赔付损失对巨灾期权行权收益的影响和保险公司的风险承受水平。首先,在金融与巨灾乘积概率空间下推导出融合风险比率巨灾看跌期权的定价公式;其次,基于超阈值模型(peak over threshold, POT)模型拟合我国台风的巨灾损失分布以体现巨灾损失的厚尾性特征;最后,利用蒙特卡罗模拟方法对影响巨灾看跌期权的相关因素进行敏感性分析,并与普通巨灾期权进行比较。

关键词:风险比率;双触发巨灾看跌期权;乘积概率空间;超阈值模型

中图分类号:O211.9; F224.7 **文献标志码:**A

引用格式:李世龙,刘茜.融合风险比率的双触发巨灾看跌期权及其定价[J].山东大学学报(理学版),2025,60(3):12-21,40.

Double-triggered catastrophe put option with risk ratio and its pricing

LI Shilong, LIU Xi

(Insurance Institute, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, Shandong, China)

Abstract: In order to reflect both the impact of the accumulated catastrophe compensation loss of insurance companies on the exercise returns of catastrophe options and the risk tolerance level of insurance companies, the risk ratios based on VaR is added into the payment structure of ordinary double triggered catastrophe put options. Firstly, the pricing formula for catastrophe put options with risk ratios is derived in the product probability space of finance and catastrophe; Secondly, the POT model is utilized to fit the distribution of catastrophe loss based on the typhoon catastrophe data in China to display the thick tailed characteristics of catastrophic losses; Finally, the Monte Carlo simulation method is used to analyze the sensitivity of the factors affecting the catastrophe put option and the prices of the catastrophe put options with risk ratios are compared with those of ordinary catastrophe options.

Key words: risk ratio; double-triggered catastrophe put option; product probability space; peak over threshold model

0 引言

低频率、高损失的巨灾事件严重影响了人民生命财产安全与社会经济发展,给政府带来巨大的财政压力,同时也使承保巨灾保险业务的保险公司和再保险公司面临巨大的赔付风险。目前,我国的巨灾保险风险分散主要依赖再保险,但受再保险公司偿付能力的制约,难以满足风险转移需求。2021年12月,国务院印发的《“十四五”国家应急体系规划》中明确指出,要探索建立多渠道多层次的风险分担机制,大力发展巨灾保险,适应当前社会经济发展需求。巨灾风险证券化能够优化巨灾风险分散机制,通过金融市场转移巨灾风险,有效提高保险公司和再保险公司的风险承受能力,同时也为资本市场带来更多的投资选择。其中,巨灾期权作为巨灾风险证券化的主要方式,将巨灾风险转移到金融市场以有效分散巨灾赔付风险。

目前对巨灾期权的研究主要集中在产品创新与定价2个方面。具有里程碑意义的是,Cox等^[1]基于股价变化遵循几何布朗运动条件,提出双触发看跌巨灾期权,行权条件须满足基础权益低于执行价格和巨灾发

生次数超过特定触发水平。在考虑巨灾期权的违约风险等各类风险约束下, Xu 等^[2]借助 Vasicek 模型构建违约强度过程,并将其融入到巨灾期权的定价中以体现期权交易过程中的信用风险;考虑到股票价格受到巨灾赔付损失和金融风险的双重影响, Jaimungal 等^[3]首次借助跳-扩散过程对原生股票价格进行随机建模,其后 Jiang 等^[4]、Bi 等^[5]、Wang 等^[6]、Yu^[7]等从不同的角度对巨灾期权的定价问题进行研究。

在巨灾看跌期权受到广泛关注的同时,该类期权的行权支付结构的创新研究不断取得进展。针对巨灾风险管理的实务需求, Wang^[8]研究了2类浮动执行价格的巨灾看跌期权,从支付结构视角进一步推广 Cox 等^[1]的研究;为了约束巨灾期权对金融市场投资者的损失,胡炳志等^[9]设计了一类基于地震巨灾损失指数的价差巨灾期权,使得在期权到期日的期权收益存在上下限;Wang 等^[10]提出了保险公司与再保险公司股价的互换期权,以期创新巨灾风险管理方法,等等。

巨灾期权的合理定价是其发行和交易的关键,其定价方法主要有风险中性定价、无差异定价和精算定价等。林光彬等^[11]、谢世清等^[12]根据精算等价原则给出了2类巨灾期权的定价公式;Leobacher 等^[13]则通过效用无差异定价思想研究巨灾期权的定价问题。由于风险中性定价方法在金融工程领域有着广泛应用,而巨灾期权产品本身是与金融市场相融合的创新金融投资产品,因此诸多学者采用风险中性方法讨论巨灾期权的定价问题。Jaimungal 等^[3]通过风险中性测度变换构造出一个 Forward-neutral 测度,将贴现因子从贴现股价的期望中提取出来,并基于此得到期权定价公式。柏满迎等^[14]则通过风险中性定价方法分别对金融市场的随机过程和巨灾损失影响下的随机过程进行等价鞅测度变换,从而解决巨灾看跌期权的定价问题。

目前,对巨灾期权设计的诸多研究均是在 Cox 等^[1]基础上考虑违约风险、金融风险等各类风险约束;但是忽略了保险公司对巨灾理赔资金需求问题,从而弱化了巨灾看跌期权产品在巨灾赔付时的融资作用。一方面,考虑到保险公司巨灾赔付资金需求额会随着巨灾损失的增加而增多, Wang^[15]在巨灾看跌期权定价模型中加入累积损失与其预期损失的比率,以期保险公司在巨灾赔付较大时能够筹集到更多的资金来应对巨额赔款;另一方面,巨灾赔付往往会在短期内对保险公司的股票价格带来下行冲击,这种融入累积损失与其预期损失比率的巨灾期权能够使保险公司在期权到期日向交易对手出售公司股票获得收益,以弥补巨灾赔付及其股票价格下行损失。尽管如此,该巨灾看跌期权支付结构设计也存在一定的不足,主要是其模型通过巨灾损失风险期望来刻画保险公司的风险承受水平,而面对具有尖峰厚尾特征的巨灾损失数据,不能很好地对巨灾损失风险进行度量。同时,在险价值(value at risk, VaR)作为国际上度量风险的主要工具,可以用于表示在给定的置信水平下,保险公司可能会出现的最大索赔额,适合对巨灾风险进行风险度量,并且置信水平可根据保险公司的风险态度进行适当调整,增加了巨灾看跌期权应用的灵活性。

本文将累积损失与 VaR 的比率定义为风险比率融入到巨灾看跌期权的支付结构中,将保险公司期权收益与巨灾损失规模进行正向关联,并通过置信水平调节 VaR 的值以增加模型的灵活性。此外,在对巨灾看跌期权定价研究中,涉及到金融原生资产的随机波动风险和巨灾赔付风险的,必须在金融环境与巨灾损失环境的融合框架下进行理论探讨,所以本文将探索在金融与巨灾乘积概率空间下的巨灾看跌期权的风险中性定价问题。

1 巨灾看跌期权定价模型

1.1 双触发巨灾期权支付结构

假设在 t 时刻进行巨灾期权交易,到期日为 T 时刻,融入基于 VaR 的风险比率的双触发巨灾期权(double triggered catastrophe option with risk ratio based on VaR, RCAT 期权)在 T 时刻的支付公式为

$$V = \left(\frac{L(T) - L(t)}{\text{VaR}_p} \right)^\omega (K - S(T))_+ I_{|L(T) - L(t)| > L}, \quad (1)$$

其中: $L(T) - L(t)$ 表示保险公司在 $[t, T]$ 期间的累积巨灾赔付损失; VaR_p 是在置信水平 p 下可能发生的最大巨灾累积损失; $\frac{L(T) - L(t)}{\text{VaR}_p}$ 称为风险比率;非负实数 ω 称为风险比率影响因子,当 $\omega = 0$ 时,RCAT期权的支

付结构与普通巨灾看跌期权是一致的,可以通过 ω 来控制风险比率对期权权益的影响程度; $\{S(t), t \geq 0\}$ 为保险公司股票价格过程; K 是行权价格; L 是行权的巨灾赔付额触发水平。

风险比率越大,说明保险公司超预期巨灾赔付越多,进而巨灾损失转移需求就越大;置信水平 p 值代表保险公司风险承受水平, p 值越小则 VaR_p 越小,进而在巨灾损失额一定的条件下巨灾期权支付额就越大,这也意味着保险公司预期独立偿付巨灾损失能力越低。当触发巨灾期权行权条件时,保险公司获得的期权收益来自于到期日股价和巨灾赔付总额 2 个方面,从而保险公司可以利用这种看跌期权获得合适的期权收益,以对冲巨灾赔付损失。

1.2 巨灾期权的模型假定

本文中巨灾期权支付函数设计及其定价均是在巨灾概率子空间 $(\Omega^{(1)}, P^{(1)}, \mathcal{F}^{(1)})$ 和金融概率子空间 $(\Omega^{(2)}, P^{(2)}, \mathcal{F}^{(2)})$ 的乘积概率空间 (Ω, P, \mathcal{F}) 下进行研究。假设 (Ω, P, \mathcal{F}) 是完备的,并且 2 个概率子空间相互独立,即有 $P = P^{(1)} \times P^{(2)}$ 。

在巨灾概率子空间 $(\Omega^{(1)}, P^{(1)}, \mathcal{F}^{(1)})$ 下,巨灾损失累积赔付过程为

$$L(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} x_i, \quad (2)$$

其中: $\{x_i, i=1, 2, \dots\}$ 是一个独立同分布的随机变量序列,表示每次巨灾损失的赔付额,其概率密度函数为 $f(y)$; 巨灾发生次数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的齐次泊松过程,且与 $\{x_i, i=1, 2, \dots\}$ 相互独立。

对保险公司而言,巨灾赔付往往会导致市场看空保险公司的股票,进而使得股票价格在发生巨灾赔付时出现非市场性的下行波动,因此采用具有巨灾赔付损失敏感性的股票价格过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 为

$$S(t) = e^{-\alpha L(t) - \lambda kt + X(t)}, \quad (3)$$

其中: α 为巨灾累积损失对股票价格的影响强度; k 是由巨灾损失引起的股价下跌的补偿系数; $\{X(t), t \geq 0\}$ 是在金融概率子空间 $(\Omega^{(2)}, P^{(2)}, \mathcal{F}^{(2)})$ 下由标准布朗运动 $W^S(t)$ 驱动的伊藤过程,满足

$$dX(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) dt + \sigma_s dW^S(t),$$

其中常数 σ_s 是股票价格的波动率。为了使概率空间 (Ω, P, \mathcal{F}) 下的股票价格贴现过程仅须在 $(\Omega^{(2)}, P^{(2)}, \mathcal{F}^{(2)})$ 下作等价鞅测度变换就可以得到鞅过程,假设 $E^{P^{(1)}}[e^{-\alpha L(t) - \lambda kt}] = 1$, 从而 $k = \int_0^\infty e^{-\alpha y} f(y) dy - 1$ 。

一般地,在概率测度 P 下股票价格贴现过程不是鞅过程,需要通过等价鞅测度变换转化为鞅过程。Harrison 等^[16]指出: 在一个无套利市场中存在一个等价的概率测度 Q , 使得股票价格贴现过程 $\{D(0, t)S(t), t \geq 0\}$ 在 Q 下是鞅,其中 $D(0, t) = e^{-\int_0^t r(u) du}$, $\{r(u)\}$ 为短期无风险利率过程。本文假设 $\{r(u)\}$ 为 Vasicek 利率模型,由如下随机微分方程刻画:

$$dr(t) = \varepsilon(m - r(t))dt + \sigma_r d\tilde{W}^r(t), \quad (4)$$

其中: ε 为利率的平均回复速率; m 是利率的长期均值; σ_r 表示利率的波动率; $\tilde{W}^r(t)$ 是标准布朗运动。概率测度 Q 被称为风险中性测度,使得标的资产的预期收益率等于无风险利率,进而 $\{D(0, t)S(t), t \geq 0\}$ 在 Q 下是鞅过程,其具体变换过程由定理 1 给出。

定理 1 设 $\eta(t)$ 表示 Radon-Nikodym 过程,满足

$$\eta(t) = \left(\frac{dQ}{dP} \right)_t = e^{-\int_0^t \frac{\mu - r(u)}{\sigma_s} dW^S(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\mu - r(u)}{\sigma_s} \right)^2 du},$$

对于任意 $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_t$ 都有 $Q(\mathcal{A}) = E^P[I(\mathcal{A})\eta(t)]$, 则

$$\tilde{W}^S(t) = W^S(t) + \int_0^t \frac{\mu - r(u)}{\sigma_s} du,$$

在概率测度 Q 下是标准布朗运动,并且概率测度 Q 下的股票价格过程为

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{-\alpha L(t) - \lambda kt + X(t)}, \\ dX(t) &= \left(r(t) - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) dt + \sigma_s d\tilde{W}^S(t), \\ dr(t) &= \varepsilon(m - r(t)) dt + \sigma_r d\tilde{W}^r(t), \end{aligned}$$

股票价格贴现过程 $\{D(0,t)S(t), t \geq 0\}$ 成为一个鞅过程。

设 $C(t,T)$ 表示 T 时刻到期的巨灾期权在 t 时刻的价格,则在等价鞅测度 Q 下有

$$C(t,T) = E^Q \left[D(t,T) \left(\frac{L(T) - L(t)}{\text{VaR}_p} \right)^\omega (K - S(T))_+ I_{\{|L(T) - L(t)| > L\}} | \mathcal{F}_t \right]. \quad (5)$$

为了便于在随机利率条件下计算,采用 Jaimungal 等^[3] 的思想,通过等价概率测度变换构造 Forward-neutral 测度 Q^T ,将利率因素与股价扩散过程分离开。对于 T 年期单位货币的零息债券 t 时刻价格 $P(t,T) = E^Q [e^{-\int_t^T r(u) du} | \mathcal{F}_t]$ 在 Vasicek 利率模型下满足偏微分方程

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t) dt - \sigma_r B(t,T) d\tilde{W}^r(t),$$

因此有

$$\frac{P(t,T)}{P(0,T)} = e^{\int_0^t r(u) du - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_r^2 B^2(u,T) du - \int_0^t \sigma_r B(u,T) d\tilde{W}^r(u)},$$

其仿射形式为

$$P(t,T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)}, \quad (6)$$

其中

$$A(t,T) = \left(m - \frac{\sigma_r^2}{2\varepsilon^2} \right) (B(t,T) - (T-t)) - \frac{\sigma_r^2}{4\varepsilon} B^2(t,T), \quad B(t,T) = \frac{1}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon(T-t)}).$$

定理 2 令 $\beta(t)$ 满足 Radon-Nikodym 过程

$$\beta(t) = \left(\frac{dQ^T}{dQ} \right)_t = \frac{P(t,T)}{P(0,T)} D(0,t) = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_r^2 B^2(u,T) du - \int_0^t \sigma_r B(u,T) d\tilde{W}^r(u)},$$

对于任意 $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_t$ 都有 $Q^T(\mathcal{A}) = E^Q [I(\mathcal{A}) \beta(t)]$, 在 Q^T 测度下 $\hat{W}^S(t)$ 和 $\hat{W}^r(t)$ 都是标准布朗运动:

$$\begin{aligned} \hat{W}^S(t) &= \tilde{W}^S(t), \\ \hat{W}^r(t) &= \tilde{W}^r(t) + \int_0^t \sigma_r B(u,T) du. \end{aligned}$$

此时,在新的测度 Q^T 下,

$$C(t,T) = P(t,T) E^{Q^T} \left[\left(\frac{L(T) - L(t)}{\text{VaR}_p} \right)^\omega (K - \hat{S}(T))_+ I_{\{|L(T) - L(t)| > L\}} | \mathcal{F}_t \right],$$

其中, $\hat{S}(t) = \frac{S(t)}{P(t,T)}$ 是鞅过程。

1.3 巨灾期权的定价

在 Q^T 测度下,股票在 t 时的价格为:

$$\hat{S}(t) = e^{-\alpha L(t) - \lambda k t - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma_S^2 + \sigma_r^2 B^2(u,T)) du + \int_0^t \sigma_S d\hat{W}^S(u) + \int_0^t \sigma_r B(u,T) d\hat{W}^r(u)},$$

则在 T 时刻

$$\hat{S}(T) = \hat{S}(t) e^{-\alpha(L(T) - L(t)) - \lambda k(T-t) - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_S^2 + \sigma_r^2 B^2(u,T)) du + \int_t^T \sigma_S d\hat{W}^S(u) + \int_t^T \sigma_r B(u,T) d\hat{W}^r(u)}. \quad (7)$$

定理 3 到期日为 T 的巨灾看跌期权在 $t \in [0, T]$ 的定价公式为

$$C(t,T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!} \int_L^{\infty} (KP(t,T) \Phi(d_1) - S(t) e^{-\alpha y - \lambda k(T-t)} \Phi(d_2)) f^{(n)}(y) \left(\frac{y}{\text{VaR}_p} \right)^\omega dy. \quad (8)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(KP(t,T)/S(t)) + \alpha y + \lambda k(T-t) + (\sigma^2(t,T)/2)}{\sigma(t,T)},$$

$$\sigma(t,T) = \sqrt{\sigma_S^2(T-t) - \frac{\sigma_r^2 B^2(t,T)}{2\varepsilon} + \frac{\sigma_r^2((T-t) - B(t,T))}{\varepsilon^2}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma(t,T),$$

$f^{(n)}(y)$ 为损失概率密度函数 $f(y)$ 的 n 重卷积。

证明 已知在 T 时刻股票价格过程由式(7)给出,所以期权的定价公式为

$$C(t, T) = P(t, T) E^{\mathcal{Q}^T} \left[\left(\frac{L(T) - L(t)}{\text{VaR}_p} \right)^\omega (K - \hat{S}(T)) + I_{|L(T) - L(t)| > L} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

令 $A_1 = KE^{\mathcal{Q}^T} [I_{|K \geq \hat{S}(T)} \mid \mathcal{F}_t]$, $A_2 = E^{\mathcal{Q}^T} [\hat{S}(T) I_{|K \geq \hat{S}(T)} \mid \mathcal{F}_t]$, $Z_1 = \int_t^T \sigma_s d\hat{W}^s(u) + \int_t^T \sigma_r B(u, T) d\hat{W}^r(u)$ 是正态随机变量, 有

$$E^{\mathcal{Q}^T} [Z_1 \mid \mathcal{F}_t] = 0,$$

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}^T} [Z_1 \mid \mathcal{F}_t] = \sigma_s^2 (T-t) - \frac{1}{2\varepsilon} \sigma_r^2 B^2(t, T) + \frac{\sigma_r^2 ((T-t) - B(t, T))}{\varepsilon^2},$$

则

$$\begin{aligned} A_1 &= KE^{\mathcal{Q}^T} \left\{ I_{|\hat{S}(t) e^{-\alpha(L(T) - L(t)) - \lambda k(T-t)} - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^2 + \sigma_r^2 B^2(t, T)) du + Z_1 \leq K|} \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= KE^{\mathcal{Q}^T} \left\{ I_{|Z_1 \leq \ln \frac{KP(t, T)}{S(t)} + \alpha(L(T) - L(t)) + \lambda k(T-t) + \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^2 + \sigma_r^2 B^2(t, T)) du|} \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= KE^{\mathcal{Q}^T} (\Phi(d_1)), \end{aligned}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(KP(t, T)/S(t)) + \alpha(L(T) - L(t)) + \lambda k(T-t) + \sigma^2(t, T)/2}{\sigma(t, T)},$$

$$\sigma(t, T) = \sqrt{\sigma_s^2 (T-t) - \frac{\sigma_r^2 B^2(t, T)}{2\varepsilon} + \frac{\sigma_r^2 ((T-t) - B(t, T))}{\varepsilon^2}}.$$

令 $\xi(t)$ 表示 Radon-Nikodym 导数过程,

$$\xi(t) = \left(\frac{d\mathcal{Q}^\xi}{d\mathcal{Q}^T} \right)_t = E \left[e^{Z_1 - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^2 + \sigma_r^2 B^2(u, T)) du} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

根据 Girsanov 定理, 在 \mathcal{Q}^ξ 测度下分别定义 $\bar{W}^s(t)$ 和 $\bar{W}^r(t)$ 为

$$\bar{W}^s(t) = \hat{W}^s(t) - \int_0^t \sigma_s du, \quad \bar{W}^r(t) = \hat{W}^r(t) - \int_0^t \sigma_r B(u, T) du.$$

令 $Z_2 = \int_t^T \sigma_s d\bar{W}^s(u) + \int_t^T \sigma_r B(u, T) d\bar{W}^r(u)$, Z_2 是正态随机变量且

$$E^{\mathcal{Q}^\xi} [Z_2 \mid \mathcal{F}_t] = 0,$$

$$\text{Var}^{\mathcal{Q}^\xi} [Z_2 \mid \mathcal{F}_t] = \sigma_s^2 (T-t) - \frac{1}{2\varepsilon} \sigma_r^2 B^2(t, T) + \frac{\sigma_r^2 ((T-t) - B(t, T))}{\varepsilon^2}.$$

对 A_2 有

$$\begin{aligned} A_2 &= E^{\mathcal{Q}^T} \left[\hat{S}(t) e^{-\alpha(L(T) - L(t)) - \lambda k(T-t) - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^2 + \sigma_r^2 B^2(t, T)) du} + Z_2 I_{|\hat{S}(T) \leq K|} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\mathcal{Q}^\xi} \left[\hat{S}(t) e^{-\alpha(L(T) - L(t)) - \lambda k(T-t)} I_{|\hat{S}(T) \leq K|} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\mathcal{Q}^\xi} \left[\hat{S}(t) e^{-\alpha(L(T) - L(t)) - \lambda k(T-t)} I_{|Z_1 \leq \ln \frac{KP(t, T)}{S(t)} + \alpha(L(T) - L(t)) + \lambda k(T-t) + \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^2 + \sigma_r^2 B^2(t, T)) du|} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\mathcal{Q}^\xi} \left[\hat{S}(t) e^{-\alpha(L(T) - L(t)) - \lambda k(T-t)} I_{|Z_1 \leq \ln \frac{KP(t, T)}{S(t)} + \alpha(L(T) - L(t)) + \lambda k(T-t) + \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^2 + \sigma_r^2 B^2(t, T)) du|} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\mathcal{Q}^\xi} [\hat{S}(t) e^{-\alpha(L(T) - L(t)) - \lambda k(T-t)} \Phi(d_2)]. \end{aligned}$$

其中 $d_2 = d_1 - \sigma(t, T)$.

基于 A_1, A_2 最终可得该期权定价公式为

$$\begin{aligned} C(t, T) &= P(t, T) E^{\mathcal{Q}^\xi} (A_1 - A_2) \left[\left(\frac{L(T) - L(t)}{\text{VaR}_p} \right)^\omega I_{|L(T) - L(t)| > L} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!} E^{\mathcal{Q}^\xi} \left[(A_1 - A_2) \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\text{VaR}_p} \right)^\omega I_{|\sum_{i=1}^n X_i > L|} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!} \int_L^{\infty} (KP(t, T) \Phi(d_1) - S(t) e^{-\alpha y - \lambda k(T-t)} \Phi(d_2)) f^{(n)}(y) \left(\frac{y}{\text{VaR}_p} \right)^\omega dy. \end{aligned}$$

2 基于 POT 模型的巨灾损失分布拟合

2.1 POT 模型的构建

巨灾损失数据的分布具有尖峰厚尾特征,仅采用对数正态、伽马分布等单一的分布进行拟合,在极端值处的概率分布的拟合效果往往较差。超阈值模型(peak over threshold, POT)模型基于广义帕累托分布对超过某个阈值点的巨灾样本数据进行建模,能够优化在极值处的概率分布拟合问题,因此采用 POT 模型对巨灾损失厚尾性的拟合效果更理想,并且该模型已在巨灾分布的研究和实际应用中得到充分认可。

设 n 个独立同分布的随机变量 x_1, x_2, \dots, x_n , 分布函数为 $F(x)$, 给定一个阈值 u , 如果 $x_i > u$, 则称 x_i 为超阈值, 此时令 $y_i = x_i - u$, y_i 称为超阈值量。超阈值量 y_i 的条件分布函数为

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{P(u < X \leq y + u)}{P(X > u)} = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

同时, 广义帕累托分布是极值理论中常用的厚尾分布, 其分布函数为

$$G_{\xi, \beta}(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, \quad 1 + \xi \frac{x}{\beta} > 0,$$

其中 ξ 是广义帕累托分布的形状参数, β 为尺度参数。当 $\xi > 0$ 时, $x > 0$; $\xi \leq 0$ 时, $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi}$ 。可以证明: 对于充分大的阈值 $u (u \rightarrow \infty)$, 超阈值量 y_i 的分布函数 $F_u(y)$ 近似地服从广义帕累托分布, 即

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \max_{0 \leq y \leq x - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta}(y)| = 0.$$

POT 模型的建模思想是巨灾损失数据中超阈值用广义帕累托分布拟合, 而未超阈值部分采用尾部较轻的分布拟合, 其超阈值 u 部分的分布函数为

$$F(x) = [1 - F(u)] * G_{\xi, \beta}(y) + F(u). \tag{9}$$

如果将阈值前的分布使用经验分布函数代替, 即用 $1 - \frac{N_u}{n}$ 估计 $F(u)$, 然后将 $G_{\xi, \beta}(y)$ 代入式(9)中可得

$$F(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left[1 + \frac{\xi}{\beta}(x - u)\right]^{-\frac{1}{\xi}}, \quad x > u, \tag{10}$$

其中 N_u 表示超出阈值的样本数目, n 表示总体样本数目。

2.2 数据处理与分析

本文数据来源于《中国气象灾害年鉴》和《中国气象年鉴》, 选取 1990—2019 年中国台风造成的直接经济损失数据作为研究样本, 样本量为 219 个。为了剔除货币时间价值的影响, 选用消费价格指数(consumer price index, CPI)将各年份损失额调整为 2019 年的物价水平。

在使用 POT 模型进行拟合之前需要先对直接经济损失数据进行厚尾性检验。首先对损失数据进行描述性统计分析(见表 1), 研究样本峰度值为 12.13, 远远大于 3, 所以从数值方法可以初步判断该数据具有厚尾特征。

表 1 台风直接经济损失数据的描述性统计

Table 1 Descriptive statistics of typhoon direct economic loss data

单位: 亿元

均值	方差	最小值	最大值	25%分位数	75%分位数	偏度	峰度
69.23	123.41	0.01	829.52	4.26	73.76	3.20	12.13

使用直方图和超额均值函数图对数据厚尾性进行检验。图 1(a) 直方图呈明显的负偏态分布, 证明了损失数据的厚尾性; 从图 1(b) 超额均值函数图中可以看出, 图像呈现向右上方倾斜的状态, 则表明样本数据具有尖峰厚尾的特征, 可用 POT 模型进行拟合。

在确定直接经济损失数据具有厚尾特征后进行阈值选取。阈值大小对 POT 模型参数的估计有较大影响, 阈值 u 选取的过小会使模型不满足渐近性, 使参数估计有偏或不一致; 选取过大则会使超过阈值的数据过少, 产生较大估计误差, 从而影响拟合效果。选取阈值的常见方法主要有峰度法、超额均值函数图法和 Hill 图法等, 其阈值的选择均是在统计分析的基础上带有一定的主观判断。从实际应用效果来看, 能够得到普遍认可的是 Hill 图法, 尽管该方法也有一定主观性, 但是能够相对清晰地发现趋于直线的最大顺序统计

量,数据特征相比其他方法更为直观、清晰,因此本文采用 Hill 图方法来选取阈值。由图 2 所显示的台风直接经济损失数据 Hill 图及其相应的 95%置信区间可见:从次序统计量 78 开始曲线处于向下平稳状态,此时对应的阈值为 32.2。

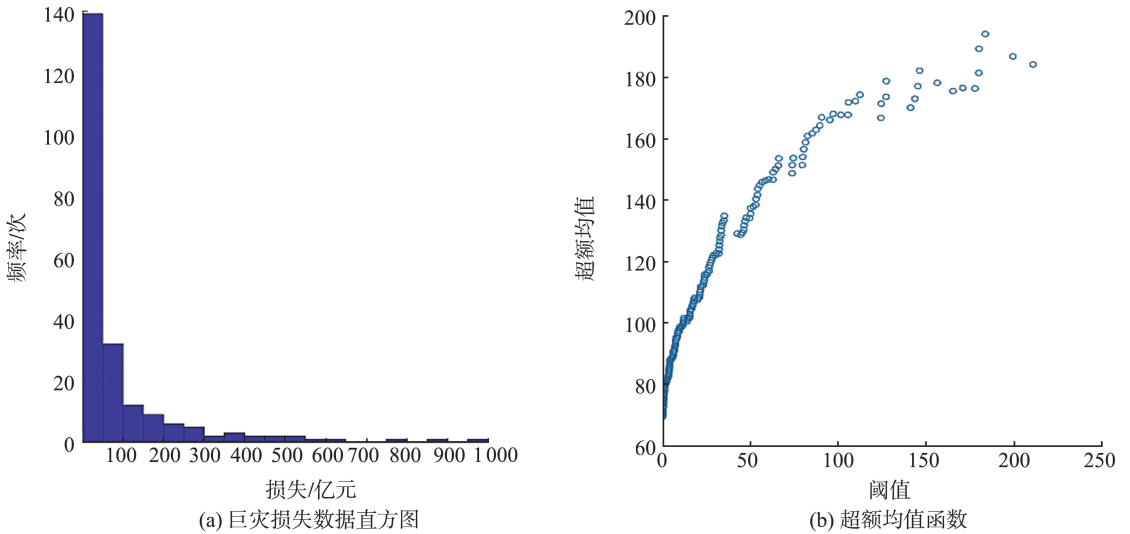


图 1 台风直接经济损失直方图和超额均值函数

Fig.1 The histogram of typhoon direct economic loss and the graph of excess mean function

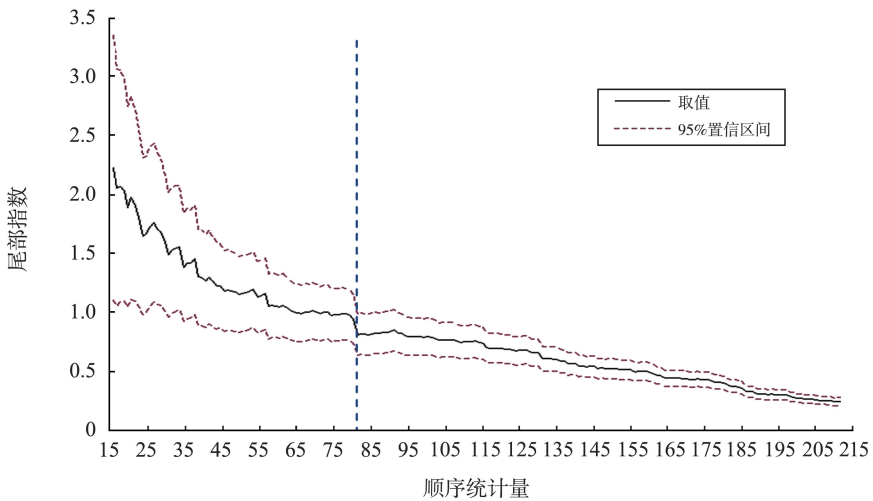


图 2 台风直接经济损失数据 Hill 图

Fig.2 Hill chart of typhoon direct economic loss data

为了更加准确地选取阈值,可以通过参数稳定估计图作进一步的判定。根据 Hill 图确定的阈值,在其附近选出数个阈值,采用极大似然估计法得到相应的尺度参数和形状参数估计值。如果估计值在所选的阈值附近平稳变化,则说明所选定的阈值是合适的。图 3 给出了不同阈值下的参数稳定估计结果,可以看出阈值在 32.2 附近参数估计变化比较稳定,进一步说明选择 32.2 作为阈值是合适的,并在该阈值水平下,尺度参数和形状参数的极大似然估计值分别为 $\xi = 82.487 8$, $\beta = 0.366 1$ 。

根据阈值和相应的参数估计值,图 4 给出了由 POT 模型拟合的分布诊断图,以进一步分析 POT 模型拟合巨大损失分布的效果。图 4(a)、(b)分别为 P-P 图和 Q-Q 图,可以看出 P-P 图的点近似处于一条直线上, Q-Q 图除个别异常数据外,其余数据也分布在直线周围,表明所选数据符合广义帕累托分布;图 4(c)为重现水平图,重现次数记为 n ,所选的样本数据落在了指定分布的置信区间内部;图 4(d)中尾部密度曲线的估计图和直方图吻合效果较好。通过分布拟合诊断图的 4 个子图进一步说明运用 POT 模型对我国 1990—2019 年间的台风直接经济损失的数据进行拟合是合理的,进而将估计出的参数代入式 (10),得到损失的整体拟合分布为

$$F(x) = 1 - \frac{78}{219} \left(1 + \frac{0.366 1}{82.959 0} (x - 32.2) \right)^{-\frac{1}{0.366 1}} \quad (11)$$

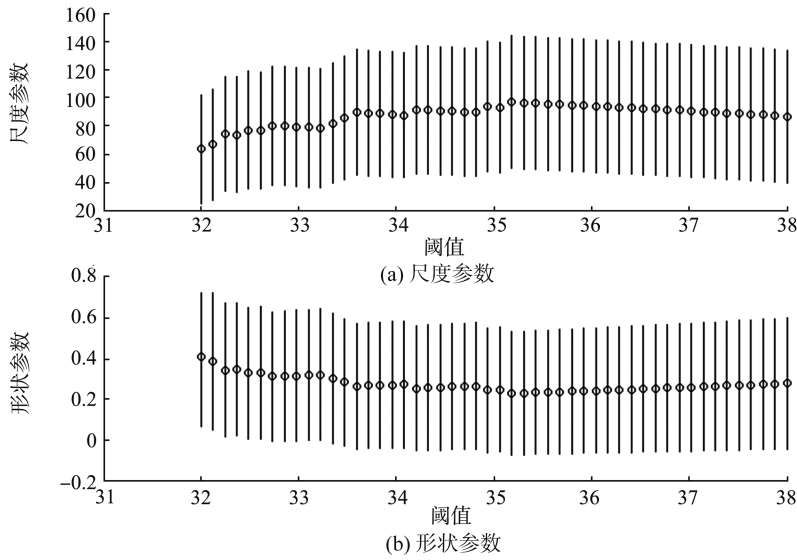


图3 修正的尺度参数与形状参数稳定估计结果
Fig.3 Modified stable estimates of scale and shape parameters

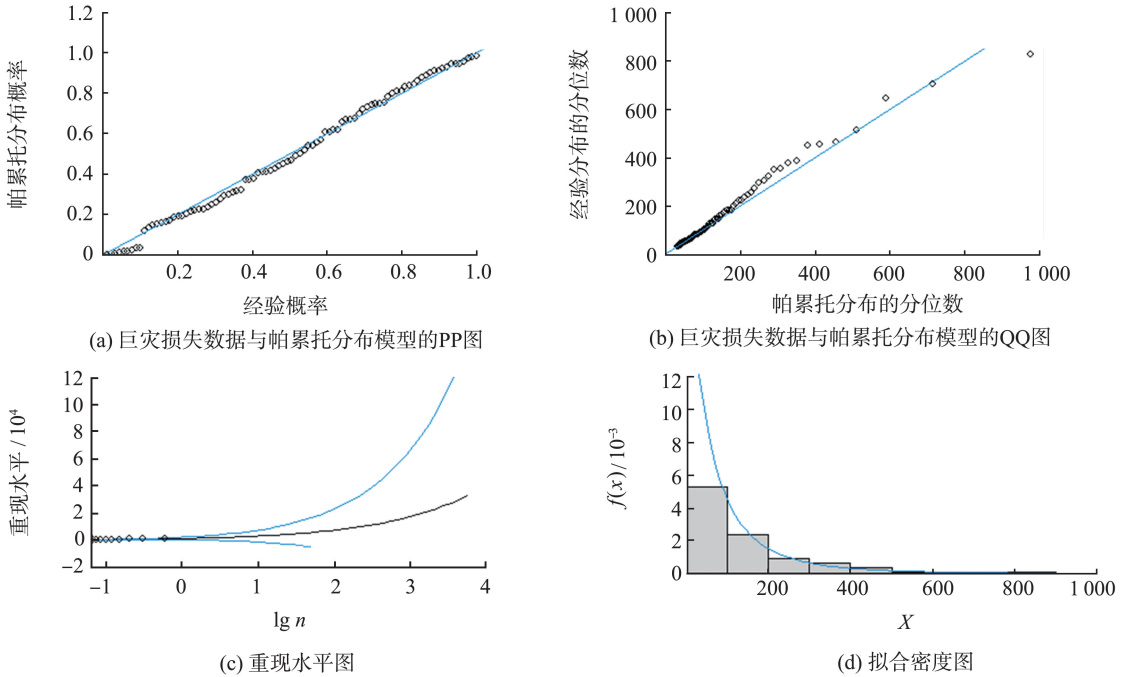


图4 广义帕累托拟合分布诊断图
Fig.4 Generalized Pareto fit distribution diagnostic map

根据损失的整体拟合分布,可以求得不同置信水平下的 VaR。置信水平为 80%、85%、90%、95%、97%、99%时对应 VaR 分别为 293.88、356.26、446.42、616.58、751.51、1 104.4 亿元。其中,置信水平为 90%时,巨灾事件造成最大可能损失为 446.42 亿元,表明 90%的可能性认为发生的累积台风直接经济损失不超过 446.42 亿元。VaR 值的结果显示巨灾风险在小概率发生的尾部损失数额远远大于其他部分,且在损失分布尾部即处于较高置信水平时,较小置信水平 p 的变动都会引起对应的巨灾损失较大变化,与表 1 中得到的均值 69.23 亿元相比,使用 VaR 作为 RCAT 期权支付结构中的风险比率参数更能充分体现巨灾损失分布的厚尾性,为保险公司面对巨灾风险赔付损失提供更充分的资金保障。

3 数值分析

本章将通过调整置信水平、巨灾损失发生强度和风险比率影响因子等来研究 RCAT 期权的定价,并与普通巨灾股票看跌期权($\omega=0$)的价格进行比较。无风险利率初始值 $r(0)$ 设定为 2023 年 4 月 24 日 11 时的

一年期上海银行间同业拆放利率(Shibor)2.649%,长期利率均值 m 选取 2023 年 4 月 20 日 9 时 15 分的 5 年期最新贷款市场报价利率(LPR)4.3%;参考相关文献,将均值回复速度设为 $\varepsilon=0.4$,利率波动参数设为 $\sigma_r=15\%$,股票初始值为 $S(0)=100$,行权价格为 $K=100$,把保险公司股票的巨灾损失影响强度设为 $\alpha=0.0001$,股票价格波动率为 $\sigma_s=20\%$,巨灾期权的损失触发水平为 $L=200$,期权到期时间为 $T=1$ 。

为了获得期权价格,使用蒙特卡罗方法进行模拟,采用模拟 10 万次后的巨灾期权价格。图 5(a) 显示在巨灾发生强度 $\lambda=2$ 时不同置信水平 p 下的巨灾期权价格,可以发现巨灾期权价格变化会随着置信水平取值的增加由递增变为递减。置信水平 p 值代表保险公司风险承受水平,置信水平取值越小,说明保险公司预期独立偿付巨灾损失能力越低,需要 RCAT 期权在到期日获得更多的资金补偿,进而 RCAT 期权价格就越高。如 p 由 0.90 逐渐增加到 0.99 的过程中,巨灾期权支付结构中的风险比率逐渐变小,从而使得保险公司作为巨灾期权的买方在到期日获得的风险溢价逐渐降低,并且在 $p=0.90,0.95$ 时期权价格高于 $\omega=0$ 时的普通巨灾看跌($\omega=0$ 时)期权价格,而在 $p=0.97,0.99$ 时高于普通巨灾看跌期权价格。此外,当置信水平较低时,RCAT 期权价格增长速率随风险比率影响因子取值的增大而增大。

图 5(b)、(c) 分别给出置信水平为 $p=0.90,0.99$ 时不同巨灾索赔强度下的巨灾期权价格随风险比率影响因子的变化情况。可以看出,RCAT 期权的价格会随着损失发生强度值的增加而上升,其原因在于巨灾事件发生强度增大必然导致高巨灾损失累积额的概率提升,进而致使到期日行权的概率和支付额度均增加,巨灾看跌期权的内在价值也会相应增加。同时,通过对比可以进一步发现,置信水平较低时巨灾期权价格会随风险比率影响因子增大而上升,而置信水平较高时结果恰好相反,且风险比率影响因子的增大会使不同巨灾发生强度导致的巨灾期权价格的差异变小。

同时,由图 5(d) 可以发现:随着巨灾损失影响强度变大,巨灾期权的价格也随之上升。巨灾损失影响强度越大说明巨灾损失带来的股价下跌幅度越大,进而巨灾看跌期权的风险对冲作用越明显,因此其相应的内在价值就越高。进一步对比巨灾损失影响强度 α 由小变大的过程可以发现:当 α 取值较小时,巨灾期权价格对 α 变化的敏感度较强,而当 α 取值较大时这一敏感度明显减弱。此外,图 5(d) 也可以反映出,随着巨灾损失触发水平的增加,巨灾期权的价格逐步下降,其原因在于巨灾损失触发水平越高,能够触发巨灾期权的概率越低,对巨灾大额损失的保障程度越低,进而巨灾期权价格越低。

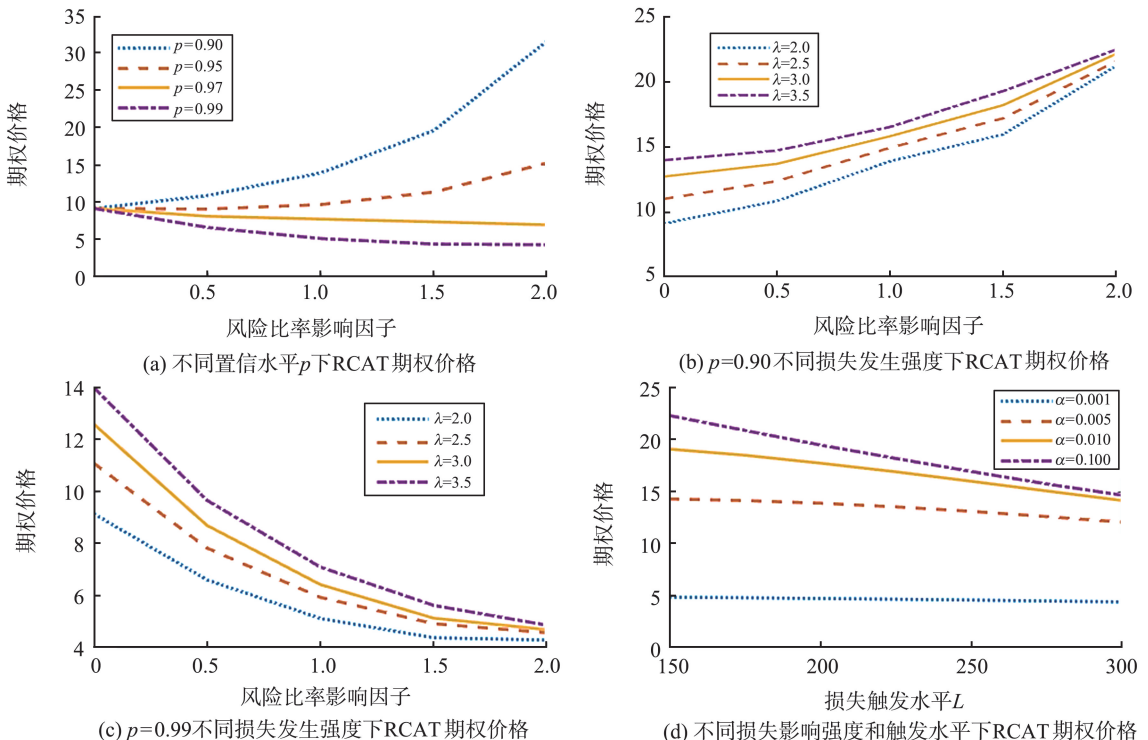


图 5 不同参数下的巨灾期权价格

Fig.5 Catastrophe option prices with different parameters

4 总结

本文构造基于 VaR 的巨灾风险比率,将其融入双触发巨灾看跌期权的支付函数中,得到 RCAT 期权以更加有效对冲巨灾赔付风险,进一步创新巨灾期权产品设计。同时,在巨灾概率子空间和金融概率子空间的乘积概率空间框架下采用风险中性定价方法得到随机利率下的巨灾期权定价公式,使用 POT 模型对我国 1990—2019 年台风直接经济损失数据进行巨灾损失分布拟合。在此基础上,采用蒙特卡罗模拟方法对 RCAT 期权定价模型进行敏感性分析,得到以下结论。(1) 巨灾期权价格随着置信水平的增加由关于风险比率影响因子的增函数变为减函数。在较低置信水平下,巨灾期权的价格随 ω 的增加而正向变化,RCAT 期权的价格高于普通巨灾期权;在高置信水平下,RCAT 期权的价格低于普通巨灾期权。(2) RCAT 期权和普通看跌期权价格都随着巨灾赔付损失发生强度的增加而增加。(3) 随着巨灾损失影响强度的上升,巨灾期权的价格也随之增加;随着损失触发水平的提高,巨灾期权的价格有所下降。

本文通过风险比率影响因子将保险公司的风险偏好融入到巨灾期权的设计中,进一步优化巨灾期权的赔付风险对冲能力,增加了巨灾期权产品的灵活性,为我国巨灾保险业的健康发展提供必要的金融创新支持。同时,文中所采用的利率模型为 Vasicek 模型,没有股票价格的随机波动率,在后续研究中将进一步探索 Cox-Ingersoll-Ross(CIR)模型等其他利率模型,以及原生资产价格在随机波动率条件下的巨灾期权定价问题,不断优化巨灾期权产品的巨灾风险分散机制。

参考文献:

- [1] COX S, FAIRCHILD J, PEDERSEN H. Valuation of structured risk management products[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 34(2):259-272.
- [2] XU Yajuan, WANG Guojing. Pricing catastrophe options with counterparty credit risk in a reduced form model [J]. Acta Mathematica Scientia, 2018, 38(1):347-360.
- [3] JAIMUNGAL S, WANG T. Catastrophe options with stochastic interest rates and compound Poisson losses[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 38(3):469-483.
- [4] JIANG I M, YANG S Y, LIU Y H et al. Valuation of double trigger catastrophe options [J]. North American Journal of Economics and Finance, 2013, 25:226-242.
- [5] BI Hongwei, WANG Guanying, WANG Xingchun. Valuation of catastrophe equity put options with correlated default risk and jump risk[J]. Finance Research Letters, 2019, 29:323-329.
- [6] WANG Guanying, WANG Xingchun. Catastrophe option pricing with auto-correlated and catastrophe-dependent intensity[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2019, 526:120809.
- [7] YU Jun. Catastrophe options with double compound Poisson processes[J]. Economic Modelling, 2015, 50:291-297.
- [8] WANG Xingchun. Catastrophe equity put options with floating strike prices[J]. The North American Journal of Economics and Finance, 2020, 54:101211.
- [9] 胡炳志,吴亚玲. 我国大陆地震巨灾价差期权定价研究[J]. 保险研究,2013,308(12):14-22.
HU Bingzhi, WU Yaling. Study on the pricing of our continental earthquake catastrophe spread option[J]. Insurance Studies, 2013, 308(12):14-22.
- [10] WANG Guanying, WANG Xingchun, SHAO Xinjian. Exchange options for catastrophe risk management[J]. The North American Journal of Economics and Finance, 2022, 59:101580.
- [11] 林光彬,张志明. 巨灾指数期权定价初探[J]. 中央财经大学学报,2008,2008(8):57-61.
LIN Guangbin, ZHANG Zhiming. A preliminary study on catastrophe index option pricing[J]. Journal of Central University of Finance and Economics, 2008, 2008(8):57-61.
- [12] 谢世清,梅云云. 巨灾期权的保险精算定价探析[J]. 现代财经(天津财经大学学报),2021,31(8):101-107.
XIE Shiqing, MEI Yunyun. Analysis of actuarial pricing of catastrophe insurance options[J]. Modern Finance and Economics: Journal of Tianjin University of Finance and Economics, 2021, 31(8):101-107.