山东大学学报(理学版)2025 年 2 月 第 60 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.2, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0085-11 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.162

离散时间正规鞅泛函空间中幂计数算子的性质

周玉兰,魏万瑛,柳翠翠,杨青青
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:在正规鞅平方可积泛函空间 $L^2(M)$ 中引入一类稠定自伴线性算子 a^N,其中 a 是任意正实数,N 是 $L^2(M)$ 中计数算子,称 a^N 为 N 的 a 级幂计数算子。首先讨论 a^N 的分析性质:给出 a^N 有界的充要条件,且发现当 a^N 有界时都是单位算子。其次给出 a^N 是紧算子的充要条件;讨论 $\{a^N;a>0\}$ 的算子结构及其谱分析:a^N 的谱集是 $\{a^n;n>0\}$,其特征向量全体恰好构成 $L^2(M)$ 的一组标准正交基,且 1 是它们的公共谱点,对应 1 的唯一特征向量是 $L^2(M)$ 的真空态 $\boldsymbol{Z}_\varnothing$。然后讨论 a^N 对 a 的依赖性。最后应用 Γ-指标集量子 Bernoulli 噪声,对任意 $a\in(0,1)$,构造了 a^N 的一致收敛序列,而当 $a>1$ 时,构造了 a^N 的强收敛序列。
关键词:幂计数算子;算子谱;紧算子;Γ-指标集量子 Bernoulli 噪声;算子收敛
中图分类号:O177;O211.63 **文献标志码**:A
引用格式:周玉兰,魏万瑛,柳翠翠,等.离散时间正规鞅泛函空间中幂计数算子的性质[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):85-95.

Properties of power-number operators in the functional space of discrete time normal martingale

ZHOU Yulan, WEI Wanying, LIU Cuicui, YANG Qingqing
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: A class of densely defined self-adjoint linear operator a^N is introduced in the functional space $L^2(M)$ of normal martingale square-integrable, where a is a positive number, and N is the number operator in $L^2(M)$, a^N is called the a-level power-number operator of N. Firstly, the analytical properties of a^N are discussed: a sufficient and necessary condition that a^N is bounded is given, and in this case, $\{a^N; 0<a\leqslant 1\}$ are unit operator on $L^2(M)$. Secondly, a^N is compact operator if and only if $0<a<1$; the construction and the spectrum of $\{a^N; a>0\}$ are discussed: $\{a^n; a>0\}$ is the spectrum of a^N and all of its eigenvector forms an orthonormal basis of $L^2(M)$, 1 is the unique spectrum of $\{a^N; a>0\}$ and the vacuum $\boldsymbol{Z}_\varnothing$ is the unique common eigenvector of 1. And then the dependence of a^N on a is discussed. Finally, a uniform convergence sequence of a^N for $a\in(0,1)$ and a strong convergence sequence of a^N is constructed when $a>1$ by means of the quantum Bernoulli noise indexed by Γ.
Key words: power-number operator; operator spectrum; compact operator; Γ-index set quantum Bernoulli noise; operator convergence

0 引言

量子随机分析是经典 Itô 随机分析在算子领域内的一种非交换扩张,其中所讨论的算子族是作用于Fock空间的稠定线性算子或是从检验泛函到广义泛函空间的连续线性算子。这一理论受到了众多学者的关注,基于不同的分析框架,该理论有不同形式的扩张,其中比较著名的有 Itô-Clifford 理论[1]、反对称 Fock 空间上的 Fermion 理论[2]以及基于自由独立性的量子随机积分[3]。以上文献讨论的都是关于连续时间的量子随机分析。

收稿日期:2023-04-20; **网络出版时间**:2024-03-25 10:28:14
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12261080)
第一作者:周玉兰(1978—),女,副教授,博士,研究方向为随机分析. E-mail:zhouylw123@163.com

离散时间正规鞅噪声泛函及其量子随机分析受到了广泛关注。2008 年,Privault[4]讨论了Bernoulli泛函分析框架并给出该理论在经济、金融方面的应用;2011 年,Wang 等[5]给出 Privault 关于Bernoulli泛函分析的另一种表达,以及泛函的重积分的统一表达框架,在 Bernoulli 平方可积泛函空间 $L^2(M)$ 上定义了一列点态增生、湮灭算子 $\{\partial_k, \partial_k^*; k\geqslant 0\}$,称之为量子 Bernoulli 噪声(quantum Bernoulli noise, QBN),满足典则反交换关系和非等时交换关系;计数算子 N 是 $L^2(M)$ 中稠定、自伴线性算子,N 的谱集是自然数集全体且 N 的特征向量构成了 $L^2(M)$ 的一个可数正交基。Zhang 等[6]从概率论角度对计数算子 N 作出了解释,并证明了 N 在适当核空间的对偶空间 $\mathscr{S}^*$ 上唯一决定了一个 Gauss 测度,并且该测度是 $\mathscr{S}^*$ 上标准 Gauss 测度与 $\mathscr{S}^*$ 上一个适当线性变换的复合。Wang 等[7]证明了计数算子 N 在构造和研究一类量子 Markov 半群中扮演了非常重要的角色。Ren 等[8]在应用 N 考虑了扩张型随机 Schrödinger 方程。Han 等[9]应用 N 及相关算子考虑了量子熵的计算。文献[10]还进一步引入广义计数算子 N_h,讨论其分析性质和结构,这里 h 是 $\mathbf{N}$ 上非负函数,特别地,给出了 N_h 有界的一个充要条件,即 h 平方可和。本文受以上文献启发,借助计数算子 N,定义 $L^2(M)$ 中一类稠定自伴线性算子 a^N 并讨论其性质。

1 预备知识

设 $\mathbf{N}$ 表示非负整数集,定义 Γ 为 $\mathbf{N}$ 的有限幂集,即

$$\Gamma=\{\sigma;\ \sigma\subset\mathbf{N}\text{ 且}\#(\sigma)<+\infty\},\tag{1.1}$$

其中$\#(\sigma)$表示集合 σ 的基数。显然 Γ 是一个可列集,对 $\forall n\geqslant 0$,令 $\Gamma^{(n)}=\{\sigma\in\Gamma;\#\sigma=n\}$,则$\{\Gamma^{(n)};n\geqslant 0\}$是 Γ 的一个划分,$\Gamma=\bigcup\limits_{n\geqslant 0}\Gamma^{(n)}$。为了方便起见,记 $\Gamma_{n]}=\{\sigma\in\Gamma;\ \sigma\subset\{0,1,\cdots,n\}\}$,用 $l^2(\Gamma)$ 表示定义在 Γ 上的复值平方可和序列全体所成的 Hilbert 空间。

定义 1.1[5] 概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的平方可积过程 $M=(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$称为离散时间正规鞅,如果 M 满足:

(1) $E[M_0|\mathscr{F}_{-1}]=0$,且 $E[M_n|\mathscr{F}_{n-1}]=M_{n-1}$,对于 $n\geqslant 1$;

(2) $E[M_0^2|\mathscr{F}_{-1}]=1$,且 $E[M_n^2|\mathscr{F}_{n-1}]=M_{n-1}^2+1$,对于 $n\geqslant 1$。

其中 $\mathscr{F}_{-1}=\{\varnothing,\Omega\}$, $\mathscr{F}_n=\sigma(M_k;\ 0\leqslant k\leqslant n)$, $n\in\mathbf{N}$, $E[\cdot|\mathscr{F}_n]$表示关于 $\mathscr{F}_n$ 的条件期望。

设 $M=(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的离散时间正规鞅,其中,$\mathscr{F}=\sigma(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\mathscr{F}_n)$,应用 $M=(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$可构造离散时间过程 $Z=(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$如下:

$$Z_0=M_0,\quad Z_n=M_n-M_{n-1},\quad n\geqslant 1。$$

易证 $Z=(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$满足下面性质:

$$E[Z_n|\mathscr{F}_{n-1}]=0,\quad E[Z_n^2|\mathscr{F}_{n-1}]=1,\quad n\in\mathbf{N},$$

因此 $Z=(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$可看作$(\Omega,\mathscr{F},P)$上离散时间正规噪声。用 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$表示定义在 Ω 上的平方可积随机变量全体所成 Hilbert 空间,其上内积和范数分别记作$\langle\cdot,\cdot\rangle$和$\|\cdot\|$。显然,$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$中元素是 M 的平方可积泛函,故简记 $L^2(M)=L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$。Hilbert 空间 $L^2(M)$的内积对第一变元共轭线性,对第二变元线性。

引理 1.1[5] 设 $Z=(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$是与 M 相关联的离散时间正规噪声,定义 $\mathbf{Z}_\varnothing=\mathbf{1}$,而

$$Z_\sigma=\prod_{i\in\sigma}Z,\quad\forall\sigma\in F,\ \sigma\neq\varnothing,\tag{1.2}$$

则$\{Z_\sigma;\ \sigma\in\Gamma\}$是 $L^2(M)$的可数标准正交基。

引理 1.2[11] 存在唯一的等距同构 $J:l^2(\Gamma)\to L^2(M)$,使得

$$J(f)=\sum_{\sigma\in\Gamma}f(\sigma)Z_\sigma,\quad\forall f\in l^2(\Gamma),\tag{1.3}$$

其中级数依 $L^2(M)$中范数收敛。

对于 $\forall n\geqslant 0$,记 $\mathscr{H}_n=\overline{\operatorname{span}}\{Z_\sigma;\ \sigma\in\Gamma^{(n)}\}$,则$\{\mathscr{H}_n;\ n\geqslant 0\}$是 $L^2(M)$中一列相互正交的闭子空间。

引理 1.3[11](Wiener-Itô-Segal 分解) 存在唯一的等距同构映射:

$$J:\quad L^2(M)\to\bigoplus_{n=0}^{+\infty}\mathscr{H}_n,$$

$$\xi \mapsto \bigoplus_{n=0}^{+\infty} J(f_n), \tag{1.4}$$

这里 $f=J^{-1}(\xi)\in l^2(\Gamma)$,而 $f_n=f\,\mathbf{1}_{\Gamma^{(n)}}$, $\forall n\geqslant 0$。

定义 1.2[11]　设 $k\in\mathbf{N}$,称 ∂_k 为 k 点处的湮灭算子,它的共轭算子 ∂_k^* 称为 k 点处的增生算子。

定义 1.3[11]　设 $\forall k\in\mathbf{N}$,定义算子 $\partial_k:\mathscr{H}\mapsto\mathscr{H}$ 如下:

$$\partial_k\xi=J[f(\ast\cup k)(1-\mathbf{1}_{\ast}(k))],\quad \xi\in\mathscr{H}, \tag{1.5}$$

其中 $f=J^{-1}(\xi)\in l^2(\Gamma)$,则 ∂_k 是 $\mathscr{H}$ 上的有界线性算子且 $\|\partial_k\|=1$,特别地,

$$\partial_k Z_\sigma=\mathbf{1}_\sigma(k)Z_{\sigma\setminus k},\quad \forall\sigma\in\Gamma。 \tag{1.6}$$

引理 1.4[11]　设 $k\in\mathbf{N}$,则 ∂_k^* 有以下性质:

$$\partial_k^*\xi=J[f(\ast\setminus k)\mathbf{1}_{\ast}(k)],\quad \forall\xi\in L^2(M), \tag{1.7}$$

其中 $f=J^{-1}(\xi)$,特别地,

$$\partial_k^* Z_\sigma=(1-\mathbf{1}_\sigma(k))Z_{\sigma\cup k},\quad \forall\sigma\in\Gamma。 \tag{1.8}$$

有界线性算子 $\{\partial_k^*,\partial_k;k\geqslant 0\}$ 称为 QBN,满足如下典则反交换关系。

引理 1.5[11]　设 k, $l\in\mathbf{N}$,则

$$\partial_k\partial_l=\partial_l\partial_k,\quad \partial_k^*\partial_l^*=\partial_l^*\partial_k^*,\quad \partial_k^*\partial_l=\partial_l\partial_k^*(l\neq k),$$
$$\partial_k\partial_k=\partial_k^*\partial_k^*=O,\quad \partial_k\partial_k^*+\partial_k^*\partial_k=I, \tag{1.9}$$

其中 O 是 $L^2(M)$ 上零算子,I 是 $L^2(M)$ 上的恒同算子。

引理 1.6[11]　设 $\forall k\geqslant 0$,则 $\partial_k^*\partial_k$ 和 $\partial_k\partial_k^*$ 都是 $\mathscr{H}$ 的正交投影,并且

$$\partial_k^*\partial_k\xi=J[f(\ast)\mathbf{1}_{\ast}(k)],\quad \partial_k\partial_k^*\xi=J[f(\ast)(1-\mathbf{1}_{\ast}(k))],\quad \forall\xi\in\mathscr{H}, \tag{1.10}$$

其中 $f=J^{-1}(\xi)$,特别地,

$$\partial_k^*\partial_k Z_\sigma=1_\sigma(k)Z_\sigma,\quad \partial_k\partial_k^* Z_\sigma=(1-\mathbf{1}_\sigma(k))Z_\sigma,\quad \forall\sigma\in\Gamma。 \tag{1.11}$$

定义 1.4[12]　对 $\forall\sigma\in\Gamma$, $\sigma\neq\varnothing$, $\sigma=\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$,定义 $L^2(M)$ 上有界线性算子 ∂_σ、∂_σ^* 如下:

$$\partial_\sigma=\partial_{k_1}\partial_{k_2}\cdots\partial_{k_n},\quad \partial_\sigma^*=\partial_{k_1}^*\partial_{k_2}^*\cdots\partial_{k_n}^*,$$
$$\partial_\sigma\partial_\tau^*=\partial_{k_1}\partial_{k_2}\cdots\partial_{k_n}\partial_{l_1}^*\partial_{l_2}^*\cdots\partial_{l_m}^*,\quad \partial_\sigma^*\partial_\tau=\partial_{k_1}^*\partial_{k_2}^*\cdots\partial_{k_n}^*\partial_{l_1}\partial_{l_2}\cdots\partial_{l_m}。$$

特别地,约定 $\partial_\varnothing=I$,$\partial_\varnothing^*=I$,称 $\{\partial_\sigma,\partial_\sigma^*;\sigma\in\Gamma\}$ 为 Γ-指标集量子 Bernoulli 噪声(Γ-index set quantum Bernoulli noise, Γ-QBN),称 $\{\partial_\sigma\partial_\tau^*,\partial_\sigma^*\partial_\tau;\sigma,\tau\in\Gamma\}$ 为 Γ 指标集量子 Bernoulli 噪声混合积。

定义 1.5[10]　$L^2(M)$ 中线性算子 N 定义如下:

$$N(\xi)=\sum_{\sigma\in\Gamma}\#(\sigma)\langle\xi,Z_\sigma\rangle Z_\sigma,\quad \forall\xi\in\mathrm{Dom}\,N, \tag{1.12}$$

$$\mathrm{Dom}\,N=\{\xi\in L^2(M);\sum_{\sigma\in\Gamma}\#(\sigma))^2|\langle\xi,Z_\sigma\rangle|^2<+\infty\}, \tag{1.13}$$

称 N 为 $L^2(M)$ 中的计数算子。

引理 1.7[10]　计数算子 N 是 $L^2(M)$ 中稠定、自伴、无界线性算子。

2　主要结果

计数算子 N 是 $L^2(M)$ 中稠定、自伴无界线性算子,N 以自然数集 $\mathbf{N}$ 为其谱集,N 的特征向量全体构成了 $L^2(M)$ 的一组标准正交基。对给定的非负实数 a,本章将定义 $L^2(M)$ 中线性算子,称之为幂计数算子,记作 a^N。首先讨论该族算子的分析性质:a^N 是 $L^2(M)$ 中的稠定、自伴线性算子,一般是无界的;a^N 的谱集是 $\{a^n;n\geqslant 0\}$,且其对应的特征向量全体构成 $L^2(M)$ 的一组标准正交基,且该算子族有一个公共特征值 1,其对应特征子空间由真空态生成。其次给出 a^N 有界的充要条件。进一步发现,对适当的 a,a^N 是 $L^2(M)$ 上紧算子,并讨论了 a^N 是紧算子的充要条件。最后讨论 a^N 对 a 的依赖性和单调性。

定义 2.1　设 $a>0$ 为一常数,$L^2(M)$ 中线性算子 a^N 定义如下:

$$a^N\xi=\sum_{\omega\in\Gamma}a^{\#\omega}\langle Z_\omega,\xi\rangle, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Dom}\ a^N=\{\xi\in L^2(M)\mid \sum_{\omega\in\Gamma}a^{2\#\omega}\mid\langle Z_\omega,\xi\rangle\mid^2<+\infty\},\tag{2.2}$$

称 a^N 为计数算子 N 的 a 级幂计数算子,简称幂计数算子。

注 1　若 $a=1$,则 $a^N=I$,其中 I 表示 $L^2(M)$ 中恒同算子。

下面定理 2.1 讨论了幂计数算子 a^N 的分析性质。

定理 2.1　设 $a>0$,则 a 级幂计数算子 a^N 是 $L^2(M)$ 中稠定、自伴闭线性算子。

证明　设 $a>0$,由定义 2.1,对 $\forall\omega\in\Gamma$,

$$\|a^N Z_\omega\|^2=a^{2\#\omega}<+\infty,$$

故由 a^N 的线性性知,$\mathrm{span}\{Z_\sigma;\sigma\in\Gamma\}=\mathscr{S}_0(M)\subset\mathrm{Dom}\ a^N$,即 a^N 是稠定的。对任意 $\xi,\eta\in\mathrm{Dom}\ a^N$,有

$$\begin{aligned}\langle(a^N)^*\xi,\eta\rangle=\langle\xi,a^N\eta\rangle&=\sum_\omega\langle\xi,a^{\#\omega}\langle Z_\omega,\eta\rangle Z_\omega\rangle\\&=\sum_\omega a^{\#\omega}\langle\xi,Z_\omega\rangle\langle Z_\omega,\eta\rangle\\&=\langle a^N\xi,\eta\rangle,\end{aligned}$$

表明 a^N 是对称线性算子。为证自伴性,只需说明 $\mathrm{Dom}\,(a^N)^*\subset\mathrm{Dom}\ a^N$。实际上,

$$\mathrm{Dom}\,(a^N)^*=\{\eta\in L^2(M)\mid\exists C_\eta>0\text{ 使}\mid\langle a^N\xi,\eta\rangle\mid\leqslant C_\eta\|\xi\|,\ \forall\xi\in\mathrm{Dom}\ a^N\}。$$

任取 $\eta\in\mathrm{Dom}(a^N)^*$,令

$$\eta_n=\sum_{\omega\in\Gamma_{n]}}a^{\#\omega}\langle Z_\omega,\eta\rangle Z_\omega,\qquad\forall n\geqslant0,$$

显然 $\{\eta_n\}_{n\geqslant0}\subset\mathscr{S}_0(M)\subset\mathrm{Dom}\ a^N$,则存在常数 $C_\eta>0$,满足

$$C_\eta^2\|\eta_n\|^2\geqslant\mid\langle a^N\eta_n,\eta\rangle\mid^2=\Big(\sum_{\omega\in\Gamma_{n]}}a^{2\#\omega}\mid\langle Z_\omega,\eta\rangle\mid^2\Big)^2=\|\eta_n\|^4,$$

$$\sum_{\omega\in\Gamma_{n]}}a^{2\#\omega}\mid\langle Z_\omega,\eta\rangle\mid^2\leqslant C_\eta^2,\quad\forall n\geqslant0。$$

C_η^2 与 n 无关,故

$$\sum_{\omega\in\Gamma}a^{2\#\omega}\mid\langle Z_\omega,\eta\rangle\mid^2\leqslant C_\eta^2<+\infty,$$

表明 $\eta\in\mathrm{Dom}\ a^N$。由 $\eta\in\mathrm{Dom}(a^N)^*$ 的任意性知,$\mathrm{Dom}(a^N)^*\subset\mathrm{Dom}\ a^N$,即 a^N 是 $L^2(M)$ 中稠定自伴线性算子。

下证 a^N 的闭性。任取 $\{\xi_n\}_{n\geqslant1}\subset\mathrm{Dom}\ a^N$, $\xi,\eta\in L^2(M)$,满足 $\xi_n\to\xi$ 且 $a^N\xi_n\to\eta$,须证 $\xi\in\mathrm{Dom}\ a^N$ 且 $\eta=a^N\xi$。

由条件 $\xi_n\xrightarrow{L^2(M)}\xi$, $a^N\xi_n\xrightarrow{L^2(M)}\eta$,有

$$\|\xi_n-\xi\|^2=\sum_{\omega\in\Gamma}\mid\langle Z_\omega,\xi_n-\xi\rangle\mid^2\to0,\quad n\to+\infty,$$

$$\|a^N\xi_n-\eta\|^2=\sum_{\omega\in\Gamma}\mid(a^{\#\omega}\langle Z_\omega,\xi_n\rangle-\langle Z_\omega,\eta\rangle)\mid^2\to0,\quad n\to+\infty,$$

于是

$$\langle Z_\omega,\xi_n\rangle Z_\omega\xrightarrow{L^2(M)}\langle Z_\omega,\xi\rangle Z_\omega,\quad n\to+\infty,\ \forall\omega\in\Gamma,\tag{2.3}$$

$$a^{\#\omega}\langle Z_\omega,\xi_n\rangle Z_\omega\xrightarrow{L^2(M)}\langle Z_\omega,\eta\rangle Z_\omega,\quad n\to+\infty,\ \forall\omega\in\Gamma,\tag{2.4}$$

从而

$$a^{\#\omega}\langle Z_\omega,\xi\rangle Z_\omega=\langle Z_\omega,\eta\rangle Z_\omega,\quad\forall\omega\in\Gamma,\tag{2.5}$$

$$\sum_{\omega\in\Gamma}a^{2\#\omega}\mid\langle Z_\omega,\xi\rangle\mid^2=\sum_{\omega\in\Gamma}\mid\langle Z_\omega,\eta\rangle\mid^2=\|\eta\|^2<+\infty,$$

即 $\xi\in\mathrm{Dom}\ a^N$ 且 $\eta=a^N\xi$。综上可知,a^N 是 $L^2(M)$ 中稠定、自伴闭线性算子。

下面定理 2.2 讨论了幂计数算子 a^N 的谱结构。

定理 2.2　对 $\forall a>0$, $\{a^n;\ n\geqslant0\}$ 是 a^N 的谱集,1 是算子族 $\{a^N;\ a>0\}$ 的唯一公共特征值,而真空态 $\mathbf{Z}_\varnothing$ 是对应于 1 的唯一特征向量。

证明　对 $\forall n\geqslant 0$, $\mathscr{H}_n=J(l^2\Gamma^{(n)})$,则$\{\mathscr{H}_n;n\geqslant 0\}$是 $L^2(M)$ 中一列相互正交的闭线性子空间,且$\{Z_\omega;\omega\in\Gamma^{(n)}\}$是 $\mathscr{H}_n$ 的标准正交基。由定义 2.1,有

$$a^N Z_\omega=a^{\#\omega}Z_\omega=a^n Z_\omega,\quad \forall\,\omega\in\Gamma^{(n)},$$

即 a^n 是 a^N 的特征值,$\mathscr{H}_n$ 是 a^N 对应于特征值 a^n 的特征子空间,且

$$a^N\boldsymbol{Z}_\varnothing=\boldsymbol{Z}_\varnothing,\quad \forall\,a>0。$$

可知 1 是算子族$\{a^N;a>0\}$的唯一公共特征值,而 $\boldsymbol{Z}_\varnothing$ 是对应于 1 的唯一特征向量。

下一定理讨论了对 a 的不同取值 a^N 的分析性质。适当的 a 使 a^N 可成为有界算子,甚至是紧算子。给出了 a^N 有界及紧的充要条件,当 a^N 有界时,它们都是 $L^2(M)$ 上单位算子。

定理 2.3　(1)设 $a>0$ 是给定的常数,则 a^N 是 $L^2(M)$ 上有界线性算子的充要条件是 $0<a\leqslant 1$,且在此情形下,

$$\|a^N\|_{\mathrm{op}}=1,\tag{2.6}$$

这里 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 表示算子范数。而对 $a,b\in(0,1]$,有

$$\|b^N-a^N\|_{\mathrm{op}}=\sup_{n\geqslant 1}(b^n-a^n)=|b-a|。\tag{2.7}$$

(2) N 的 a 级幂计数算子 a^N 是 $L^2(M)$ 上紧算子的充要条件是 $0<a<1$。

证明　(1)设 $a\in(0,1]$,则对于 $\forall n\geqslant 0$, $a^{2n}\leqslant 1$, $\forall\,\xi\in L^2(M)$,有

$$\sum_{\sigma\in\Gamma}a^{2\#\sigma}|\langle Z_\sigma,\xi\rangle|^2\leqslant\sum_{\sigma\in\Gamma}|\langle Z_\sigma,\xi\rangle|^2=\|\xi\|^2,\tag{2.8}$$

从而由定义 2.1 知,$\xi\in\mathrm{Dom}\ a^N$。由 $\xi\in L^2(M)$ 的任意性知,$\mathrm{Dom}\ a^N=L^2(M)$,故 a^N 是 $L^2(M)$ 上有界线性算子,且 $\|a^N\|_{\mathrm{op}}\leqslant 1$。又因为

$$\|a^N\|_{\mathrm{op}}\geqslant\|a^N\boldsymbol{Z}_\varnothing\|=\|\boldsymbol{Z}_\varnothing\|=1,$$

所以结合式(2.8)可得, $\|a^N\|_{\mathrm{op}}=1$。

设 $a,b>0$,且 $a<b\leqslant 1$,则 a^N、b^N 是 $L^2(M)$ 上的有界自伴线性算子,从而 b^N-a^N 也是 $L^2(M)$ 上的有界线性算子。对 $\forall\,\xi\in L^2(M)$,有

$$\begin{aligned}(b^N-a^N)\xi&=\sum_{\omega\in\Gamma,\omega\neq\varnothing}\langle Z_\omega,\xi\rangle(b^{\#\omega}-a^{\#\omega})Z_\omega,\\ \|(b^N-a^N)\xi\|^2&=\sum_{\omega\in\Gamma,\omega\neq\varnothing}|b^{\#\omega}-a^{\#\omega}|^2|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2\\ &=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\omega\in\Gamma^{(n)}}(b^n-a^n)^2|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2\\ &\leqslant\sup_{n\geqslant 1}(b^n-a^n)^2\|\xi\|^2。\end{aligned}$$

这里应用条件 $a<b\leqslant 1$,有$(b^n-a^n)^2\leqslant 4b^n\leqslant 4$,$\{(b^n-a^n)^2;n\geqslant 1\}$是有界序列,表明估计式有意义。一方面,对 $\forall\,n\geqslant 1$,

$$\|b^N-a^N\|_{\mathrm{op}}\geqslant\|(b^N-a^N)Z_\omega\|=b^n-a^n,\quad \forall\,\omega\in\Gamma^{(n)},\tag{2.9}$$

结合 $\|b^N-a^N\|_{\mathrm{op}}\leqslant\sup\limits_{n\geqslant 1}(b^n-a^n)$,有

$$\|b^N-a^N\|_{\mathrm{op}}=\sup_{n\geqslant 1}|b^n-a^n|;$$

另一方面,

$$0<\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b^n-a^n}=\frac{b-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n a}{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}<\frac{a\left(1-\dfrac{a}{b}\right)^n}{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}=a<1,\quad \forall\,n\geqslant 1,$$

即$\{b^n-a^n;n\geqslant 1\}$单调递减,从而

$$\sup_{n\geqslant 1}(b^n-a^n)=b-a。\tag{2.10}$$

结合式(2.9)、(2.10),可得式(2.7)成立。

(2) 设 $0<a<1$,则由(1)知 a^N 有界,对 $\forall\,n\geqslant 0$,

$$a^N Z_\omega = a^n Z_\omega,\quad \omega\in\Gamma^{(n)}。\tag{2.11}$$

这表明$\{1,a,a^2,\cdots,a^n,\cdots\}$是幂计数算子$a^N$的特征值,而$\mathscr{H}_n=J(l^2(\Gamma^{(n)}))$是相应于特征值$a^n$的特征子空间。该序列以0为唯一聚点,表明$a^N$是$L^2(M)$上紧算子,由式(2.11)知,1是紧算子族$\{a^N;0<a<1\}$的公共特征值,$\mathbf{Z}_\varnothing$是对应于该特征值的唯一特征向量。

注 2 对于$a\in(0,1)$,若将a^N限于$L^2(M)$的真子空间$J(l^2(\Gamma\setminus\varnothing))$,则

$$\| a^N|_{J(l^2(\Gamma\setminus\varnothing))}\|_{\mathrm{op}}=a,\tag{2.12}$$

即当$a<1$时,将a^N限于真空态$\{\mathbf{Z}_\varnothing\}$的正交子空间$\{\mathbf{Z}_\varnothing\}^\perp$时,其范数恰为$a$。

下一定理讨论了当$a>1$时,幂计数算子族的定义域具有严格单调性,且它们有上、下界,分别为Dom N和$\mathscr{S}_0(M)$。

定理 2.4 (1) 若$a>1$,则a^N是$L^2(M)$中稠定自伴无界线性算子,且$\{\mathrm{Dom}\ a^N;a>1\}$是Dom N的稠子空间,即

$$\mathscr{S}_0(M)\subset\bigcup_{a>1}\mathrm{Dom}\ a^N\subset\mathrm{Dom}\ N。\tag{2.13}$$

(2) $\{\mathrm{Dom}\ a^N;\ a>1\}$关于$a$是$L^2(M)$中严格单调递减的稠子空间,即当$1<a<b$时, $\mathrm{Dom}\ b^N\subset\mathrm{Dom}\ a^N$,且在此情况下,有$\mathrm{Dom}\ a^N\setminus\mathrm{Dom}\ b^N\neq\varnothing$。

证明 (1)设$a>1$,则有$a^{2\#\omega}\geqslant 1$, $\forall\omega\in\Gamma$,故

$$\|a^N Z_\omega\|^2=a^{2\#\omega}=a^{2n},\quad \omega\in\Gamma^{(n)},$$

$$\|a^N\|\geqslant a^n\to+\infty,\quad n\to+\infty,$$

表明a^N是无界的,且由线性性易证,$a^N(\mathscr{S}_0(M))\subset\mathscr{S}_0(M)$,$a^N$是$L^2(M)$中稠定且以$\mathscr{S}_0(M)$为核的稠定自伴无界线性算子。

由于$a>1$,因此$\exists k_1\geqslant 1$使

$$a^{2n}\geqslant n^2,\quad \forall n\geqslant k_1。$$

对$n<k_1$,存在$k_2>1$使

$$n^2\leqslant k_2a^{2n},\quad 0\leqslant n<k_2。$$

取$k=1+k_2$,则有

$$n^2\leqslant ka^{2n},\quad n\geqslant 0,$$

于是有

$$\sum_{\omega\in\Gamma}(\#(\omega))^2|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2=\sum_{n=0}^{+\infty}n^2\sum_{\omega\in\Gamma^{(n)}}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2\leqslant k\sum_{n=0}^{+\infty}a^{2n}\sum_{\omega\in\Gamma^{(n)}}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2,$$

从而有Dom $a^N\subset$ Dom N。又由$\mathscr{S}_0(M)\subset\mathrm{Dom}\ a^N$知,Dom a^N是Dom N的稠子空间,结合定理2.4(1)知式(2.13)成立。

(2) 设a、b满足$1<a<b$,则$1<a^{2\#\omega}\leqslant b^{2\#\omega}$, $\forall\omega\in\Gamma$,有

$$\sum_{\omega\in\Gamma}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2\leqslant\sum a^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2\leqslant\sum b^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2,$$

表明

$$\mathscr{S}_0(M)\subset\mathrm{Dom}\ b^N\subset\mathrm{Dom}\ a^N\neq L^2(M),\tag{2.14}$$

即幂计数算子的定义域$\{\mathrm{Dom}\ a^N;a>1\}$关于$a$是$L^2(Z)$中单调递减的稠密真子空间。下面来说明$\{\mathrm{Dom}\ a^N;a>1\}$关于$a$是$L^2(Z)$的严格单调递减的,即式(2.14)中的包含关系是真包含。实际上,任取$a,b>1$,满足$1<a<b$,令

$$\xi=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{b^{\#\omega}}Z_\omega\mathbf{1}_{\omega_n(\omega)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{b^{n+1}}Z_{\omega_n},$$

其中$\omega_n=\{0,1,\cdots,n\}$, $n\geqslant 0$,而$\langle Z_\omega,\xi\rangle=\sum_{n=\#\omega}^{+\infty}\mathbf{1}_{\omega_n}(\omega)\langle Z_\omega,\xi\rangle=\sum_{n=\#\omega}^{+\infty}\frac{1}{b^{n+1}}=\frac{1}{(b-1)b^{\#\omega}}$,

$$\sum_{\omega\in\Gamma}a^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2=\sum_{\omega\in\Gamma}a^{2\#\omega}\frac{1}{b^{2\#\omega}}\frac{1}{(b-1)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n \frac{1}{(b-1)^2}$$

$$= \frac{a}{b-a(b-1)^2} < +\infty,$$

故 $\xi \in \mathrm{Dom}\ a^N$,但

$$\sum_{\omega\in\Gamma} b^{2\#\omega} |\langle Z_\omega, \xi\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b^{2\#\omega_n} |\langle Z_{\omega_n}, \xi\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b^{2(n+1)} \frac{1}{b^{2(n+1)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty,$$

即 $\xi \notin \mathrm{Dom}\ b^N$,表明 $\{\mathrm{Dom}\ a^N; a>1\}$ 是 $L^2(M)$ 中关于 a 严格单调递减的稠子空间。实际上,取序列 $\{a_n = n\}$,则

$$\sum_{\omega\in\Gamma} a_n^{2\#\omega} |\langle Z_\omega, \xi\rangle|^2 = \sum_{\omega\in\Gamma} n^{2\#\omega} |\langle Z_\omega, \xi\rangle|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} n^{2k} \sum_{\omega\in\Gamma(k)} |\langle Z_\omega, \xi\rangle|^2 。$$

如果对任意 n 有限,它的充要条件是求和只对有限项进行,即 $\xi \in \mathscr{S}_0(M)$。结合 $\{\mathrm{Dom}\ a^N; a>1\}$ 关于 a 的严格单调递减性,知

$$\lim_{a\to\infty} \mathrm{Dom}\ a^N = \bigcap_{a>1} \mathrm{Dom}\ a^N = \mathscr{S}_0(M),$$

显然,$\{\mathrm{Dom}\ a^N; a>1\}$ 有下确界 $\mathscr{S}_0(M)$、上确界 $\mathrm{Dom}\ N$。

下一定理说明幂计数算子 a^N 的定义域 $\mathrm{Dom}\ a^N$ 是 Γ-QBN 及其混合积的不变子空间,特别地,$\mathrm{Dom}\ a^N$ 是 QBN$\{\partial_k, \partial_k^*; k\geqslant 0\}$ 的不变子空间。

定理 2.5　设 $a>0, \sigma\in\Gamma$,则 $\mathrm{Dom}\ a^N$ 是 σ-湮灭∂_σ 和 σ-增生∂_σ^* 的不变子空间,即

$$\partial_\sigma\ \mathrm{Dom}\ a^N \subset \mathrm{Dom}\ a^N,\quad \partial_\sigma^*\ \mathrm{Dom}\ a^N \subset \mathrm{Dom}\ a^N 。\tag{2.15}$$

进一步地,$\mathrm{Dom}\ a^N$ 是 Γ-QBN 混合积$\{\partial_\sigma\partial_\tau^*, \partial_\tau^*\partial_\sigma; \sigma, \tau\in\Gamma\}$ 的不变子空间。

证明　若 $0<a\leqslant 1$,由定理 2.4(1) 知,a^N 是 $L^2(M)$ 上有界线性算子,而 Γ-QBN 也是 $L^2(M)$ 上有界线性算子,故 $a^N \subset (L^2(M)) \subset \mathrm{Dom}\ a^N$,式(2.15)成立。

下设 $a>1$,任取 $\xi\in\mathrm{Dom}\ a^N$,有 $\sum_{\omega\in\Gamma} a^{2\#\omega} |\langle Z_\omega, \xi\rangle|^2 < +\infty$,由 $\partial_\sigma, \partial_\sigma^*$ 的有界性,有

$$\partial_\sigma\xi = \sum_{\omega\in\Gamma} \langle Z_\omega, \xi\rangle \mathbf{1}_\omega(\sigma) Z_{\omega\setminus\sigma},\quad \partial_\sigma^*\xi = \sum_{\omega\in\Gamma} \langle Z_\omega, \xi\rangle (1-\mathbf{1}_\omega(\sigma)) Z_{\omega\cup\sigma},$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Gamma} a^{2\#(\omega\setminus\sigma)} \mathbf{1}_\omega(\sigma) |\langle Z_\omega, \xi\rangle|^2 &= \frac{\sum_{\omega\in\Gamma} a^{2\#\omega} \mathbf{1}_\omega(\sigma) |\langle Z_\omega, \xi\rangle|^2}{a^{2\#\sigma}} \\ &\leqslant \frac{\sum_{\omega\in\Gamma} a^{2\#\omega} |\langle Z_\omega, \xi\rangle|^2}{a^{2\#\sigma}} \\ &= \frac{\| a^N\xi \|^2}{a^{2\#\sigma}} < +\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Gamma} a^{2\#(\omega\cup\sigma)} (1-\mathbf{1}_\omega(\sigma)) |\langle Z_\omega, \xi\rangle|^2 &= \sum_{\omega\in\Gamma} (1-\mathbf{1}_\omega(\sigma)) a^{2\#(\omega\cup\sigma)} |\langle Z_\omega, \xi\rangle|^2 a^{2\#\sigma} \\ &\leqslant a^{2\#\sigma} \| a^N\xi \|^2 < +\infty,\end{aligned}$$

表明$\partial_\sigma\xi, \partial_\sigma^*\xi \in \mathrm{Dom}\ a^N$。由 $\xi\in\mathrm{Dom}\ a^N$ 的任意性知,式(2.15)成立,$\mathrm{Dom}\ a^N$ 是$\partial_\sigma, \partial_\sigma^*$ 的不变子空间。下证 $\mathrm{Dom}\ a^N$ 是 Γ-QBN 混合积$\{\partial_\sigma\partial_\tau^*\ \partial_\tau^*\partial_\sigma; \sigma, \tau\in\Gamma\}$ 的不变子空间。

实际上,对任意 $\sigma, \tau\in\Gamma$,任取 $\xi\in\mathrm{Dom}\ a^N$,由 Γ-QBN 混合积的有界性,有

$$\partial_\sigma\partial_\tau^*\xi = \sum_{\omega\in\Gamma} \langle Z_\omega, \xi\rangle \mathbf{1}_{\omega\cup\tau}(\sigma)(1-\mathbf{1}_\omega(\tau)) Z_{(\omega\cup\tau)\setminus\sigma} 。$$

又由

$$\begin{aligned}a^{\#(\omega\cup\tau)\setminus\sigma}(1-\mathbf{1}_\omega(\tau))\mathbf{1}_{\omega\cup\tau}(\sigma) &= a^{\#(((\omega\setminus\sigma)\cup(\sigma\setminus\tau)\cup(\sigma\cap\tau)\cup(\tau\setminus\sigma))\setminus\sigma)}(1-\mathbf{1}_\omega(\tau))\mathbf{1}_{\omega\cup\tau}(\sigma) \\ &= a^{\#(\omega\setminus\sigma)} a^{\#(\tau\setminus\sigma)}(1-\mathbf{1}_\omega(\tau))\mathbf{1}_{\omega\cup\tau}(\sigma)\end{aligned}$$

$$= a^{\#(\omega\cup(\tau\backslash\sigma)\backslash(\sigma\backslash\tau))}(1-\mathbf{1}_{\omega}(\tau))\mathbf{1}_{\omega\cup\tau}(\sigma),$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{\tau\in\Gamma} a^{2\#((\omega\cup\tau)\backslash\sigma)}(1-\mathbf{1}_{\omega}(\tau))\mathbf{1}_{\omega\cup\tau}(\sigma)\,|\langle Z_{\omega},\xi\rangle|^{2} &= \sum_{\omega\in\Gamma} a^{2\#((\omega\cup\tau)\backslash\sigma)}(1-\mathbf{1}_{\omega}(\tau))\mathbf{1}_{\omega\cup\tau}(\sigma)\,|\langle Z_{\omega},\xi\rangle|^{2}\\ &= \sum_{\omega\in\Gamma} a^{2\#\omega}|\langle Z_{\omega},\xi\rangle|^{2}a^{2\#(\tau\backslash\sigma)-2\#(\sigma\backslash\tau)}\\ &= a^{2(\#(\tau\backslash\sigma)-\#(\sigma\backslash\tau))}\,\|a^{N}\xi\|^{2}<+\infty。\end{aligned}$$

此外,

$$\partial_{\tau}^{*}\partial_{\sigma}\xi=\sum_{\omega\in\Gamma}\langle Z_{\omega},\xi\rangle\mathbf{1}_{\omega}(\sigma)(1-\mathbf{1}_{\omega\backslash\sigma}(\tau))Z_{(\omega\backslash\sigma)\cup\tau}。$$

又由

$$\begin{aligned}a^{\#(\omega\backslash\sigma\cup\tau)}\mathbf{1}_{\omega}(\sigma)(1-\mathbf{1}_{\omega\backslash\sigma}(\tau)) &= a^{(\omega\cup\tau)\backslash(\sigma\cup\tau)}\mathbf{1}_{\omega}(\sigma)(1-\mathbf{1}_{\omega\backslash\sigma}(\tau))\\ &= a^{\#\omega}a^{\#(\tau\backslash\sigma)-\#(\sigma\backslash\tau)}\mathbf{1}_{\omega}(\sigma)(1-\mathbf{1}_{\omega\backslash\sigma}(\tau)),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum a^{2\#(\omega\backslash\sigma)\cup\tau}(1-\mathbf{1}_{\omega\backslash\sigma}(\tau))\mathbf{1}_{\omega}(\sigma)\,|\langle Z_{\omega},\xi\rangle|^{2} &= \sum_{\omega\in\Gamma} a^{2\#(\omega\backslash\sigma)}a^{2\#\tau}\,|\langle Z_{\omega},\xi\rangle|^{2}\\ &\leqslant \sum_{\omega\in\Gamma} a^{2\#\omega}|\langle Z_{\omega},\xi\rangle|^{2}a^{2\#(\tau\backslash\sigma)-2\#(\sigma\backslash\tau)}\\ &= a^{2(\#(\tau\backslash\sigma)-\#(\sigma\backslash\tau))}\,\|a^{N}\xi\|^{2}<+\infty,\end{aligned}$$

表明$\partial_{\sigma}\partial_{\tau}^{*}\xi$, $\partial_{\tau}^{*}\partial_{\sigma}\xi\in\mathrm{Dom}\ a^{N}$。由 $\xi\in\mathrm{Dom}\ a^{N}$ 的任意性知,$\mathrm{Dom}\ a^{N}$ 是 Γ-QBN 不同型混合积$\{\partial_{\sigma}\partial_{\tau}^{*},\partial_{\tau}^{*}\partial_{\sigma};\ \sigma,\tau\in\Gamma\}$的不变子空间。

下一定理讨论幂计数算子 a^{N} 对于底数 a 的依赖性。当$\{a_{n}\}_{n\geqslant1}\subset(0,1)$且收敛于 $a_{0}<1$ 时,幂计数算子列$\{a_{n}^{N}\}_{n\geqslant1}$在 $L^{2}(M)$上一致收敛于 a_{0}^{N};而当$\{a_{n}\}_{n\geqslant1}\subset(1,+\infty)$且收敛于 $a_{0}>1$ 时,$\{a_{n}^{N}\}_{n\geqslant0}$在 $L^{2}(M)$的某稠子空间上强收敛于 a_{0}^{N}。

定理 2.6 (1)设 $0<a_{0}<1$,数列$\{a_{n}\}_{n\geqslant1}\subset(0,1)$且收敛于 a_{0},则对应的幂计数算子列$\{a_{n}^{N}\}_{n\geqslant1}$在 $L^{2}(M)$上依算子范数一致收敛于 a_{0}^{N},在此情况下,有

$$\lim_{n\to\infty}\|a_{n}^{N}-a^{N}\|_{\mathrm{op}}=\lim_{n\to\infty}|a_{n}-a_{0}|=0。\tag{2.16}$$

(2) 设 $a_{0}>1$,设$\{a_{n}\}\subset(1,+\infty)$且收敛于 a_{0} 的数列$\{a_{n}\}_{n\geqslant1}$,则对应的幂计数算子列$\{a_{n}^{N}\}_{n\geqslant1}$在$L^{2}(M)$的稠子空间$\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Dom}\ a_{n}^{N}$上强收敛于 a_{0}^{N},即

$$\lim_{n\to\infty}\|a_{n}^{N}\xi-a_{0}^{N}\xi\|=0,\quad\forall\xi\in\bigcap_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Dom}\ a_{n}^{N}。\tag{2.17}$$

(3) 对 $a_{0}=1$,当$\{a_{n}\}_{n\geqslant1}$单调递增收敛于 a_{0} 时,$\{a_{n}^{N}\}_{n\geqslant1}$一致收敛于 I,当$\{a_{n}\}_{n\geqslant1}$单调递减收敛于 1 时,$\{a_{n}^{N}\}_{n\geqslant1}$强收敛于 I。

证明 (1) 设$a_{0}\in(0,1)$,数列$\{a_{n}\}_{n\geqslant1}\subset(0,1)$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n}=a_{0}$,由定理 2.4,幂计数算子列$\{a_{n}^{N};\ n\geqslant0\}$是 $L^{2}(M)$上有界线性算子,对 $\xi\in L^{2}(M)$,有

$$\begin{aligned}\|a_{n}^{N}\xi-a_{0}^{N}\xi\|^{2} &= \Big\|\sum_{\omega\in\Gamma}(a_{n}^{\#\omega}-a_{0}^{\#\omega})\langle Z_{\omega},\xi\rangle Z_{\omega}\Big\|^{2}\\ &= \sum_{\omega\in\Gamma}(a_{n}^{\#\omega}-a_{0}^{\#\omega})^{2}|\langle Z_{\omega},\xi\rangle|^{2}\\ &\leqslant 2\sum_{\omega\in\Gamma}a_{n}^{2\#\omega}|\langle Z_{\omega},\xi\rangle|^{2}+2\sum_{\omega\in\Gamma}a_{0}^{2\#\omega}|\langle Z_{\omega},\xi\rangle|^{2}\\ &\leqslant 4\sum_{\omega\in\Gamma}|\langle Z_{\omega},\xi\rangle|^{2}=4\|\xi\|^{2}<+\infty。\end{aligned}$$

由 $a_{n}\to a_{0}$ 知$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n}^{\#\omega}=a_{0}^{\#\omega}$, $\forall\omega\in\Gamma$,根据控制收敛定理,$\lim\limits_{n\to\infty}\|a_{n}^{N}\xi-a_{0}^{N}\xi\|^{2}=0$。又有

$$\begin{aligned}\|(a_{n}^{N}-a_{0}^{N})\xi\|^{2} &= \Big\|\sum_{\omega\neq\varnothing}(a_{n}^{\#\omega}-a_{0}^{\#\omega})\langle Z_{\omega},\xi\rangle Z_{\omega}\Big\|^{2}\\ &= \sum_{\omega\neq\varnothing}(a_{n}^{\#\omega}-a_{0}^{\#\omega})^{2}|\langle Z_{\omega},\xi\rangle|^{2}\end{aligned}$$

$$\leqslant \sup_{k\geqslant 1}(a_n^k - a_0^k)^2 \|\xi\|^2$$
$$= | a_n - a_0 | \cdot \|\xi\|^2,$$

进而

$$\lim_{n\to\infty}\|a_n^N - a_0^N\|_{\mathrm{op}} \leqslant \lim_{n\to\infty}|a_n - a_0| = 0。\tag{2.18}$$

又因为 $\|a_n^N - a_0^N\|_{\mathrm{op}} \geqslant \|(a_n^N - a_0^N)Z_k\| = |a_n - a_0|$,所以由定理 2.4,在此情形下,算子列$\{a_n^N;n\geqslant 0\}$在 $L^2(M)$上一致收敛于 a_0^N。

(2) 设 $a_0>1$,数列$\{a_n\}_{n\geqslant 1}\subset(1,+\infty)$且$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$, $\{\mathrm{Dom}\ a_n^N;n\geqslant 0\}$是 $L^2(M)$中一列稠密线性子空间。记 a 为数列$\{a_n\}_{n\geqslant 0}$的上确界,$a=\sup\{a_n;n\geqslant 0\}$,则由定义 2.1 有$\bigcap_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Dom}\ a_n^N = \mathrm{Dom}\ a^N$。实际上,由$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$,必有 k_0 使 $a_{k_0}=\sup\{a_n;n\geqslant 0\}\triangleq a$,此时,$\bigcap_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Dom}\ a_n = \mathrm{Dom}\ a_{k_0}^N = \mathrm{Dom}\ a^N$, 对$\forall\xi\in\mathrm{Dom}\ a^N$,有

$$\begin{aligned}\|a_n^N\xi - a_0^N\xi\|^2 &= \Big\|\sum_{\omega\in\Gamma}(a_n^{\#\omega} - a_0^{\#\omega})\langle Z_\omega,\xi\rangle Z_\omega\Big\|^2\\ &= \sum_{\omega\in\Gamma,\omega\neq\varnothing}(a_n^{\#\omega} - a_0^{\#\omega})^2|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2\\ &\leqslant 2\sum_{\omega\in\Gamma}a_n^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2 + 2\sum_{\omega\in\Gamma}a_0^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2\\ &\leqslant 4\sum_{\omega\in\Gamma}a^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2 = 4\|a^N\xi\|^2 < +\infty,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式成立是由于当 $a_n>1$ 时,$a_n^{2\#\omega}>1$, $\forall n\geqslant 1$, $\omega\in\Gamma$。又由$\{a_n\}_{n\geqslant 1}$收敛于 a_0 知$\lim_{n\to\infty} a_n^{\#\omega} = a_0^{\#\omega}$, $\forall\omega\in\Gamma$,从而由控制收敛定理,$\lim_{n\to\infty}\|a_n^N\xi - a_0^N\xi\|^2 = 0$,表明$\{a_n^N;n\geqslant 1\}$在 $L^2(M)$的稠密子空间 $\mathrm{Dom}\ a^N$ 上强收敛于 a_0^N。

(3) 由(1)、(2)的证明易知(3)成立。

由定理 2.4 的(2)知,$\{\mathrm{Dom}\ a^N;a>1\}$关于 a 是严格单调递减的。下一定理讨论当 $a>1$ 时,N 的 a 级幂计数算子关于 a 的单调性和依赖性。

定理 2.7　设 $a_0>1$,$\{a_n\}_{n\geqslant 1}\subset(1,+\infty)$是单调序列,则有

(1) 若$\{a_n\}_{n\geqslant 1}$单调递增收敛于 a_0,则$\{\mathrm{Dom}\ a_n^N;n\geqslant 0\}$是 $L^2(M)$中严格单调递减的稠密子空间,幂级数算子列$\{a_n^N\}_{n\geqslant 1}$以 $\mathrm{Dom}\ a_0^N$ 为核,即

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Dom}\ a_n^N = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Dom}\ a_n^N \supset \mathrm{Dom}\ a_0^N;\tag{2.19}$$

(2) 若$\{a_n\}_{n\geqslant 1}$单调递减收敛于 a_0,则$\{\mathrm{Dom}\ a_n^N;n\geqslant 0\}$是 $L^2(M)$中严格单调递增的稠密子空间,幂级数算子列$\{a_n^N\}_{n\geqslant 1}$以 $\mathrm{Dom}\ a_1^N$ 为核,即

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Dom}\ a_n^N = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Dom}\ a_n^N \subset \mathrm{Dom}\ a_0^N,\tag{2.20}$$

其中“严格单调”是指若 $1<a<b$,则 $\mathrm{Dom}\ b^N \subset \mathrm{Dom}\ a^N$ 且 $\mathrm{Dom}\ b^N \neq \mathrm{Dom}\ a^N$。

证明　(1) 设$\{a_n\}_{n\geqslant 1}$单调递增收敛于 a_0,则有

$$\sum_{\omega\in\Gamma}a_n^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2 \leqslant \sum_{\omega\in\Gamma}a_{n+1}^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2 \leqslant\cdots\leqslant \sum_{\omega\in\Gamma}a_0^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2,\quad \forall n\geqslant 1,$$

从而

$$\mathrm{Dom}\ a_0^N \subset\cdots\subset \mathrm{Dom}\ a_{n+1}^N \subset \mathrm{Dom}\ a_n^N \subset\cdots\subset \mathrm{Dom}\ a_1^N,$$

说明$\{\mathrm{Dom}\ a_n^N;n\geqslant 1\}$是 $L^2(M)$中一列单调递减的稠密子空间,且

$$\mathrm{Dom}\ a_0^N \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Dom}\ a_n^N = \lim_{n\to\infty}\mathrm{Dom}\ a_n^N。$$

(2) 设$\{a_n\}_n\geqslant 1$ 单调递减收敛于 a_0,则有

$$\sum_{\omega\in\Gamma}a_n^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2 \geqslant \sum_{\omega\in\Gamma}a_{n+1}^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2 \geqslant\cdots\geqslant \sum_{\omega\in\Gamma}a_0^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2,\quad \forall n\geqslant 1,$$

从而

$$\mathrm{Dom}\ a_1^N \subset \mathrm{Dom}\ a_2^N \subset\cdots\subset \mathrm{Dom}\ a_n^N \subset \mathrm{Dom}\ a_{n+1}^N \subset\cdots\subset \mathrm{Dom}\ a_0^N,\quad \forall n\geqslant 1,$$

即 $\{\mathrm{Dom}\ a_n^N;\ n\geqslant 1\}$ 是 $L^2(M)$ 中一列单调递增的稠密子空间,且

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{Dom}\ a_n^N=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Dom}\ a_n^N\subset\mathrm{Dom}\ a_0^N。$$

式(2.20)得证。

下一定理应用 Γ-QBN 构造了幂计数算子的收敛序列。

定理 2.8 (1)设 $0<a<1$,下列各序列在 $L^2(M)$ 上一致收敛于 a^N。

$$\{a^N-\partial_{\sigma_n}a^N,\ a^N-\partial_{\sigma_n}^*\partial_{\sigma_n}a^N,\ a^N-\partial_{\sigma_n}a^N\partial_{\sigma_n}^*,\ a^N-\partial_\tau^*\partial_{\sigma_n}a^N,$$
$$a^N-\partial_{\sigma_n}\partial_\tau^*a^N,\ a^N-\partial_{\sigma_n}a^N\partial_\tau^*,\ a^N-a^N\partial_\tau\partial_{\sigma_n}^*,\ a^N-a^N\partial_{\sigma_n}^*\partial_\tau\}_{n\geqslant 1}。$$

(2) 设 $a>1$,则下列各序列在 $\mathrm{Dom}\ a^N$ 上强收敛于 a^N。

$$\{a^N-a^N\partial_{\sigma_n},\ a^N-\partial_{\sigma_n}^*a^N\partial_{\sigma n},\ a^N-\partial_\tau^*a^N\partial_{\sigma n},\ a^N-a^N\partial_{\sigma n}\partial_\tau^*,\ a^N-a^N\partial_\tau^*\partial_{\sigma_n}\}_{n\geqslant 1},$$

这里对任意 $n\geqslant 0,\sigma_n=\{0,1,\cdots,n\},\ \tau\in\Gamma$。

证明 针对不同范围的 a,采用不同的量来控制相应向量范数:当 $0<a\leqslant 1$ 时,用 $\|\xi\|^2$ 进行估计;而当 $a>1$ 时,用 $\|a^N\xi\|^2$ 进行估计。为证定理 2.8(1)、(2)中各序列一致收敛或强收敛于 a^N,只需证明各序列与 a^N 之差相应地收敛于 O。

(1) 设 $0<a<1$,a^N 是 $L^2(M)$ 上有界线性算子,对任意 $n\geqslant 0$,任取 $\xi\in L^2(M)$,对(1)中各算子与 a^N 之差作用于 ξ,有

$$\|\partial_{\sigma_n}a^N\xi\|^2=\sum_{\omega\in\Gamma}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2a^{2\#\omega}\mathbf{1}_\omega(\sigma_n)\leqslant a^{2\#\sigma_n}\|\xi\|^2=a^{2(n+1)}\|\xi\|^2,$$
$$\|\partial_{\sigma_n}^*\partial_{\sigma n}a^N\xi\|^2=\sum_{\omega\in\Gamma}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2a^{2\#\omega}\mathbf{1}_\omega(\sigma_n)\leqslant a^{2\#\sigma_n}\|\xi\|^2=a^{2(n+1)}\|\xi\|^2,$$
$$\|\partial_{\sigma_n}a^N\partial_{\sigma_n}^*\xi\|^2=\sum_{\omega\in\Gamma}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2(1-\mathbf{1}_\omega(\sigma_n))a^{2\#(\omega\cup\sigma_n)}\leqslant a^{2(n+1)}\|a^N\xi\|^2,$$
$$\|\partial_\tau^*\partial_{\sigma_n}a^N\xi\|^2=\sum_{\omega\in\Gamma}a^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2\mathbf{1}_\omega(\sigma_n)(1-\mathbf{1}_{\omega\setminus\sigma_n}(\tau))\leqslant a^{2(n+1)}\|\xi\|^2,$$
$$\|\partial_{\sigma_n}\partial_\tau^*a^N\xi\|^2=\sum_{\omega\in\Gamma}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2a^{2\#\omega}(1-\mathbf{1}_\omega(\tau))\mathbf{1}_{\omega\cup\tau}(\sigma_n)\leqslant\frac{a^{2(n+1)}}{a^{2\#\tau}}\|\xi\|^2,$$
$$\|\partial_{\sigma_n}a^N\partial_\tau^*\xi\|^2=\sum_{\omega\in\Gamma}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2(1-\mathbf{1}_\omega(\tau))\mathbf{1}_{\omega\cup\tau}(\sigma_n)a^{2\#(\omega\cup\tau)}\leqslant a^{2\#\tau}a^{2(n+1)}\|\xi\|^2,$$
$$\|a^N\partial_\tau\partial_{\sigma_n}^*\xi\|^2=a^{2\#(\omega\cup\sigma_n)\setminus\tau}\sum_{\omega\in\Gamma}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2(1-\mathbf{1}_\omega(\sigma_n))\mathbf{1}_{\omega\cup\sigma_n}(\tau)\leqslant\frac{a^{2(n+1)}}{a^{2\#\tau}}\|\xi\|^2,$$
$$\|a^N\partial_{\sigma_n}^*\partial_\tau\xi\|^2=\sum_{\omega\in\Gamma}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2\mathbf{1}_\omega(\tau)(1-\mathbf{1}_{\omega\setminus\tau}(\sigma_n))a^{2\#\omega(\omega\setminus\tau)\cup\sigma_n}\leqslant a^{2(n+1)}\|\xi\|^2。$$

可得各算子有如下估计:

$$\|\partial_{\sigma_n}a^N\|_{\mathrm{op}}\leqslant a^{n+1},\quad\|\partial_{\sigma_n}^*\partial_{\sigma n}a^N\|_{\mathrm{op}}\leqslant a^{n+1};$$
$$\|\partial_{\sigma_n}a^N\partial_{\sigma_n}^*\|_{\mathrm{op}}\leqslant a^{n+1},\quad\|\partial_\tau^*\partial_{\sigma_n}a^N\|_{\mathrm{op}}\leqslant a^{n+1};$$
$$\|\partial_{\sigma_n}\partial_\tau^*a^N\|_{\mathrm{op}}\leqslant\frac{a^{2(n+1)}}{a^{2\#\tau}},\quad\|a^N\partial_\tau\partial_{\sigma_n}^*\|_{\mathrm{op}}\leqslant\frac{a^{2(n+1)}}{a^{2\#\tau}};$$
$$\|\partial_{\sigma_n}a^N\partial_\tau^*\|_{\mathrm{op}}\leqslant a^{n+1},\quad\|a^N\partial_{\sigma_n}^*\partial_\tau\|_{\mathrm{op}}\leqslant a^{n+1}。$$

由 $0<a<1$,当 $n\to\infty$ 时,以上各式右端极限为 0,表明左端各式算子列范数以 0 为极限。由有界性知,定理 2.8(1)中各算子列在 $L^2(M)$ 上一致收敛于 a^N。

(2) 设 $a\geqslant 1$,由于 $\mathrm{Dom}\ a^N$ 是 Γ-QBN 的不变子空间,任取 $\xi\in\mathrm{Dom}\ a^N$,对定理 2.8(2)中各算子与 a^N 之差作用于 ξ,有

$$\begin{aligned}\|a^N\partial_{\sigma_n}\xi\|^2&=\sum_{\omega\in\Gamma}\mathbf{1}_\omega(\sigma_n)a^{2\#(\omega\setminus\sigma_n)}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2\\&=\frac{1}{a^{2\#\sigma_n}}\sum_{\omega\in\Gamma}\mathbf{1}_\omega(\sigma_n)a^{2\#\omega}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2\\&\leqslant\frac{1}{a^{2\#\sigma_n}}\sum_{\omega\in\Gamma}|\langle Z_\omega,\xi\rangle|^2a^{2\#\omega}=\frac{1}{a^{2(n+1)}}\|a^N\xi\|^2,\end{aligned}\tag{2.21}$$

$$\| \partial_{\sigma_n}^* a^N \partial_{\sigma_n} \xi \|^2 \leqslant \frac{1}{a^2(n+1)} \| a^N \xi \|^2, \tag{2.22}$$

$$\| \partial_\tau^* a^N \partial_{\sigma_n} \xi \|^2 = \sum_{\omega \in \Gamma} \mathbf{1}_\omega(\sigma_n)(1 - \mathbf{1}_{\omega \setminus \sigma_n}(\tau)) | \langle Z_\omega, \xi \rangle |^2 a^{2\#(\omega \setminus \sigma_n)} \leqslant \frac{a^{2\#\tau}}{a^{2(n+1)}} \| a^N \xi \|^2, \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} \| a^N \partial_{\sigma_n} \partial_\tau^* \xi \|^2 &= \sum_{\omega \in \Gamma} (1 - \mathbf{1}_\omega(\tau)) \mathbf{1}_{\omega \cup \tau}(\sigma_n) | \langle Z_\omega, \xi \rangle |^2 a^{2\#(\omega \cup \tau) \setminus \sigma_n} \\ &\leqslant \frac{a^{2\#\tau}}{a^{2\#\sigma_n}} \| a^N \xi \|^2 = \frac{a^{2\#\tau}}{a^{2(n+1)}} \| a^N \xi \|^2, \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} \| a^N \partial_\tau^* \partial_{\sigma_n} \xi \|^2 &= \sum_{\omega \in \Gamma} \mathbf{1}_\omega(\sigma_n)(1 - \mathbf{1}_{\omega \setminus \sigma_n}(\tau)) | \langle Z_\omega, \xi \rangle |^2 a^{2\#(\omega \setminus \sigma_n) \cup \tau} \\ &= \frac{a^{2\#\tau}}{a^{2\#\sigma_n}} \sum_{\omega \in \Gamma} \mathbf{1}_\omega(\sigma_n)(1 - \mathbf{1}_{\omega \setminus \sigma_n}(\tau)) | \langle Z_\omega, \xi \rangle |^2 a^{2\#\omega} \\ &\leqslant \frac{a^{2\#\tau}}{a^{2(n+1)}} \| a^N \xi \|^2。 \end{aligned} \tag{2.25}$$

当 $\xi \in \mathrm{Dom}\, a^N$ 给定时,式(2.21)—(2.25) 右端被某常数乘以 $\frac{1}{a^{2(n+1)}}$ 控制,其中 $a > 1$,则 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{a^{2(n+1)}} = 0$,由此可知式(2.21)—(2.25) 左端收敛于 0,即相应各算子在 $\mathrm{Dom}\, a^N$ 上强收敛于 a^N。

注 3　这里 a^N 与 Γ-QBN 混合积复合列的一致收敛性与 Γ-QBN 的顺序有密切关系,其中的增生、湮灭顺序一般不可交换,如 $\| \partial_{\sigma_n}^* \partial_{\sigma_n} a^N \|_{\mathrm{op}} \to O$,但 $\| \partial_{\sigma_n} \partial_{\sigma_n}^* a^N \|_{\mathrm{op}} = 1 \nrightarrow O$。

参考文献:

[1] BARNETT C, STREATER R F, WILDE I F. The Itô-Cliford integral[J]. Journal of Functional Analysis, 1982, 48(2):172-212.

[2] APPLEBAUM D B, HUDSON R L. Fermion Itô's formula and stochastic evolutions[J]. Communications in Mathematical Physics, 1984, 96(4):473-496.

[3] HUANG Z. Quantum white noises-White noise approach to quantum stochastic calculus [J]. Nagoya Mathematical Journal, 1993, 129:23-42.

[4] PRIVAULT N. Stochastic analysis of Bernoulli processes[J]. Probability Surveys, 2008, 5(1):435-483.

[5] WANG Caishi, LU Yanchun, CHAI Huifang. An alternative approach to Privault's discrete-time chaotic calculus[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 373(2):643-654.

[6] WANG Caishi, ZHANG Jihong. Wick analysis for Bernoulli noise functionals[J]. Journal of Function Spaces, 2014, 2014: 727341.

[7] WANG Caishi, CHEN Jinshu. Quantum Markov semigroups constructcted from quantum Bernoulli noise[J]. Journal of Mathematical Physics, 2016, 57(2):023502.

[8] REN Suling, WANG Caishi, TANG Yuling. Quantum Bernoulli noises approach to stochastic Schródinger equation of exclusion type[J]. Journal of Mathematical Physics, 2020, 61(6):063509.

[9] HAN Qi, CHEN Zhihe, LU Ziqiang. Quantum entropy in terms of local quantum Bernoulli noises and related properties[J]. Communications in Statistics: Theory and Methods, 2022, 51(12):4210-4220.

[10] 周玉兰,薛蕊,程秀强. 广义计数算子的交换性质[J]. 山东大学学报(理学版),2021,56(4):94-101.
ZHOU Yulan, XUE Rui, CHENG Xiuqiang. Commutative properties of generalized number operators [J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2021, 56(4):94-101.

[11] WANG Caishi, CHAI Huifang, LU Yanchun. Discrete-time quantum Bernoulli noises[J]. Journal of Mathematical Physics, 2010, 51(5):53528.

[12] 周玉兰,程秀强,薛蕊. 广义修正随机梯度与广义 Skorohod 积分[J]. 吉林大学学报(理学版),2020,58(3):479-485.
ZHOU Yulan, CHENG Xiuqiang, XUE Rui. Generalized modified stochastic gradient and generalized Skorohod integral[J]. Journal of Jilin University(Natural Science), 2020, 58(3):479-485.

(编辑:李艺)