山东大学学报(理学版)2025 年 1 月 第 60 卷 第 1 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.1, 2025

E-mail:xblxb@ sdu.edu.cn
http:// lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)01-0045-18　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.4.2023.0250

图片模糊集的减法和除法算子研究

孟伟伟,郑婷婷*,刘钧歌,吴孝宇
(安徽大学数学科学学院, 安徽 合肥 230601)

摘要: 针对图片模糊环境下完备的减法和除法问题, 构造加法和乘法的方程, 定义了图片模糊数(picture fuzzy numbers, PFNs)的减法和除法运算。基于距离最近导出各种情形下方程的最优解, 得出更加完备的 PFNs 的减法和除法运算法则。分析了 2 种 PFNs 算子及与加法、乘法混合运算的相关性质。将改进的 2 种算子以逐点的方式拓展到图片模糊集上,讨论了基本性质。通过算例分析验证该算子的适用性和可行性。
关键词:图片模糊集;线性规划;减法算子;除法算子;模式识别
中图分类号:TP391　　**文献标志码**:A
引用格式:孟伟伟,郑婷婷,刘钧歌,等.图片模糊集的减法和除法算子研究[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(1):45-62.

Study on subtraction and division operations over picture fuzzy sets

MENG Weiwei, ZHENG Tingting*, LIU Junge, WU Xiaoyu
(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, Anhui, China)

Abstract: Aiming at the problem of the complete subtraction and division problems under picture fuzzy environments, the subtraction and division operations of PFNs(picture fuzzy numbers, PFNs) are defined by constructing equations for addition and multiplication. Based on the nearest distances, the optimal solution of the equation is derived in various situations, and more complete subtraction and division operation algorithms are obtained. The properties of the two newly defined operators and the mixed operation of addition and multiplication are analyzed in detail. The two improved operators are extended in a pointwise manner to the picture fuzzy set, and the essential properties are discussed. The applicability and feasibility of this operator is verified through numerical analysis.
Key words: picture fuzzy set; linear programming; subtraction operation; division operation; pattern recognition

0 引言

现实生活中存在着许多复杂的不精确和不确定信息,为了定量地刻画这个问题, Zadeh[1]提出了模糊集的概念,使元素对集合的隶属程度可以取[0,1]中的任意一个数。为了处理现实生活中更复杂的问题, 许多研究者对模糊集进行了扩展, 如区间模糊集、直觉模糊集、毕达哥拉斯模糊集、广义正交模糊集等[2]。区间值模糊集是利用[0,1]上的封闭子区间来表示隶属度。直觉模糊集和毕达哥拉斯模糊集是广义正交模糊集的 2 个特殊的情形, 除了隶属度外, 还考虑了非隶属度和犹豫度 2 个维度的信息, 能更加准确地描述不确定性,但从投票模型考虑, 这些扩展理论并没有将保持中立和拒绝投票视为不同的决策态度。考虑到这 2 种情况在许多决策问题中发挥着至关重要的作用, Cuong 等[3]提出了图片模糊集(picture fuzzy sets, PFSs)的概念, 除隶属度、非隶属度和犹豫度以外, 还增加了拒绝度, 更加准确描述客观世界的模糊本质,许多研究者也将它应用于多属性决策、模式识别、医疗诊断等领域[4-7]。

收稿日期:2023-06-09;**网络出版时间**:2024-02-28 17:53:58
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61806001)
第一作者:孟伟伟(1998—), 女,硕士研究生, 研究方向为粒计算和知识发现. E-mail: mengww@ stu.ahu.edu.cn
* **通信作者**:郑婷婷(1978—), 女,教授, 博士,研究方向为粒计算和知识发现. E-mail: tt-zheng@ 163.com

此外，Cuong 也介绍了 PFSs 的一些关系的定义和基本集合运算规则，包括包含关系、并、交和补运算等，提供了构造 PFSs 的集成算子的一般框架。许多学者对它进行了拓展研究，例如：Garg[8]介绍了 PFSs 上的加权平均和几何算子；Jana 等[9]引入 PFSs 上的 Dombi 集成算子；Ullah[10]介绍了 Maclaurin symmetric mean 聚合算子等。在这些文献中，不仅提出了加法和乘法运算法则，还讨论了它们的性质；但是，这些算子在某些情况下是不完备的，所以，Wu 等[11]提出了基于严格三角范数的交互聚合算子，并且验证了该算子的完备性和实用性。须要注意的是，图片模糊数（picture fuzzy numbers，PFNs）上的减法和除法运算的研究也是至关重要的，它们对 PFSs 的理论发展和实际应用都具有重要意义。

目前，在其他模糊集上已经有了一些关于减法和除法算子的研究。Chen[12]最早先提出了在直觉模糊集减法和除法运算，且这 2 种运算是基于加法和乘法运算的方程的反褶积。Liao 等[13]、Farhadinia[14]等研究了犹豫模糊数的减法和除法运算。Gou 等[15]介绍了毕达哥拉斯模糊数的减法和除法运算。此外，Rani 等[16]通过一些新的限制条件提出了在区间中智数的减法和除法运算。Du[17]提出了改进的直觉模糊集的减法除法算子且运算时是连续且完备的，任何 2 个直觉模糊数都可以通过减法和除法来操作，但是对于 PFNs 的减法和除法运算的研究还是比较少的。结合 PFNs 的优越性，对其基本算子，包括减、除运算的研究也是很有意义的。

本文基于完备的交互聚合算子，构造方程并定义 PFNs 的减法和除法运算并讨论了相关的性质，分析了通过构造方程解出减法和除法算子，若该方程无法求精确解时，结合线性规划给出了改进的运算法则，且任何 2 个 PFNs 都可以通过该运算法则来操作，并且以逐点的方式拓展到 PFSs 上。将减法和除法算子应用到模式识别的实例中，并且与已存在的图片模糊不相似测度、距离测度、相似测度和相关系数比较，验证该算子的可行性和适用性。

1 基本概念

1.1 图片模糊集

定义 1[3] 论域 U 上的图片模糊集 A 为

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\eta_A(x),\nu_A(x)\rangle \mid x\in U\},$$

其中，$\mu_A(x)$、$\eta_A(x)$、$\nu_A(x)$ 分别称为 x 在 A 中的隶属度、犹豫度、非隶属度，满足 $\mu_A(x),\eta_A(x),\nu_A(x)\in[0,1]$，$\mu_A(x)+\eta_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1$。除此之外，$x$ 在 A 中的拒绝度记为 $\rho_A(x)=1-\mu_A(x)-\eta_A(x)-\nu_A(x)$。

记 $0_U=\{\langle x,0,0,1\rangle \mid x\in U\}$，$1_U=\{\langle x,1,0,0\rangle \mid x\in U\}$。

为方便起见，称 $\zeta=\langle\mu_\zeta,\eta_\zeta,\nu_\zeta\rangle$ 为 U 上的图片模糊数。所有 U 上的 PFNs 组成的集合用 Θ 表示，即 $\Theta=\{\zeta=\langle\mu_\zeta,\eta_\zeta,\nu_\zeta\rangle \mid \mu_\zeta,\eta_\zeta,\nu_\zeta\in[0,1],\mu_\zeta+\eta_\zeta+\nu_\zeta\leqslant 1\}$。

定义 2[3] 给定任意 2 个 PFNs，$\zeta_1=\langle\mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle$，$\zeta_2=\langle\mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle\in\Theta$，则基本算子定义如下：

(1) $\zeta_1\preceq_\Theta\zeta_2$ 当且仅当 $\mu_1\leqslant\mu_2$，$\eta_1\leqslant\eta_2$，$\nu_1\geqslant\nu_2$；

(2) $\zeta_1=\zeta_2$ 当且仅当 $\zeta_1\preceq_\Theta\zeta_2$，$\zeta_1\succeq_\Theta\zeta_2$；

(3) $\zeta_1\vee\zeta_2=\langle\max\{\mu_1,\mu_2\},\min\{\eta_1,\eta_2\},\min\{\nu_1,\nu_2\}\rangle$；

(4) $\zeta_1\wedge\zeta_2=\langle\min\{\mu_1,\mu_2\},\min\{\eta_1,\eta_2\},\max\{\nu_1,\nu_2\}\rangle$；

(5) $\zeta_1^c=\langle\nu_1,\eta_1,\mu_1\rangle$。

由于偏序集$(\Theta,\preceq_\Theta)$不构成完备格，因此 Wu 等[11]基于以下得分函数和精确函数引入了 PFNs 的可容许序数。

定义 3[11] 对任意的图片模糊数 $\zeta=\langle\mu,\eta,\nu\rangle\in\Theta$，定义 ζ 的得分函数 $S(\zeta)$、第 1 个精确函数 $H_1(\zeta)$ 和第 2 个精确函数 $H_2(\zeta)$ 分别为

$$S(\zeta)=\mu-\nu,\quad H_1(\zeta)=\mu+\nu,\quad H_2(\zeta)=\mu+\eta+\nu。$$

对任意的 $\zeta_1,\zeta_2\in\Theta$，若 $S(\zeta_1)<S(\zeta_2)$，则 $\zeta_1\prec\zeta_2$；若 $S(\zeta_1)=S(\zeta_2)$，则(a)当 $H_1(\zeta_1)<H_1(\zeta_2)$，$\zeta_1\prec\zeta_2$；(b)当 $H_1(\zeta_1)=H_1(\zeta_2)$，若 $H_2(\zeta_1)=H_2(\zeta_2)$，$\zeta_1=\zeta_2$；若 $H_2(\zeta_1)<H_2(\zeta_2)$，$\zeta_1\prec\zeta_2$。

如果 $\zeta_1\prec\zeta_2$ 或 $\zeta_1=\zeta_2$，那么用 $\zeta_1\preceq\zeta_2$ 来表示。

Wu 等[11]曾证明若 $\zeta_1 \le_{\Theta} \zeta_2$,则 $\zeta_1 \le \zeta_2$。对于任意 $\zeta \in \Theta$, 均有 $0_{\Theta}=\langle 0,0,1\rangle \le \zeta \le 1_{\Theta}=\langle 1,0,0\rangle$,$(\Theta,\le)$ 构成一个完备格。

此外, 对于 PFNs 的运算法则的研究有很多, 但其中许多法则可能无法在 Θ 中保持封闭。Wu 等[11]提出了基于严格三角模的 PFNs 的交互运算法则, 保证了 PFNs 的基本加法和乘法算子的紧密性。

定义 4[11]　设 $\zeta_1=\langle \mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle$, $\zeta_2=\langle \mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle \in \Theta$, $\lambda>0$,则:

(1) $\zeta_1 \oplus \zeta_2=\langle 1-(1-\mu_1)(1-\mu_2),(\eta_1+\nu_1)(\eta_2+\nu_2)-\nu_1\nu_2,\nu_1\nu_2\rangle$;

(2) $\zeta_1 \otimes \zeta_2=\langle \mu_1\mu_2,(\eta_1+\mu_1)(\eta_2+\mu_2)-\mu_1\mu_2,1-(1-\nu_1)(1-\nu_2)\rangle$;

(3) $\lambda\zeta_1=\langle 1-(1-\mu_1)^{\lambda},(\eta_1+\nu_1)^{\lambda}-\nu_1^{\lambda},\nu_1^{\lambda}\rangle$;

(4) $\zeta_1^{\lambda}=\langle \mu_1^{\lambda},(\eta_1+\mu_1)^{\lambda}-\mu_1^{\lambda},1-(1-\nu_1)^{\lambda}\rangle$。

定义 5[3]　定义 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 中任意 2 个图片模糊集 A 和 B 的汉明距离为

$$d(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|+|\eta_A(x_i)-\eta_B(x_i)|+|\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)|)。$$

1.2　线性规划

线性规划问题[18]是一个目标函数和约束条件均为线性的优化问题, 任意线性规划问题都可以转化为标准形式

$$\begin{aligned}&\min \quad z=\boldsymbol{cx}\\&\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{x}\geqslant 0,\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,秩为 m,$\boldsymbol{c}$ 为 n 维行向量,$\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量,向量 $\boldsymbol{b}$ 为 m 维列向量。

对于上述问题, 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 为 m 阶可逆矩阵, 相应地, 记 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x_B},\boldsymbol{x_N})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c_B},\boldsymbol{c_N})$。将标准形式进行等价变换, 则上述线性规划问题等价于下列问题:

$$\begin{aligned}&\min \quad z=cx\\&\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{x_B}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},\\ z+0\cdot \boldsymbol{x_B}+(\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{c_N})\boldsymbol{x_N}=\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{c_B}\geqslant 0,\quad \boldsymbol{c_N}\geqslant 0,\end{cases}\end{aligned}$$

式中,$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b_m})^{\mathrm{T}}$ 是 m 维列向量,$\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{c_N}=(z_{N_1}-c_{N_1},z_{N_2}-c_{N_2},\cdots,z_{N_{n-m}}-c_{N_{n-m}})$,判别式 $z_{N_j}-c_{N_j}\leqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$, $\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 是在现行基本可行解处的目标函数值。

将上述约束方程的系数置于表中, 可以构造单纯形表。结合对偶单纯形法的基本思想,下面给出基于表格形式的对偶单纯形法的计算步骤:

(1) 给定初始对偶可行的基本解,其中相应的基为 $\boldsymbol{B}$。

(2) 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$, 则停止计算, 现行对偶可行的基本解就是最优解;否则, 令 $\bar{\boldsymbol{b}}_r=\min\limits_i\{\bar{\boldsymbol{b}}_i\}<0$。

(3) 若对所有的 j,$y_{rj}\geqslant 0$, 则停止计算, 原问题无可行解;否则, 令$\dfrac{z_k-c_k}{y_{rk}}=\min\limits_j\left\{\dfrac{z_j-c_j}{y_{rj}}\,|\,y_{rj}<0\right\}$。

(4) 以 y_{rk}为主元进行高斯消元法, 返回步骤(2)。

2　PFNs 的减法和除法运算法则

本章中将减法和除法分别视为加法和乘法的逆运算, 通过构造方程解出减法和除法算子。若遇到方程无法求精确解的情况, 则结合线性规划方法, 基于距离最小原则推导出 PFNs 的减法和除法运算法则。

2.1　利用加法和乘法运算的方程

将减法运算视为加法运算的逆。对于 $\zeta_1=\langle \mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle$, $\zeta_2=\langle \mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle \in \Theta$, 研究的目标是找到未知的 $\zeta=\langle \mu,\eta,\nu\rangle \in \Theta$,使其满足 $\zeta_2\oplus\zeta=\zeta_1$。由定义 4, 有

$$\begin{cases}1-(1-\mu_2)(1-\mu)=\mu_1,\\(\eta_2+\nu_2)(\eta+\nu)-\nu_2\nu=\eta_1,\\\nu_2\nu=\nu_1,\\\mu+\eta+\nu\leqslant 1,\quad 0\leqslant\mu,\eta,\nu\leqslant 1。\end{cases}$$

求解上面的方程可以推导出 PFNs 减法运算, 给出减法运算的定义如下。

定义 6 设 $\zeta_1=\langle\mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle$, $\zeta_2=\langle\mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle$ 为 2 个 PFNs, 则减法运算定义为

$$\zeta_1-\zeta_2=\begin{cases}\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\dfrac{\nu_1}{\nu_2},\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right\rangle, & \dfrac{\nu_1}{\nu_2}\leqslant\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\leqslant\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\leqslant 1;\\\langle 0,0,1\rangle, & 其他。\end{cases}\tag{1}$$

同样地, 除法算子可通过求解满足 $\zeta_2\otimes\zeta=\zeta_1$ 的 ζ 解得, 则

$$\begin{cases}\mu_2\mu=\mu_1,\\(\eta_2+\mu_2)(\eta+\mu)-\mu_2\mu=\eta_1,\\1-(1-\nu_2)(1-\nu)=\nu_1,\\\mu+\eta+\nu\leqslant 1,\quad 0\leqslant\mu,\eta,\nu\leqslant 1。\end{cases}$$

求解上式, 推出如下的 PFNs 除法运算的定义。

定义 7 设 $\zeta_1=\langle\mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle$, $\zeta_2=\langle\mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle$ 为 2 个 PFNs, 则除法运算为

$$\zeta_1\odot\zeta_2=\begin{cases}\left\langle\dfrac{\mu_1}{\mu_2},\dfrac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}-\dfrac{\mu_1}{\mu_2},\dfrac{\nu_1-\nu_2}{1-\nu_2}\right\rangle, & \dfrac{\mu_1}{\mu_2}\leqslant\dfrac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\leqslant\dfrac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\leqslant 1;\\\langle 1,0,0\rangle, & 其他。\end{cases}\tag{2}$$

性质 1 设 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta\in\Theta$, $\lambda_1>\lambda_2>0$, $\lambda>0$, 则以下性质成立:

(1) $\zeta-0_\Theta=\zeta$, $\zeta\odot 1_\Theta=\zeta$;

(2) $\zeta-\zeta=0_\Theta$, $\zeta\odot\zeta=1_\Theta$;

(3) 若 $\zeta\neq 1_\Theta$, 则 $1_\Theta-\zeta=1_\Theta$;

(4) 若 $\zeta\neq 0_\Theta$, 则 $0_\Theta\odot\zeta=0_\Theta$;

(5) $\lambda(\zeta_1-\zeta_2)=\lambda\zeta_1-\lambda\zeta_2$, $(\zeta_1\odot\zeta_2)^\lambda=\zeta_1^\lambda\odot\zeta_2^\lambda$;

(6) $\zeta_1^c-\zeta_2^c=(\zeta_1\odot\zeta_2)^c$, $\zeta_1^c\odot\zeta_2^c=(\zeta_1-\zeta_2)^c$。

性质 2 设 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta\in\Theta$, $\lambda_1>\lambda_2>0$, 如果满足 $\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\leqslant\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\leqslant\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\leqslant 1$, 则

(1) $\lambda_1\zeta-\lambda_2\zeta=(\lambda_1-\lambda_2)\zeta$;

(2) $\zeta_2\oplus(\zeta_1-\zeta_2)=\zeta_1$;

(3) $\zeta_1-(\zeta_1-\zeta_2)=\zeta_2$;

(4) $(\zeta_1\oplus\zeta_2)-\zeta_2=\zeta_1$。

性质 3 设 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta\in\Theta,\lambda_1>\lambda_2>0$, 如果满足 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\leqslant\dfrac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\leqslant\dfrac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\leqslant 1$, 则

(1) $\zeta^{\lambda_1}\odot\zeta^{\lambda_2}=\zeta^{\lambda_1-\lambda_2}$;

(2) $\zeta_2\otimes(\zeta_1\odot\zeta_2)=\zeta_1$;

(3) $\zeta_1\odot(\zeta_1\odot\zeta_2)=\zeta_2$;

(4) $(\zeta_1\otimes\zeta_2)\odot\zeta_2=\zeta_1$。

性质 4 设 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta\in\Theta$, $\lambda_1>\lambda_2>0$, 则:

(1) $\zeta_1-\zeta_2-\zeta_3=\zeta_1-\zeta_3-\zeta_2$, 如果满足 $\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\leqslant\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\leqslant\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\leqslant 1$, $\dfrac{\nu_1}{\nu_3}\leqslant\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_3+\nu_3}\leqslant\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_3}\leqslant 1$;

(2) $\zeta_1\odot\zeta_2\odot\zeta_3=\zeta_1\odot\zeta_3\odot\zeta_2$, 如果满足 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\leqslant\dfrac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\leqslant\dfrac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\leqslant 1$, $\dfrac{\mu_1}{\mu_3}\leqslant\dfrac{\eta_1+\mu_1}{\eta_3+\mu_3}\leqslant\dfrac{1-\nu_1}{1-\nu_3}\leqslant 1$;

(3) $\zeta_3-(\zeta_1\oplus\zeta_2)=\zeta_3-\zeta_1-\zeta_2$，如果满足$\dfrac{\nu_3}{\nu_1}\leqslant\dfrac{\eta_3+\nu_3}{\eta_1+\nu_1}\leqslant\dfrac{1-\mu_3}{1-\mu_1}\leqslant 1$；

(4) $\zeta_3\odot(\zeta_1\otimes\zeta_2)=\zeta_3\odot\zeta_1\odot\zeta_2$，如果满足$\dfrac{\mu_3}{\mu_1}\leqslant\dfrac{\eta_3+\mu_3}{\eta_1+\mu_1}\leqslant\dfrac{1-\nu_3}{1-\nu_1}\leqslant 1$。

证明　利用式(1)、(2)，以上 4 组性质显然成立。

满足理想条件下，上述构造的式(1)、(2)可以处理大部分的计算问题，也可以应用到模式识别等其他领域，但是在 Θ 的限制条件下，方程并不一定能求出精确解。以下继续讨论利用线性规划来求方程的近似解。

2.2　从线性规划角度构造减除运算

本节利用线性规划并结合汉明距离推导出图片模糊数的减法和除法运算法则，并分析和讨论理想情况下的相关性质。

定义 8　设 ζ_1，$\zeta_2\in\Theta$，ζ_1 和 ζ_2 之间的减法和除法运算分别定义为

$$\zeta_1-\zeta_2=\operatorname{argmin}\ d(\zeta_2\oplus\zeta,\zeta_1),\quad \zeta_1\odot\zeta_2=\operatorname{argmin}\ d(\zeta_2\otimes\zeta,\zeta_1)。$$

对任意 $\zeta\in\Theta$，定义 $\zeta-1_\Theta=0_\Theta$，$\zeta\odot 0_\Theta=1_\Theta$。

命题 1[5]　对任意 $x\in\mathbf{R}$，存在非负数 α 和 β，使得 $x=\alpha-\beta$，$|x|=\alpha+\beta$。

定义 9　设 ζ_1，$\zeta_2\in\Theta$，则 PFN 的减法和除法运算定义为

$$\zeta_1-\zeta_2=\left\langle 0\vee\frac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\},1\wedge\frac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle; \tag{3}$$

$$\zeta_1\odot\zeta_2=\left\langle 1\wedge\frac{\mu_1}{\mu_2}\wedge\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\},0\vee\frac{\nu_1-\nu_2}{1-\nu_2}\right\rangle。 \tag{4}$$

假设在 $\vee$ 算符下$\dfrac{0}{0}\triangleq 0$，在 $\wedge$ 算符下$\dfrac{0}{0}\triangleq 1$。

这个定义是合理的。下面采用线性规划方法来说明。

设 $f(\zeta)=d(\zeta_2\oplus\zeta,\zeta_1)$，为求解 $\zeta_1-\zeta_2$ 的最优近似解，构建以下数学规划(MP1)问题：

$$(\text{MP1})\ \min f(\mu,\eta,\nu)=|\mu+\mu_2-\mu\mu_2-\mu_1|+|\eta\eta_2+\eta\nu_2+\nu\eta_2-\eta_1|+|\nu\nu_2-\nu_1|$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\mu+\eta+\nu\leqslant 1,\\ \mu,\eta,\nu\geqslant 0。\end{cases}$$

由命题 1，存在 $\alpha,\beta,m,n,\gamma,\kappa\geqslant 0$，使得

$$\begin{cases}\alpha-\beta=\mu+\mu_2-\mu\mu_2-\mu_1,\\ \alpha+\beta=|\mu+\mu_2-\mu\mu_2-\mu_1|,\\ m-n=\eta\eta_2+\eta\nu_2+\nu\eta_2-\eta_1,\\ m+n=|\eta\eta_2+\eta\nu_2+\nu\eta_2-\eta_1|,\\ \gamma-\kappa=\nu\nu_2-\nu_1,\\ \gamma+\kappa=|\nu\nu_2-\nu_1|。\end{cases}\quad 即\begin{cases}\mu=\dfrac{\alpha-\beta+\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\\ \eta=\dfrac{(m-n+\eta_1)\nu_2-(\gamma-\kappa+\nu_1)\eta_2}{(\eta_2+\nu_2)\nu_2},\\ \nu=\dfrac{\gamma-\kappa+\nu_1}{\nu_2}。\end{cases}$$

于是(MP1)问题等价于下面的规划问题：

$$(\text{MP2})\ \min z=\alpha+\beta+m+n+\gamma+\kappa$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\dfrac{\alpha-\beta+\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2}\geqslant 0,\\ \dfrac{(m-n+\eta_1)\nu_2-(\gamma-\kappa+\nu_1)\eta_2}{(\eta_2+\nu_2)\nu_2}\geqslant 0,\\ \dfrac{\gamma-\kappa+\nu_1}{\nu_2}\geqslant 0,\\ \dfrac{\alpha-\beta+\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2}+\dfrac{(m-n+\eta_1)\nu_2-(\gamma-\kappa+\nu_1)\eta_2}{(\eta_2+\nu_2)\nu_2}+\dfrac{\gamma-\kappa+\nu_1}{\nu_2}\leqslant 1,\\ \alpha,\beta,m,n,\gamma,\kappa\geqslant 0。\end{cases}$$

通过引入非负剩余变量 x_1、x_2、x_3 和松弛变量 x_4，(MP2)问题可以转换为下列标准形式：

$$
(\text{MP3})\ \min\ z=\alpha+\beta+m+n+\gamma+\kappa
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
\alpha-\beta-x_1=-\mu_1+\mu_2,\\
-m+n+x_2+\dfrac{\eta_2}{\nu_2}x_3=\eta_1,\\
-\gamma+\kappa+x_3=\nu_1,\\
(\eta_2+\nu_2)\nu_2(\alpha-\beta)+(1-\mu_2)\nu_1(m-n)+(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)(\gamma-\kappa)-(1-\mu_2)\eta_2x_3+x_4\\
\qquad=\nu_2(\eta_2+\nu_2)(\mu_2-\mu_1)+(1-\mu_2)[(\eta_2+\nu_2)(\nu_2-\nu_1)-\nu_2\eta_1],\\
\dfrac{\alpha-\beta+\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2}+\dfrac{(m-n+\eta_1)\nu_2-(\gamma-\kappa+\nu_1)\eta_2}{(\eta_2+\nu_2)\nu_2}+\dfrac{\gamma-\kappa+\nu_1}{\nu_2}\leqslant 1,\\
\alpha,\beta,m,n,\gamma,\kappa,x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0。
\end{cases}
$$

为了解决这个问题，分 2 种情形讨论。

情形 1　若 $\mu_1<\mu_2$，根据标准形式（MP3），将上述约束方程的系数置于原始表中，见表 1（本文所有表中标有下划线的值代表目标函数最优解）。由于 α、x_1、x_2、x_3、x_4 作为基本变量，将表 1 转换为正则单纯形式（见表 2），以下基于表 2 进行讨论。令 $\bar b_1=-\mu_1+\mu_2\geqslant 0$，$\bar b_2=\eta_1-\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}$，$\bar b_3=\nu_1\geqslant 0$，$\bar b_4=\nu_2(1-\mu_2)(\eta_2-\eta_1+\nu_2-\nu_1)$，$\Delta=\nu_2(\eta_2+\nu_2)(\mu_2-\mu_1)+(1-\mu_2)((\eta_2+\nu_2)(\nu_2-\nu_1)-\nu_2\eta_1)$。

表 1　$\mu_1\leqslant\mu_2$ 时的初始单纯形表

Table 1　Initial simplex tableau for $\mu_1\leqslant\mu_2$

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
α	1	−1	0	0	0	0	−1	0	0	0	$-\mu_1+\mu_2$
x_2	0	0	−1	1	0	0	0	1	$\dfrac{\eta_2}{\nu_2}$	0	η_1
x_3	0	0	0	0	−1	1	0	0	1	0	ν_1
x_4	$\nu_2\cdot(\eta_2+\nu_2)$	$-\nu_2\cdot(\eta_2+\nu_2)$	$\nu_2\cdot(1-\mu_2)$	$-\nu_2\cdot(1-\mu_2)$	$(1-\mu_2)\cdot(\eta_2+\nu_2)$	$-(1-\mu_2)\cdot(\eta_2+\nu_2)$	0	0	$-\eta_2\cdot(1-\mu_2)$	1	Δ
判别数	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	$\underline{0}$

表 2　$\mu_1\leqslant\mu_2$ 时的正则单纯形表

Table 2　Canonical simplex tableau for $\mu_1\leqslant\mu_2$

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
α	1	−1	0	0	0	0	−1	0	0	0	$-\mu_1+\mu_2$
x_2	0	0	−1	1	$\dfrac{\eta_2}{\nu_2}$	$-\dfrac{\eta_2}{\nu_2}$	0	1	0	0	$\eta_1-\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}$
x_3	0	0	0	0	−1	1	0	0	1	0	ν_1
x_4	0	0	$\nu_2\cdot(1-\mu_2)$	$-\nu_2\cdot(1-\mu_2)$	$\nu_2\cdot(1-\mu_2)$	$-\nu_2\cdot(1-\mu_2)$	$\nu_2\cdot(\eta_2+\nu_2)$	0	0	1	$\nu_2(1-\mu_2)(\eta_2-\eta_1+\nu_2-\nu_1)$
判别数	0	−2	−1	−1	−1	−1	−1	0	0	0	$\underline{-\mu_1+\mu_2}$

情形 1.1　若 $\bar b_2\geqslant 0,\bar b_4\geqslant 0$，即右端列 $\boldsymbol{b}=(\bar b_1,\bar b_2,\bar b_3,\bar b_4)^{\mathrm T}\geqslant 0$，则现行基本解是最优基本可行解，可知 $(-\mu_1+\mu_2,0,0,0,0,0)^{\mathrm T}$ 是（MP3）的最优解，其目标函数值为 $-\mu_1+\mu_2$，可得 $\left\langle 0,\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\dfrac{\nu_1}{\nu_2},\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right\rangle$ 是（MP1）的最优解。

当 $\nu_2(1-\mu_2)(\eta_2-\eta_1+\nu_2-\nu_1)\geqslant 0$，$\mu_1<\mu_2$，$\eta_1-\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\geqslant 0$ 时，$\zeta_1-\zeta_2=\left\langle 0,\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\dfrac{\nu_1}{\nu_2},\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right\rangle$。

情形 1.2　若 $\bar b_2<0,\bar b_4\geqslant 0$，则 m 代替 x_2 作为基本变量，即以表 2 的 y_{23}（$=-1$）为主元进行主元消去，见表 3。

表 3　以表 2 的 y_{23} 为主元消去获得的单纯形表

Table 3　The simplex tableau obtained by removing the pivot element y_{23} from table 2

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
α	1	−1	0	0	0	0	−1	0	0	0	$-\mu_1+\mu_2$
x_2	0	0	1	−1	$-\dfrac{\eta_2}{\nu_2}$	$\dfrac{\eta_2}{\nu_2}$	0	−1	0	0	$\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}-\eta_1$
x_3	0	0	0	0	−1	1	0	0	1	0	ν_1
x_4	0	0	0	0	$(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_2)$	$-(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_2)$	$\nu_2\cdot(\eta_2+\nu_2)$	$(1-\mu_2)\nu_2$	0	1	$(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)(\nu_2-\nu_1)$
判别数	0	−2	0	−2	$-1-\dfrac{\eta_2}{\nu_2}$	$-1+\dfrac{\eta_2}{\nu_2}$	−1	−1	0	0	$\underline{\dfrac{(-\mu_1+\mu_2)\nu_2+\eta_2\nu_1-\eta_1\nu_2}{\nu_2}}$

当 $\nu_2-\nu_1\geqslant 0$ 时,即右端列 $\boldsymbol{b}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,则现行基本解是最优基本可行解。(MP3)的最优解是$(-\mu_1+\mu_2,0,\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}-\eta_1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,此时,$\langle 0,0,\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\rangle$是(MP1)的最优解。

当 $\nu_2-\nu_1<0$ 时,则 κ 代替 x_4 作为基本变量,即以表 3 的 $y_{46}(=-(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_2))$为主元进行主元消去,见表 4。根据表 4,无论 $\eta_2-\eta_1\geqslant 0$ 还是 $\eta_2-\eta_1<0$,均可得$\langle 0,0,1\rangle$为(MP1)的最优解。

表 4　以表 3 的 y_{46}为主元消去获得的单纯形表

Table 4　The simplex tableau obtained by removing the pivot element y_{46} from table 3

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
α	1	−1	0	0	0	0	−1	0	0	0	$-\mu_1+\mu_2$
m	0	0	1	−1	0	0	$\dfrac{\eta_2}{1-\mu_2}$	$-1+\dfrac{\eta_2}{\eta_2+\nu_2}$	0	$\dfrac{\eta_2}{(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)\nu_2}$	$\eta_2-\eta_1$
x_3	0	0	0	0	0	0	$\dfrac{\nu_2}{1-\mu_2}$	$\dfrac{\nu_2}{\eta_2+\nu_2}$	1	$\dfrac{1}{(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)}$	ν_2
κ	0	0	0	0	−1	1	$-\dfrac{\nu_2}{1-\mu_2}$	$-\dfrac{\nu_2}{\eta_2+\nu_2}$	0	$-\dfrac{1}{(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)}$	$\nu_1-\nu_2$
判别数	0	−2	0	−2	−2	0	$-1-\dfrac{\nu_2-\eta_2}{1-\mu_2}$	$-1-\dfrac{\nu_2-\eta_2}{\eta_2+\nu_2}$	0	$\dfrac{\nu_2-\eta_2}{\nu_2(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)}$	$\underline{\mu_2-\mu_1+\eta_2-\eta_1+\nu_1-\nu_2}$

因此,当 $\nu_2(1-\mu_2)(\eta_2-\eta_1+\nu_2-\nu_1)\geqslant 0$, $\mu_1<\mu_2,\eta_1-\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}<0$ 时,$\zeta_1-\zeta_2=\langle 0,0,1\wedge\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\rangle$。

情形 1.3　若 $\bar{b}_2\geqslant 0$, $\bar{b}_4<0$, 取 y_{44}是主元, 意味着 n 代替 x_4 成为基底, 即以表 2 的 $y_{44}(=-\nu_2\cdot(1-\mu_2))$为主元进行主元消去构造了表 5。

表 5　以表 2 的 y_{44}为主元消去获得的单纯形表

Table 5　The simplex tableau obtained by removing the pivot element y_{44} from table 2

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
α	1	−1	0	0	0	0	−1	0	0	0	$-\mu_1+\mu_2$
x_2	0	0	0	0	$1+\dfrac{\eta_2}{\nu_2}$	$-\left(1+\dfrac{\eta_2}{\nu_2}\right)$	$\dfrac{\eta_2+\nu_2}{1-\mu_2}$	1	0	$\dfrac{1}{(1-\mu_2)\nu_2}$	$\left(1+\dfrac{\eta_2}{\nu_2}\right)(\nu_2-\nu_1)$
x_3	0	0	0	0	−1	1	0	0	1	0	ν_1
n	0	0	−1	1	−1	1	$-\dfrac{\eta_2+\nu_2}{1-\mu_2}$	0	0	$-\dfrac{1}{(1-\mu_2)\nu_2}$	$\nu_1-\nu_2+\eta_1-\eta_2$
判别数	0	−2	−2	0	−2	0	$-1-\dfrac{\nu_2+\eta_2}{1-\mu_2}$	0	0	$-\dfrac{1}{\nu_2(1-\mu_2)}$	$\underline{\mu_2-\mu_1+\eta_1-\eta_2+\nu_1-\nu_2}$

当 $\nu_2-\nu_1\geqslant 0$ 时,即右端列 $\boldsymbol{b}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,则现行基本解是最优基本可行解,所以(MP3)的最优解是$(\mu_2-\mu_1,0,0,\nu_1-\nu_2+\eta_1-\eta_2,0,0)^{\mathrm{T}}$,此时(MP1)的最优解为$\langle 0,1-\dfrac{\nu_1}{\nu_2},\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\rangle$。

当 $\nu_2-\nu_1<0$ 时,则 κ 代替 x_2 作为基本变量,即以表 5 的 $y_{26}(=-(1+\dfrac{\eta_2}{\nu_2}))$为主元进行主元消去,构造了表 6。根据表 6,无论 $\eta_2-\eta_1\geqslant 0$ 或 $\eta_2-\eta_1<0$,(MP1)的最优解都是$\langle 0,0,1\rangle$。

因此,当 $\nu_2(1-\mu_2)(\eta_2-\eta_1+\nu_2-\nu_1)<0,\mu_1<\mu_2,\eta_1-\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\geqslant 0$ 时,$\zeta_1-\zeta_2=\langle 0,0\vee(1-\dfrac{\nu_1}{\nu_2}),1\wedge\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\rangle$。

情形 1.4　若 $\bar{b}_2<0$, $\bar{b}_4<0$, 令 $\bar{b}_r=\min\limits_i\{\bar{b}_i\}<0$, $r=2$ 时, 返回表 3, $\boldsymbol{b}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$, (MP1)的最优解是 0,0,1$\rangle$。$r=4$ 时, 返回表 5,$\boldsymbol{b}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,(MP1)的最优解仍是$\langle 0,0,1\rangle$,因此,当 $\nu_2(1-\mu_2)(\eta_2-\eta_1+\nu_2-\nu_1)<0,\mu_1<\mu_2,\eta_1-\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}<0$ 时, $\zeta_1-\zeta_2=\langle 0,0,1\rangle$。

情形 2　若 $\mu_1\geqslant\mu_2$, 根据(MP3), 将上述约束方程的系数置于单纯形表中,构造表 7。x_1,x_2,x_3,x_4 作为基本变量,将表 7 转换为正则单纯形表 8,令 $\bar{b}_1=\mu_1-\mu_2\geqslant 0$, $\bar{b}_2=\eta_1-\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}$, $\bar{b}_3=\nu_1\geqslant 0$, $\bar{b}_4=\nu_2[(\eta_2+\nu_2)(1-$

$\mu_1)-(\eta_1+\nu_1)(1-\mu_2)]$。

表 6 以表 5 的 y_{26} 为主元消去获得的单纯形表

Table 6 The simplex tableau obtained by removing the pivot element y_{26} from table 5

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
α	1	−1	0	0	0	0	−1	0	0	0	$-\mu_1+\mu_2$
κ	0	0	0	0	−1	1	$-\frac{\nu_2}{1-\mu_2}$	$-\frac{\nu_2}{\eta_2+\mu_2}$	0	$-\frac{1}{(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)}$	$\nu_1-\nu_2$
x_3	0	0	0	0	0	0	$\frac{\nu_2}{1-\mu_2}$	$\frac{\nu_2}{\eta_2+\nu_2}$	1	$\frac{1}{(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)}$	ν_2
n	0	0	−1	1	0	0	$-\frac{\eta_2}{1-\mu_2}$	$\frac{\nu_2}{\eta_2+\mu_2}$	0	$\frac{-\eta_2}{\nu_2(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)}$	$\eta_1-\eta_2$
判别数	0	−2	−2	0	−2	0	$-1-\frac{\nu_2+\eta_2}{1-\mu_2}$	0	0	$-\frac{1}{\nu_2(1-\mu_2)}$	$\underline{\mu_2-\mu_1+\eta_1-\eta_2+\nu_1-\nu_2}$

表 7 $\mu_1>\mu_2$ 时的初始单纯形表

Table 7 Initial simplex tableau for $\mu_1>\mu_2$

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
x_1	−1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	$\mu_1-\mu_2$
x_2	0	0	−1	1	0	0	0	1	$\frac{\eta_2}{\nu_2}$	0	η_1
x_3	0	0	0	0	−1	1	0	0	1	0	ν_1
x_4	$\nu_2\cdot(\eta_2+\nu_2)$	$-\nu_2(\eta_2+\nu_2)$	$\nu_2(1-\mu_2)$	$-\nu_2(1-\mu_2)$	$(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)$	$-(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)$	0	0	$-\eta_2\cdot(1-\mu_2)$	1	Δ
判别数	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	$\underline{0}$

注:$\Delta=\nu_2(\eta_2+\nu_2)(\mu_2-\mu_1)+(1-\mu_2)[(\eta_2+\nu_2)(\nu_2-\nu_1)-\nu_2\eta_1]$。

表 8 $\mu_1>\mu_2$ 时的正则单纯形表

Table 8 Canonicalsimplex tableau for $\mu_1>\mu_2$

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
x_1	−1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	$\mu_1-\mu_2$
x_2	0	0	−1	1	$\frac{\eta_2}{\nu_2}$	$-\frac{\eta_2}{\nu_2}$	0	1	0	0	$\eta_1-\eta_2\frac{\nu_1}{\nu_2}$
x_3	0	0	0	0	−1	1	0	0	1	0	ν_1
x_4	$\nu_2(\eta_2+\nu_2)$	$-\nu_2(\eta_2+\nu_2)$	$\nu_2(1-\mu_2)$	$-\nu_2(1-\mu_2)$	$\nu_2(1-\mu_2)$	$-\nu_2(1-\mu_2)$	0	0	0	1	$\nu_2[(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_1)-(\eta_1+\nu_1)(1-\mu_2)]$
判别数	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	$\underline{0}$

情形 2.1 若 $\bar{b}_2\geqslant 0$, $\bar{b}_4\geqslant 0$, 即右端列 $\boldsymbol{b}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,则现行基本解是最优基本可行解。观察可知(MP3)的最优解是$(0,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 且相应的目标函数值为 0,所以,$\langle\frac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2},\frac{\nu_1}{\nu_2}\rangle$ 是(MP1)的最优可行解。

当 $\nu_2[(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_1)-(\eta_1+\nu_1)(1-\mu_2)]\geqslant 0$, $\mu_1\geqslant\mu_2$, $\eta_1-\eta_2\frac{\nu_1}{\nu_2}\geqslant 0$, $\zeta_1-\zeta_2=\langle\frac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2},\frac{\nu_1}{\nu_2}\rangle$。

情形 2.2 若 $\bar{b}_2<0$, $\bar{b}_4\geqslant 0$, 则用 m 代替 x_2 作为基本变量, 即以表 8 的 $y_{23}(=-1)$ 为主元进行主元消去, 得到了表 9。

表 9 以表 8 的 y_{23} 为主元消去获得的单纯形表

Table 9 The simplex tableau obtained by removing the pivot element y_{23} from table 8

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
x_1	−1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	$\mu_1-\mu_2$
m	0	0	1	−1	$-\frac{\eta_2}{\nu_2}$	$\frac{\eta_2}{\nu_2}$	0	−1	0	0	$\eta_2\frac{\nu_1}{\nu_2}-\eta_1$
x_3	0	0	0	0	−1	1	0	0	1	0	ν_1
x_4	$\nu_2(\eta_2+\nu_2)$	$-\nu_2\cdot(\eta_2+\nu_2)$	0	0	$(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_2)$	$-(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_2)$	0	$\nu_2(1-\mu_2)$	0	1	$(\eta_2+\nu_2)[\nu_2(1-\mu_1)-\nu_1(1-\mu_2)]$
判别数	−1	−1	0	−2	$-1-\frac{\eta_2}{\nu_2}$	$-1+\frac{\eta_2}{\nu_2}$	0	−1	0	0	$\underline{\eta_2\frac{\nu_1}{\nu_2}-\eta_1}$

当$(\eta_2+\nu_2)[\nu_2(1-\mu_1)-\nu_1(1-\mu_2)]\geqslant 0$时,即右端列$\boldsymbol{b}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,所以(MP3)的最优解和对应的目标函数值为$\left(\mu_1-\mu_2,0,\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}-\eta_1,0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$和$\mu_1-\mu_2$,此时(MP1)的最优解为$\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},0,\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right\rangle$。

当$(\eta_2+\nu_2)[\nu_2(1-\mu_1)-\nu_1(1-\mu_2)]<0$时,用$\kappa$代替$x_4$作为基本变量,即以表 9 的$y_{46}(=-(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_2))$为主元进行主元消去,得到表 10。根据表 10,$\eta_2\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\eta_1\geqslant 0$或$\eta_2\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\eta_1<0$,均可得到(MP1)的最优解是$\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},0,\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$。

表 10　以表 9 的 y_{46} 为主元消去获得的单纯形表

Table 10　The simplex tableau obtained by removing the pivot element y_{46} from table 9

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
x_1	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	$\mu_1-\mu_2$
m	$\dfrac{\eta_2}{1-\mu_2}$	$-\dfrac{\eta_2}{1-\mu_2}$	1	-1	0	0	0	$\dfrac{\nu_2}{\eta_2+\nu_2}$	0	$\dfrac{\eta_2}{2\nu_2(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_2)}$	$\eta_2\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\eta_1$
x_3	$\dfrac{\nu_2}{1-\mu_2}$	$-\dfrac{\nu_2}{1-\mu_2}$	0	0	0	0	0	$\dfrac{\nu_2}{\eta_2+\nu_2}$	1	$\dfrac{1}{(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_2)}$	$\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\nu_2$
κ	$-\dfrac{\nu_2}{1-\mu_2}$	$\dfrac{\nu_2}{1-\mu_2}$	0	0	-1	1	0	$-\dfrac{\nu_2}{\eta_2+\nu_2}$	0	$-\dfrac{1}{(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_2)}$	$\nu_1-\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\nu_2$
判别数	$-1-\dfrac{\nu_2-\eta_2}{1-\mu_2}$	$-1+\dfrac{\nu_2-\eta_2}{1-\mu_2}$	0	-2	-2	0	0	$-1-\dfrac{\nu_2-\eta_2}{\eta_2+\nu_2}$	0	$-\dfrac{\nu_2-\eta_2}{\nu_2(1-\mu_2)(\eta_2+\nu_2)}$	$\dfrac{(\nu_1-\eta_1)(1-\mu_2)+(\eta_2-\nu_2)(1-\mu_1)}{1-\mu_2}$

当$\nu_2[(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_1)-(\eta_1+\nu_1)(1-\mu_2)]\geqslant 0$, $\mu_1\geqslant\mu_2$, $\eta_1-\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}<0$时, $\zeta_1-\zeta_2=\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},0,\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$。

情形 2.3　若$\bar{b}_2\geqslant 0,\bar{b}_4<0$,根据$y_{44}$为主元, 意味着$x_4$替换$n$作为基本变量, 即以表 8 的$y_{44}(=-\nu_2(1-\mu_2))$为主元进行主元消去给出了表 11。

表 11　以表 8 的 y_{44} 为主元消去获得的单纯形表

Table 11　The simplex tableau obtained by removing the pivot element y_{44} from table 8

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
x_1	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	$\mu_1-\mu_2$
x_2	$\dfrac{\eta_2+\nu_2}{1-\mu_2}$	$-\dfrac{\eta_2+\nu_2}{1-\mu_2}$	0	0	$1+\dfrac{\eta_2}{\nu_2}$	$-1-\dfrac{\eta_2}{\nu_2}$	0	1	0	$\dfrac{1}{\nu_2(1-\mu_2)}$	$(\eta_2+\nu_2)\left(\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)$
x_3	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0	ν_1
n	$-\dfrac{\eta_2+\nu_2}{1-\mu_2}$	$\dfrac{\eta_2+\nu_2}{1-\mu_2}$	-1	1	-1	1	0	0	0	$-\dfrac{1}{\nu_2(1-\mu_2)}$	$\eta_1+\nu_1-\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}(\eta_2+\nu_2)$
判别数	$-1-\dfrac{\eta_2+\nu_2}{1-\mu_2}$	$-1+\dfrac{\eta_2+\nu_2}{1-\mu_2}$	-2	0	-2	0	0	0	0	$-\dfrac{1}{\nu_2(1-\mu_2)}$	$\eta_1+\nu_1-\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}(\eta_2+\nu_2)$

当$\dfrac{\nu_1}{\nu_1}\leqslant\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}$时,(MP3)的最优解和(MP1)的最优解分别是$\left(0,0,0,\eta_1+\nu_1-(\eta_2+\nu_2)\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$与$\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\dfrac{\nu_1}{\nu_1},\dfrac{\nu_1}{\nu_1}\right\rangle$。

当$\dfrac{\nu_1}{\nu_1}>\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}$时,选择以表 11 的$y_{26}\left(=-1-\dfrac{\eta_2}{\nu_2}\right)$为主元做主元消去法,即用$\kappa$代替$x_2$作为基本变量,见表 12。根据表 12,$\eta_1-\eta_2\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\geqslant 0$或者$\eta_1-\eta_2\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}<0$,(MP1)的最优解都是$\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},0,\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$。

当$\nu_2[(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_1)-(\eta_1+\nu_1)(1-\mu_2)]<0$, $\mu_1\geqslant\mu_2$,$\eta_1-\eta_2\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\geqslant 0$时, $\zeta_1-\zeta_2=\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},0\vee\left(\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right),\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$。

表 12　以表 11 的 y_{26} 为主元消去获得的单纯形表

Table 12　The simplex tableau obtained by removing the pivot element y_{26} from table 11

基变量列	α	β	m	n	γ	κ	x_1	x_2	x_3	x_4	基解列 $\boldsymbol{b}$
x_1	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	$\mu_1-\mu_2$
κ	$-\frac{\nu_2}{1-\mu_2}$	$\frac{\nu_2}{1-\mu_2}$	0	0	-1	1	0	$-\frac{\nu_2}{\eta_2+\mu_2}$	0	$-\frac{1}{(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_2)}$	$-\nu_2\left(\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)$
x_3	$\frac{\nu_2}{1-\mu_2}$	$-\frac{\nu_2}{1-\mu_2}$	0	0	0	0	0	$\frac{\nu_2}{\eta_2+\mu_2}$	1	$\frac{1}{(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_2)}$	$\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\nu_2$
n	$-\frac{\eta_2}{1-\mu_2}$	$\frac{\eta_2}{1-\mu_2}$	-1	1	0	0	0	$\frac{\nu_2}{\eta_2+\mu_2}$	0	$-\frac{1}{\nu_2(1-\mu_2)}$	$\eta_1-\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\eta_2$
判别数	$-1-\frac{\eta_2+\nu_2}{1-\mu_2}$	$-1+\frac{\eta_2+\nu_2}{1-\mu_2}$	-2	0	-2	0	0	0	0	$-\frac{1}{\nu_2(1-\mu_2)}$	$\eta_1+\nu_1-\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}(\eta_2+\nu_2)$

情形 2.4　若 $\bar{b}_2<0$，$\bar{b}_4<0$，令 $\bar{b}_r=\min\limits_i\{\bar{b}_i\}<0$，取 $r=2$ 时，返回表 9，此时 $\boldsymbol{b}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，(MP1) 的最优解是 $\left\langle\frac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},0,\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$。取 $r=4$ 时，返回表 12，此时 $\boldsymbol{b}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，(MP1) 的最优解是 $\left\langle\frac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},0,\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$。

当 $\nu_2[(\eta_2+\nu_2)(1-\mu_1)-(\eta_1+\nu_1)(1-\mu_2)]<0,\mu_1\geqslant\mu_2,\eta_1-\eta_2\frac{\nu_1}{\nu_2}<0$ 时，$\zeta_1-\zeta_2=\left\langle\frac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},0,\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$。

综上所述情形，定义 9 是合理的。

例 1　设 $\zeta=\langle 0.4,0.2,0.3\rangle$，$\zeta_1=\langle 0.5,0.1,0.2\rangle$，$\zeta_2=\langle 0.1,0.4,0.5\rangle$，$\zeta_3=\langle 0.3,0.1,0.5\rangle$，则

$$\zeta-\zeta_1=\langle 0,0,1\rangle,\quad \zeta\odot\zeta_1=\langle 0.8,0.075,0.125\rangle,\quad \zeta-\zeta_2=\langle 0.33,0,0.6\rangle,$$
$$\zeta\odot\zeta_2=\langle 1,0,0\rangle,\quad \zeta-\zeta_3=\langle 0.14,0.23,0.60\rangle,\quad \zeta\odot\zeta_3=\langle 1,0,0\rangle。$$

性质 5　设 $\zeta\in\Theta$，则下面的性质成立：

(1) $\zeta-0_\Theta=\zeta$，$\zeta\odot 1_\Theta=\zeta$；

(2) $\zeta-\zeta=0_\Theta$，$\zeta\odot\zeta=1_\Theta$；

(3) 若 $\zeta\neq 1_\Theta$，则 $1_\Theta-\zeta=1_\Theta$；

(4) 若 $\zeta\neq 0_\Theta$，则 $0_\Theta\odot\zeta=0_\Theta$。

证明　根据定义 9 可知这些性质是显然的。

性质 6　设 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta\in\Theta$，$\lambda>0$，$\lambda_1>\lambda_2>0$，则：

(1) $\lambda(\zeta_1-\zeta_2)=\lambda\zeta_1-\lambda\zeta_2$；(2) $(\zeta_1\odot\zeta_2)^\lambda=\zeta_1^\lambda\odot\zeta_2{}^\lambda$；

(3) $\lambda_1\zeta-\lambda_2\zeta=(\lambda_1-\lambda_2)\zeta$；(4) $\zeta^{\lambda_1}\odot\zeta^{\lambda_2}=\zeta^{\lambda_1-\lambda_2}$；

(5) $(\zeta_1\oplus\zeta_2)-\zeta_2\leqslant\zeta_1$；(6) $(\zeta_1\otimes\zeta_2)\odot\zeta_2\geqslant\zeta_1$；

(7) $\zeta_1^{\mathrm{c}}-\zeta_2^{\mathrm{c}}=(\zeta_1\odot\zeta_2)^{\mathrm{c}}$；(8) $\zeta_1^{\mathrm{c}}\odot\zeta_2{}^{\mathrm{c}}=(\zeta_1-\zeta_2)^{\mathrm{c}}$。

证明　(1) $\lambda\zeta_1=\langle 1-(1-\mu_1)^\lambda,(\eta_1+\nu_1)^\lambda-\nu_1^\lambda,\nu_1^\lambda\rangle$，$\lambda\zeta_2=\langle 1-(1-\mu_2)^\lambda,(\eta_2+\nu_2)^\lambda-\nu_2{}^\lambda,\nu_2{}^\lambda\rangle$，则

$$\lambda\zeta_1-\lambda\zeta_2=\left\langle 0\vee\frac{(1-\mu_2)^\lambda-(1-\mu_1)^\lambda}{(1-\mu_2)^\lambda},\left\{0\vee\left(\left(\frac{(\eta_1+\nu_1)^\lambda}{(\eta_2+\nu_2)^\lambda}-\frac{\nu_1{}^\lambda}{\nu_2{}^\lambda}\right)\right\}\wedge\right.\right.$$
$$\left.\left\{0\vee\left(1-\frac{\nu_1{}^\lambda}{\nu_2{}^\lambda}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{(1-\mu_1)^\lambda}{(1-\mu_2)^\lambda}-\frac{\nu_1{}^\lambda}{\nu_2{}^\lambda}\right)\right\},1\wedge\frac{\nu_1{}^\lambda}{\nu_2{}^\lambda}\wedge\frac{(1-\mu_1)^\lambda}{(1-\mu_2)^\lambda}\right\rangle,$$

$$\lambda(\zeta_1-\zeta_2)=\lambda\left\langle 0\vee\frac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\},1\wedge\frac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$$
$$=\left\langle 1-\left(1-0\vee\frac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2}\right)^\lambda,\left(\left\{0\vee\left(\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\}+1\wedge\frac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right)^\lambda\right.$$
$$\left.-\left(1\wedge\frac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right)^\lambda,\left(1\wedge\frac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right)^\lambda\right\rangle,$$

根据比较计算可知，$\lambda(\zeta_1-\zeta_2)=\lambda\zeta_1-\lambda\zeta_2$。

(2) 由性质(1)同理可证。

(3) 由$(\lambda_1-\lambda_2)\zeta=\langle 1-(1-\mu)^{\lambda_1-\lambda_2},(\eta+\nu)^{\lambda_1-\lambda_2}-\nu^{\lambda_1-\lambda_2},\nu^{\lambda_1-\lambda_2}\rangle$,

$$\lambda_1\zeta-\lambda_2\zeta=\left\langle 0\vee\frac{(1-\mu)^{\lambda_2}-(1-\mu)^{\lambda_1}}{(1-\mu)^{\lambda_2}},\left\{0\vee\left(\frac{(\eta+\nu)^{\lambda_1}}{(\eta+\nu)^{\lambda_2}}-\frac{\nu^{\lambda_1}}{\nu^{\lambda_2}}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\nu^{\lambda_1}}{\nu^{\lambda_2}}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{(1-\mu)^{\lambda_1}}{(1-\mu)^{\lambda_2}}-\frac{\nu^{\lambda_1}}{\nu^{\lambda_2}}\right)\right\},\right.$$

$$\left.1\wedge\frac{\nu^{\lambda_1}}{\nu^{\lambda_2}}\wedge\frac{(1-\mu)^{\lambda_1}}{(1-\mu)^{\lambda_2}}\right\rangle=\langle 1-(1-\mu)^{\lambda_1-\lambda_2},(\eta+\nu)^{\lambda_1-\lambda_2}-\nu^{\lambda_1-\lambda_2},\nu^{\lambda_1-\lambda_2}\rangle,$$

所以可证 $\lambda_1\zeta-\lambda_2\zeta=(\lambda_1-\lambda_2)\zeta$。

(4) 由性质(3)同理可证。

(5) 若 $\zeta_1=\langle 0,0,1\rangle$，则$(\zeta_1\oplus\zeta_2)-\zeta_2=\zeta_2-\zeta_2=\langle 0,0,1\rangle=\zeta_1$。

若 $\zeta_1=\langle 0,0,1\rangle$,则$(\zeta_1\oplus\zeta_2)-\zeta_2=\begin{cases}\langle 0,0,1\rangle, & \zeta_2=\langle 1,0,0\rangle,\\ \langle 1,0,0\rangle, & \zeta_2\neq\langle 1,0,0\rangle,\end{cases}\preceq\zeta_1$。

若$\langle 0,0,1\rangle\prec\zeta_1\prec\langle 1,0,0\rangle$，即满足 $0\leqslant\mu_1<1$，$0\leqslant\nu_1<1$，则:当 $\nu_2=0,\mu_1=0$，$0\leqslant\nu_1<1$，$(\zeta_1\oplus\zeta_2)-\zeta_2=\langle\mu_2,(\eta_1+\nu_1)\eta_2,0\rangle-\langle\mu_2,\eta_2,0\rangle=\langle 0,0,1\rangle\prec\zeta_1$;当 $0<\nu_2\leqslant 1,\mu_1=0$，$0\leqslant\nu_1<1$，则$(\zeta_1\oplus\zeta_2)-\zeta_2=\langle\mu_2,(\eta_1+\nu_1)(\eta_2+\nu_2)-\nu_1\nu_2,\nu_1\nu_2\rangle-\langle\mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle=\langle 0,\eta_1,\nu_1\rangle=\zeta_1$;当 $0\leqslant\mu_2<1$，$\nu_2=0$，$0<\mu_1<1$，则$(\zeta_1\oplus\zeta_2)-\zeta_2=\langle\mu_1+\mu_2-\mu_1\mu_2,(\eta_1+\nu_1)\eta_2,0\rangle-\langle\mu_2,\eta_2,0\rangle=\langle\mu_1,0,1-\mu_1\rangle\prec\zeta_1$;当 $\mu_2=1$，$\nu_2=0$，$0<\mu_1<1$,则$(\zeta_1\oplus\zeta_2)-\zeta_2=\langle 1,0,0\rangle-\langle 1,0,0\rangle=\langle 0,0,1\rangle\prec\zeta_1$;当 $0<\nu_2\leqslant 1$，$0<\mu_1<1$，则$(\zeta_1\oplus\zeta_2)-\zeta_2=\langle\mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle=\zeta_1$。

综上所述,可证$(\zeta_1\oplus\zeta_2)-\zeta_2\prec\zeta_1$。

(6) 由性质(5)同理可证。

(7) $\zeta_1^c-\zeta_2^c=\langle\nu_1,\eta_1,\mu_1\rangle-\langle\nu_2,\eta_2,\mu_2\rangle$

$$=\left\langle 0\vee\frac{\nu_1-\nu_2}{1-\nu_2},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\},1\wedge\frac{\mu_1}{\mu_2}\wedge\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\right\rangle,$$

$$(\zeta_1\odot\zeta_2)^c=\left\langle 0\vee\frac{\nu_1-\nu_2}{1-\nu_2},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\},1\wedge\frac{\mu_1}{\mu_2}\wedge\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\right\rangle,$$

所以 $\zeta_1^c-\zeta_2^c=(\zeta_1\odot\zeta_2)^c$。

(8) 由性质(7)同理可证。

由于 PFNs 须要综合考虑隶属度、非隶属度和犹豫度,因此在处理形式复杂的公式时,考虑设定一些理想条件,在满足给定的前提条件下,考虑图片模糊数的各种运算性质。

设 $\zeta_i=\langle\mu_i,\eta_i,\nu_i\rangle$，$\zeta_j=\langle\mu_j,\eta_j,\nu_j\rangle\in\Theta$,则令 $\alpha^{(-ij)}=1\wedge\dfrac{1-\mu_i}{1-\mu_j}$，$\gamma^{(-ij)}=\nu_i\vee\nu_j\vee\dfrac{\nu_i(1-\mu_j)}{1-\mu_i}$,$\beta^{(\odot ij)}=1\wedge\dfrac{1-\mu_i}{1-\mu_j}\wedge\left\{\dfrac{\nu_i}{\nu_j}\vee\dfrac{\eta_i+\nu_i}{\eta_j+\nu_j}\right\}$，$\delta^{(\odot ij)}=1\wedge\dfrac{\nu_i}{\nu_j}\wedge\dfrac{1-\mu_i}{1-\mu_j}$，$\alpha^{(\odot ij)}=1\wedge\dfrac{\mu_i}{\mu_j}\wedge\dfrac{1-\nu_i}{1-\nu_j}$，$\gamma^{(\odot ij)}=\mu_i\vee\mu_j\vee\dfrac{\mu_i(1-\nu_j)}{1-\nu_i}$,$\beta^{(\odot ij)}=1\wedge\dfrac{1-\nu_i}{1-\nu_j}\wedge\left\{\dfrac{\mu_i}{\mu_j}\vee\dfrac{\eta_i+\mu_i}{\eta_j+\mu_j}\right\}$，$\delta^{(\odot ij)}=1\wedge\dfrac{1-\nu_i}{1-\nu_j}$。

性质 7　设 $\zeta_1,\zeta_2\in\Theta$，则:

(1) $\zeta_2\oplus(\zeta_1-\zeta_2)\succeq\zeta_1$，如果满足

$$(\eta_2+\nu_2)\beta^{(\odot 12)}-\nu_1\wedge\nu_2\wedge\frac{\nu_2(1-\mu_1)}{1-\mu_2}\geqslant\eta_1;$$

(2) $\zeta_2\otimes(\zeta_1\odot\zeta_2)\preceq\zeta_1$，如果满足

$$(\eta_2+\mu_2)\beta^{(\odot 12)}-\mu_1\wedge\mu_2\wedge\frac{\mu_2(1-\nu_1)}{1-\nu_2}\leqslant\eta_1;$$

(3) $\zeta_1-(\zeta_1-\zeta_2)\preceq\zeta_2$，如果满足

$$\left\{0\vee\left(\frac{\eta_1+\nu_1}{\beta^{(\odot 12)}}-\gamma^{(\odot 12)}\right)\right\}\wedge\{0\vee(1-\gamma^{(\odot 12)})\}\wedge\{0\vee((1-\mu_1)\vee(1-\mu_2)-\gamma^{(\odot 12)})\}\leqslant\eta_2;$$

(4) $\zeta_1\odot(\zeta_1\odot\zeta_2)\succeq\zeta_2$,如果满足

$$\left\{0\vee\left(\frac{\eta_1+\mu_1}{\beta^{(\odot 12)}}-\gamma^{(\odot 12)}\right)\right\}\wedge\{0\vee(1-\gamma^{(\odot 12)})\}\wedge\{0\vee((1-\nu_1)\vee(1-\nu_2)-\gamma^{(\odot 12)})\}\geqslant\eta_2。$$

证明 (1)

$$\zeta_2\oplus(\zeta_1-\zeta_2)$$

$$=\left\langle\mu_2,\eta_2,\nu_2\right\rangle\oplus\left\langle 0\vee\frac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\},\ 1\wedge\frac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$$

$$=\left\langle\mu_1\vee\mu_2,(\eta_2+\nu_2)\left(1\wedge\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\wedge\left\{\frac{\nu_1}{\nu_2}\vee\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\right\}\right)-\nu_1\wedge\nu_2\wedge\frac{\nu_2(1-\mu_1)}{1-\mu_2},\nu_1\wedge\nu_2\wedge\frac{\nu_2(1-\mu_1)}{1-\mu_2}\right\rangle$$

$$=\left\langle\mu_1\vee\mu_2,(\eta_2+\nu_2)\beta^{(\odot 12)}-\nu_1\wedge\nu_2\wedge\frac{\nu_2(1-\mu_1)}{1-\mu_2},\nu_1\wedge\nu_2\wedge\frac{\nu_2(1-\mu_1)}{1-\mu_2}\right\rangle$$

$$=\left\langle\mu_1\vee\mu_2,\eta,\nu_1\wedge\nu_2\wedge\frac{\nu_2(1-\mu_1)}{1-\mu_2}\right\rangle,$$

令 $\eta=(\eta_2+\nu_2)\beta^{(\odot 12)}-\nu_1\wedge\nu_2\wedge\frac{\nu_2(1-\mu_1)}{1-\mu_2}$,所以在满足该条件 $\eta\geqslant\eta_1$ 的情况下,有

$$\left\langle\mu_1\vee\mu_2,\eta,\nu_1\wedge\nu_2\wedge\frac{\nu_2(1-\mu_1)}{1-\mu_2}\right\rangle>\langle\mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle,$$

因此 $\zeta_2\oplus(\zeta_1-\zeta_2)\succeq\zeta_1$。

性质(2)、(3)、(4)同理可证。

性质 7 的(1)、(2)、(3)、(4)是仅在满足理想条件下不等式才成立。满足$\frac{\nu_1}{\nu_2}\leqslant\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\leqslant\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\leqslant 1$ 时,性质 7 的(1)、(3)的等号是成立的,此时分别可以退化为性质 2 的(2)、(3);满足$\frac{\mu_1}{\mu_2}\leqslant\frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\leqslant\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\leqslant 1$ 时,性质 7 的(2)、(4)的等号是成立的,此时分别可以退化为性质 3 的(2)、(3),因此,性质 7 的(1)、(3)条件是性质 2 的(2)、(3)的必要不充分;性质 7 的(2)、(4)条件是性质 3 的(2)、(3)的必要不充分。

性质 8 设 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3\in\Theta$,则:

(1) $\zeta_1-\zeta_2-\zeta_3=\zeta_1-\zeta_3-\zeta_2$,如果满足

$$\left\{0\vee\left(\frac{\beta^{(-12)}}{\eta_3+\nu_3}-\frac{\delta^{(-12)}}{\nu_3}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\delta^{(-12)}}{\nu_3}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{\alpha^{(-12)}}{1-\mu_3}-\frac{\delta^{(-12)}}{\nu_3}\right)\right\}$$

$$=\left\{0\vee\left(\frac{\beta^{(-13)}}{\eta_2+\nu_2}-\frac{\delta^{(-13)}}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\delta^{(-13)}}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{\alpha^{(-13)}}{1-\mu_2}-\frac{\delta^{(-13)}}{\nu_2}\right)\right\};$$

(2) $\zeta_1\odot\zeta_2\odot\zeta_3=\zeta_1\odot\zeta_3\odot\zeta_2$,如果满足

$$\left\{0\vee\left(\frac{\beta^{(\odot 12)}}{\eta_3+\mu_3}-\frac{\alpha^{(\odot 12)}}{\mu_3}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\alpha^{(\odot 12)}}{\mu_3}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{\delta^{(\odot 12)}}{1-\nu_3}-\frac{\alpha^{(\odot 12)}}{\mu_3}\right)\right\}$$

$$=\left\{0\vee\left(\frac{\beta^{(\odot 13)}}{\eta_2+\mu_2}-\frac{\alpha^{(\odot 13)}}{\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\alpha^{(\odot 13)}}{\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{\delta^{(\odot 13)}}{1-\nu_2}-\frac{\alpha^{(\odot 13)}}{\mu_2}\right)\right\};$$

(3) $\zeta_3-(\zeta_1\oplus\zeta_2)=\zeta_3-\zeta_1-\zeta_2$,如果满足

$$\left\{0\vee\left(\frac{\beta^{(-31)}}{\eta_2+\nu_2}-\frac{\delta^{(-31)}}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\delta^{(-31)}}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{\alpha^{(-31)}}{1-\mu_2}-\frac{\delta^{(-31)}}{\nu_2}\right)\right\}$$

$$=\left\{0\vee\left(\frac{\eta_3+\nu_3}{(\eta_1+\nu_1)(\eta_2+\nu_2)}-\frac{\nu_3}{\nu_1\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\nu_3}{\nu_1\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\mu_3}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}-\frac{\nu_3}{\nu_1\nu_2}\right)\right\};$$

(4) $\zeta_3\odot(\zeta_1\otimes\zeta_2)=\zeta_3\odot\zeta_1\odot\zeta_2$,如果满足

$$\left\{0\vee\left(\frac{\eta^{(\odot_{31})}}{\eta_2+\mu_2}-\frac{\alpha^{(\odot_{31})}}{\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\alpha^{(\odot_{31})}}{\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{\delta^{(\odot_{31})}}{1-\nu_2}-\frac{\alpha^{(\odot_{31})}}{\mu_2}\right)\right\}$$

$$=\left\{0\vee\left(\frac{\eta_3+\mu_3}{(\eta_1+\mu_1)(\eta_2+\mu_2)}-\frac{\mu_3}{\mu_1\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\mu_3}{\mu_1\mu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\nu_3}{(1-\nu_1)(1-\nu_2)}-\frac{\mu_3}{\mu_1\mu_2}\right)\right\}。$$

证明　(1) 在满足理想条件下,由计算可知,

$$\zeta_1-\zeta_2-\zeta_3=\left\langle 0\vee\frac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\right\},1\wedge\frac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle-\langle\mu_3,\eta_3,\nu_3\rangle$$

$$=\left\langle 0\vee\frac{\mu_1-\mu_2-\mu_3+\mu_2\mu_3}{(1-\mu_2)(1-\mu_3)},\left\{0\vee\left(\frac{\beta^{(-12)}}{\eta_3+\nu_3}-\frac{\delta^{(-12)}}{\nu_3}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\delta^{(-12)}}{\nu_3}\right)\right\}\right.$$

$$\left.\wedge\left\{0\vee\left(\frac{\alpha^{(-12)}}{1-\mu_3}-\frac{\delta^{(-12)}}{\nu_3}\right)\right\},1\wedge\frac{\nu_1}{\nu_2\nu_3}\wedge\frac{1-\mu_1}{(1-\mu_2)(1-\mu_3)}\right\rangle,$$

$$\zeta_1-\zeta_3-\zeta_2=\left\langle 0\vee\frac{\mu_1-\mu_3}{1-\mu_3},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_3+\nu_3}-\frac{\nu_1}{\nu_3}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_3}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\mu_1}{1-\mu_3}-\frac{\nu_1}{\nu_3}\right)\right\},1\wedge\frac{\nu_1}{\nu_3}\wedge\frac{1-\mu_1}{1-\mu_3}\right\rangle-\langle\mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle$$

$$=\left\langle 0\vee\frac{\mu_1-\mu_2-\mu_3+\mu_2\mu_3}{(1-\mu_2)(1-\mu_3)},\left\{0\vee\left(\frac{\beta^{(-13)}}{\eta_2+\nu_2}-\frac{\delta^{(-13)}}{\nu_2}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\delta^{(-13)}}{\nu_2}\right)\right\}\right.$$

$$\left.\wedge\left\{0\vee\left(\frac{\alpha^{(-13)}}{1-\mu_2}-\frac{\delta^{(-13)}}{\nu_2}\right)\right\},1\wedge\frac{\nu_1}{\nu_2\nu_3}\wedge\frac{1-\mu_1}{(1-\mu_2)(1-\mu_3)}\right\rangle。$$

由上述可知,等式两边的隶属度和非隶属度相等,且拒绝度在给定的条件下也相等,所以 $\zeta_1-\zeta_2-\zeta_3=\zeta_1-\zeta_3-\zeta_2$ 是成立的。

性质(2)、(3)、(4)同理可证。

性质 8 的(1)、(2)、(3)、(4)是仅在满足理想条件下等式才成立。观察发现:满足 $\frac{\nu_1}{\nu_2}\leqslant\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\leqslant\frac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\leqslant 1$, $\frac{\nu_1}{\nu_3}\leqslant\frac{\eta_1+\nu_1}{\eta_3+\nu_3}\leqslant\frac{1-\mu_1}{1-\mu_3}\leqslant 1$ 时,性质 8 的(1)的等号仍然是成立的,此时可以退化为性质 4 的(1);满足 $\frac{\mu_1}{\mu_2}\leqslant\frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\leqslant\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\leqslant 1$, $\frac{\mu_1}{\mu_3}\leqslant\frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_3+\mu_3}\leqslant\frac{1-\nu_1}{1-\nu_3}\leqslant 1$ 时,性质 8 的(2)的等号仍然是成立的,此时可以退化为性质 4 的(2);满足 $\frac{\nu_3}{\nu_1}\leqslant\frac{\eta_3+\nu_3}{\eta_1+\nu_1}\leqslant\frac{1-\mu_3}{1-\mu_1}\leqslant 1$ 时,性质 8 的(3)的等号仍然是成立的,此时可以退化为性质 4 的(3);满足 $\frac{\mu_3}{\mu_1}\leqslant\frac{\eta_3+\mu_3}{\eta_1+\mu_1}\leqslant\frac{1-\nu_3}{1-\nu_1}\leqslant 1$ 时,性质 8 的(4)的等号仍然是成立的,此时可以退化为性质 4 的(4)。因此,性质 8 的(1)、(2)、(3)、(4)条件是性质 4 的(1)、(2)、(3)、(4)的必要不充分。

根据证明过程中,性质 8 的(1)、(2)、(3)、(4)在满足理想条件下等式是成立的。类似地, 对于 3 个及以上的 PFNs 之间的运算性质时,仍可以获得某种条件下的相关等式或不等式。

性质 9　设 $\zeta_1,\zeta_2\in\Theta$,则:

(1) $\zeta_1\vee\zeta_2\geq\zeta_1\wedge\zeta_2$;

(2) $\zeta_1\vee\zeta_2\geq\zeta_i$, 如果满足 $\min\{\eta_1,\eta_2\}=\eta_i(i=1,2)$;

(3) $\zeta_1\wedge\zeta_2\leq\zeta_i(i=1,2)$。

证明　(1) 由 $\zeta_1\vee\zeta_2=\langle\max\{\mu_1,\mu_2\},\min\{\eta_1,\eta_2\},\min\{\nu_1,\nu_2\}\rangle$, $\zeta_1\wedge\zeta_2=\langle\min\{\mu_1,\mu_2\},\min\{\eta_1,\eta_2\},\max\{\nu_1,\nu_2\}\rangle$, 因此 $S(\zeta_1\vee\zeta_2)=\max\{\mu_1,\mu_2\}-\min\{\nu_1,\nu_2\}\geqslant S(\zeta_1\wedge\zeta_2)=\min\{\mu_1,\mu_2\}-\max\{\nu_1,\nu_2\}$。若 $S(\zeta_1\vee\zeta_2)=S(\zeta_1\wedge\zeta_2)$, 则只能取 $\mu_1=\mu_2,\nu_1=\nu_2$, 因此 $H_1(\zeta_1\vee\zeta_2)=H_1(\zeta_1\wedge\zeta_2)$, $H_2(\zeta_1\vee\zeta_2)=H_1(\zeta_1\wedge\zeta_2)$。综上, $\zeta_1\vee\zeta_2\geq\zeta_1\wedge\zeta_2$。

性质(2)、(3)同理可证。

下面讨论结合 ∧ ∨ 运算下减法和除法的性质,并用具体的例子验证上述性质的合理性。

性质 10 设 $\zeta_1,\zeta_2\in\Theta$,则:

(1) $(\zeta_1\vee\zeta_2)\odot(\zeta_1\wedge\zeta_2)\geq\zeta_1\odot\zeta_2$;

(2) $(\zeta_1\wedge\zeta_2)-(\zeta_1\vee\zeta_2)\leq\zeta_1-\zeta_2$。

证明 (1) $(\zeta_1\vee\zeta_2)\odot(\zeta_1\wedge\zeta_2)=\langle 1,0,0\rangle\geq\zeta_1\odot\zeta_2$;

(2) $(\zeta_2\wedge\zeta_2)-(\zeta_1\vee\zeta_2)=\langle 0,0,1\rangle\leq\zeta_1-\zeta_2$。

例 2 设 $\zeta_1=\langle 0.4,0.1,0.3\rangle$, $\zeta_2=\langle 0.5,0,0.4\rangle$, $\zeta_3=\langle 0.3,0.1,0.5\rangle$,则

$\zeta_2\oplus(\zeta_1-\zeta_2)=\langle 0.5,0,0.4\rangle\oplus\langle 0,0.25,0.75\rangle=\langle 0.5,0.2,0.3\rangle\geq\langle 0.4,0.1,0.3\rangle=\zeta_1$;

$\zeta_2\otimes(\zeta_1\odot\zeta_2)=\langle 0.5,0,0.4\rangle\otimes\langle 0.8,0.2,0\rangle=\langle 0.4,0.1,0.4\rangle\leq\langle 0.4,0.1,0.3\rangle=\zeta_1$;

$\zeta_1-(\zeta_1-\zeta_2)=\langle 0.4,0.1,0.3\rangle-\langle 0,0.25,0.75\rangle=\langle 0.4,0,0.4\rangle\leq\langle 0.5,0,0.4\rangle=\zeta_2$;

$\zeta_2\odot(\zeta_1\otimes\zeta_2)=\langle 0.4,0.1,0.3\rangle\odot\langle 0.8,0.2,0\rangle=\langle 0.5,0,0\rangle\geq\langle 0.5,0,0.4\rangle=\zeta_2$;

$\zeta_1-\zeta_2-\zeta_3=\zeta_1-\zeta_3-\zeta_2=\langle 0,0,1\rangle$;

$\zeta_1\odot\zeta_2\odot\zeta_3=\zeta_1\odot\zeta_3\odot\zeta_2=\langle 1,0,0\rangle$;

$\zeta_3-(\zeta_1\oplus\zeta_2)=\zeta_3-\zeta_1-\zeta_2=\langle 0,0,1\rangle$;

$\zeta_3\odot(\zeta_1\otimes\zeta_2)=\zeta_3\odot\zeta_1\odot\zeta_2=\langle 1,0,0\rangle$;

$(\zeta_1\vee\zeta_2)\odot(\zeta_1\wedge\zeta_2)=\langle 1,0,0\rangle\geq\zeta_1\odot\zeta_2=\langle 0.8,0.2,0\rangle$;

$(\zeta_1\wedge\zeta_2)-(\zeta_1\vee\zeta_2)=\langle 0,0,1\rangle\leq\zeta_1-\zeta_2=\langle 0,0.25,0.75\rangle$。

综上,由计算可知性质 7、8、10 确实是合理的。

2.3 2 种定义的比较

由定义 9 可知,当满足$\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\leqslant\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\leqslant\dfrac{1-\mu_2}{1-\mu_2}\leqslant 1$ 时, $\zeta_1-\zeta_2=\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\dfrac{\nu_1}{\nu_2},\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right\rangle$;当满足$\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\leqslant\dfrac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\leqslant\dfrac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\leqslant 1$ 时,$\zeta_1\odot\zeta_2=\left\langle\dfrac{\mu_1}{\mu_2},\dfrac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}-\dfrac{\mu_1}{\mu_2},\dfrac{\nu_1-\nu_2}{1-\nu_2}\right\rangle$。

除了上述情况之外,当式(1)、(2)确定的运算不一定能求出精确解时, 可以利用式(3)、(4)进行运算,求出精确解。显然, 式(3)、(4)是式(1)、(2)的一种改进形式。详细比较见表 13、14。

表 13 不同形式减法算子的比较

Table 13 Comparison of subtraction operators in different forms

条件	$\zeta_1-\zeta_2$	
	公式(1)	公式(3)
$\mu_1<\mu_2$, $\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\leqslant\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\leqslant 1$	$\langle 0,0,1\rangle$	$\left\langle 0,\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\dfrac{\nu_1}{\nu_2},\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right\rangle$
$\mu_1<\mu_2$, $\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}<\dfrac{\nu_1}{\nu_2}$, $\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\leqslant 1$	$\langle 0,0,1\rangle$	$\left\langle 0,0,1\wedge\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right\rangle$
$\mu_1<\mu_2$, $\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\geqslant\dfrac{\nu_1}{\nu_2}$, $\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}>1$	$\langle 0,0,1\rangle$	$\left\langle 0,0\vee\left(1-\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right),1\wedge\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right\rangle$
$\mu_1<\mu_2$, $1<\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}<\dfrac{\nu_1}{\nu_2}$	$\langle 0,0,1\rangle$	$\langle 0,0,1\rangle$
$\mu_1\geqslant\mu_2$, $\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\leqslant\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\leqslant\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}<1$	$\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\dfrac{\nu_1}{\nu_2},\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right\rangle$	$\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}-\dfrac{\nu_1}{\nu_2},\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right\rangle$
$\mu_1\geqslant\mu_2$, $\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}<\dfrac{\nu_1}{\nu_2}$, $\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\leqslant\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}$	$\langle 0,0,1\rangle$	$\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},0,\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$
$\mu_1\geqslant\mu_2$, $\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}\geqslant\dfrac{\nu_1}{\nu_2}$, $\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}>\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}$	$\langle 0,0,1\rangle$	$\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},0\vee\left(\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}-\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right),\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\wedge\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$
$\mu_1\geqslant\mu_2$, $\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}<\dfrac{\eta_1+\nu_1}{\eta_2+\nu_2}<\dfrac{\nu_1}{\nu_2}$	$\langle 0,0,1\rangle$	$\left\langle\dfrac{\mu_1-\mu_2}{1-\mu_2},0,\dfrac{1-\mu_1}{1-\mu_2}\right\rangle$

表 14　不同形式除法算子的比较
Table 14　Comparison of division operators in different forms

条件	$\zeta_1 \odot \zeta_2$	
	公式(2)	公式(4)
$\nu_1<\nu_2,\ \frac{\mu_1}{\mu_2}\leqslant\frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\leqslant 1$	$\langle 1,0,0\rangle$	$\langle\frac{\mu_1}{\mu_2},\ \frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}-\frac{\mu_1}{\mu_2},0\rangle$
$\nu_1<\nu_2,\ \frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}<\frac{\mu_1}{\mu_2},\ \frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\leqslant 1$	$\langle 1,0,0\rangle$	$\langle 1\wedge\frac{\mu_1}{\mu_2},0,0\rangle$
$\nu_1<\nu_2,\ \frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\geqslant\frac{\mu_1}{\mu_2},\ \frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}>1$	$\langle 1,0,0\rangle$	$\langle 1\wedge\frac{\mu_1}{\mu_2},\ 0\vee\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right),0\rangle$
$\nu_1<\nu_2,\ 1<\frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}<\frac{\mu_1}{\mu_2}$	$\langle 1,0,0\rangle$	$\langle 1,0,0\rangle$
$\nu_1\geqslant\nu_2,\ \frac{\mu_1}{\mu_2}\leqslant\frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\leqslant\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}<1$	$\langle\frac{\mu_1}{\mu_2},\ \frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}-\frac{\mu_1}{\mu_2},\frac{\nu_1-\nu_2}{1-\nu_2}\rangle$	$\langle\frac{\mu_1}{\mu_2},\ \frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}-\frac{\mu_1}{\mu_2},\frac{\nu_1-\nu_2}{1-\nu_2}\rangle$
$\nu_1\geqslant\nu_2,\ \frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}<\frac{\mu_1}{\mu_2},\ \frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\leqslant\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}$	$\langle 1,0,0\rangle$	$\langle\frac{\mu_1}{\mu_2}\wedge\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2},0,\frac{\nu_1-\nu_2}{1-\nu_2}\rangle$
$\nu_1\geqslant\nu_2,\ \frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}\geqslant\frac{\mu_1}{\mu_2},\ \frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}>\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}$	$\langle 1,0,0\rangle$	$\langle\frac{\mu_1}{\mu_2}\wedge\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2},0\vee\left(\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right),\ \frac{\nu_1-\nu_2}{1-\nu_2}\rangle$
$\nu_1\geqslant\nu_2,\ \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}<\frac{\eta_1+\mu_1}{\eta_2+\mu_2}<\frac{\mu_1}{\mu_2}$	$\langle 1,0,0\rangle$	$\langle\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2},0,\frac{\nu_1-\nu_2}{1-\nu_2}\rangle$

3　关于 PFSs 的减法和除法运算符

上章是利用改进线性规划构造减除算子,本章将 PFNs 拓展到 PFSs 上,介绍了 PFSs 上的算术运算并讨论相关性质。

定义 10　设 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\eta_A(x),\nu_A(x)\rangle \mid x\in U\}$, $B=\{\langle x,\mu_B(x),\eta_B(x),\nu_B(x)\rangle \mid x\in U\}\in \mathrm{PFS}(U)$,则分别给出图片模糊集的减法和除法运算的形式为

$$A-B=\left\{\left\langle x,0\vee\frac{\mu_A(x)-\mu_B(x)}{1-\mu_B(x)},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_A(x)+\nu_A(x)}{\eta_B(x)+\nu_B(x)}-\frac{\nu_A(x)}{\nu_B(x)}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\nu_A(x)}{\nu_B(x)}\right)\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\mu_A(x)}{1-\mu_B(x)}-\frac{\nu_A(x)}{\nu_B(x)}\right)\right\},\ 1\wedge\frac{\nu_A(x)}{\nu_B(x)}\wedge\frac{1-\mu_A(x)}{1-\mu_B(x)}\right\rangle \mid x\in U\right\};$$

$$A\odot B=\left\{\left\langle x,1\wedge\frac{\mu_A(x)}{\mu_B(x)}\wedge\frac{1-\nu_A(x)}{1-\nu_B(x)},\left\{0\vee\left(\frac{\eta_A(x)+\mu_A(x)}{\eta_B(x)+\mu_B(x)}-\frac{\mu_A(x)}{\mu_B(x)}\right)\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.\wedge\left\{0\vee\left(1-\frac{\mu_A(x)}{\mu_B(x)}\right)\right\}\wedge\left\{0\vee\left(\frac{1-\nu_A(x)}{1-\nu_B(x)}-\frac{\mu_A(x)}{\mu_B(x)}\right)\right\},\ 0\vee\frac{\nu_A(x)-\nu_B(x)}{1-\nu_B(x)}\right\rangle \mid x\in U\right\}。$$

假设在 $\vee$ 算符下 $\frac{0}{0}\triangleq 0$, 在 $\wedge$ 算符下 $\frac{0}{0}\triangleq 1$。

例 3　给定 2 个 PFSs, $A=\{\langle x_1,0.45,0.32,0.18\rangle,\langle x_2,0.18,0.62,0.1\rangle,\langle x_3,0.1,0.02,0.84\rangle,\langle x_4,0.9,0.02,0.06\rangle\}$, $B=\{\langle x_1,0.4,0.3,0.1\rangle,\langle x_2,0.92,0.03,0.01\rangle,\langle x_3,0.58,0.12,0.16\rangle,\langle x_4,0.45,0.32,0.12\rangle\}$,则

$$A-B=\{\langle x_1,0.083\,3,0,0.916\,7\rangle,\langle x_2,0,0,1\rangle,\langle x_3,0,0,1\rangle,\langle x_4,0.818\,2,0,0.181\,8\rangle\},$$
$$A\odot B=\{\langle x_1,0.911\,1,0,0.088\,9\rangle,\langle x_2,0.195\,7,0.646\,4,0.090\,9\rangle,\langle x_3,0.172\,4,0,0.809\,5\rangle,\langle x_4,1,0,0\rangle\}。$$

性质 11　设 A、B 为 2 个 PFSs, $\lambda>0,\lambda_1>\lambda_2>0$,则以下性质成立:

(1) $A-0_U=A$, $A-A=0_U$;

(2) $A\odot 1_U=A$, $A\odot A=1_U$;

(3) 若 $A\neq 1_U$, 则 $1_U-A=1_U$;

(4) 若 $A\neq 0_U$, 则 $0_U\odot A=0_U$;

(5) $\lambda(A-B)=\lambda A-\lambda B$, $(A-B)^{\lambda}=A^{\lambda}-B^{\lambda}$;

(6) $\lambda_1 A-\lambda_2 A=(\lambda_1-\lambda_2)A$, $A^{\lambda_1}-A^{\lambda_2}=A^{\lambda_1-\lambda_2}$;

(7) $A^{c}\odot B^{c}=(A-B)^{c}$, $A^{c}-B^{c}=(A\odot B)^{c}$。

上述性质可以直接由第2节中的对应性质获得,证明略。

4 减法和除法算子在模式识别的应用

在模式识别中,存在一些已知模式和一个未知模式, 目的是识别与未知模式相似性最大的已知模式,为此许多专家学者研究了许多距离测度和相似性测度等处理模式识别问题。这里利用新提出的减法和除法算子解决模式识别问题并给出具体的算法步骤和示例。

4.1 模式识别的算法

对于处理模式识别问题,基于所提出的减法和除法算子给出了在图片模糊集下的模式识别算法的步骤。

输入 n 个已知模式 $Q_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和一个未知模式 H, 并以图片模糊数的形式给出如下:

$$Q_i=\{\langle q_j,\mu_{Q_i}(q_j),\eta_{Q_i}(q_j),\nu_{Q_i}(q_j)\rangle \mid q_j\in U,\ j=1,2,\cdots,m\},$$

$$H=\{\langle q_j,\mu_{H}(q_j),\eta_{H}(q_j),\nu_{H}(q_j)\rangle \mid q_j\in U,\ j=1,2,\cdots,m\}。$$

输出 找出与未知模式相似性最大的已知模式。

步骤1 计算未知模式 H 与已知模式 Q_i 之间的偏差值记为 $\zeta_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$, 其中对于减法算子的偏差值 $\zeta_{ij}=H_j-Q_{ij}$, 除法算子的偏差值 $\zeta_{ij}=Q_{ij}\odot H_j$;

步骤2 计算每个偏差值对应的得分值 $S(\zeta_{ij})$;

步骤3 计算各个模式 Q_i 的加权数值 $S(Q_i,H)$, 其中 $S(Q_i,H)=\sum\limits_{j=1}^{m}(\xi_j S(\zeta_{ij}))$, 各对象对应的权重 ξ_j 利用最大偏差法公式(5)得到

$$\xi_j=\frac{\sum\limits_{i_1}^{n}\sum\limits_{i_2}^{n}d(r_{i_1 j},r_{i_2 j})}{\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{i_1}^{n}\sum\limits_{i_2}^{n}d(r_{i_1 s},r_{i_2 s})},\tag{5}$$

其中, $r_{ij}=\langle\mu_{Q_i}(q_j),\eta_{Q_i}(q_j),\nu_{Q_i}(q_j)\rangle$, $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$(i 可取 i_1、i_2; j 可取 s);

步骤4 根据相似最大原则, 选取未知模式 H 属于模式 Q_{i0},若利用减法算子时取 $S(Q_{i0},H)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{S(Q_i,H)\}$;若利用除法算子时取 $S(Q_{i0},H)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{S(Q_i,H)\}$。

4.2 模式识别的示例

例4 考虑用PFSs表示的3种已知模式 Q_1、Q_2 和 Q_3,一个未知的模式 H[21]:

$Q_1=\{\langle q_1,0.4,0.3,0.1\rangle,\langle q_2,0.5,0.3,0.2\rangle,\langle q_3,0.4,0.3,0\rangle,\langle q_4,0.7,0,0.2\rangle,\langle q_5,0.6,0.1,0.1\rangle\}$,

$Q_2=\{\langle q_1,0.7,0.1,0.1\rangle,\langle q_2,0.2,0.3,0.4\rangle,\langle q_3,0.2,0.1,0.5\rangle,\langle q_4,0.1,0.5,0.2\rangle,\langle q_5,0.3,0.3,0.3\rangle\}$,

$Q_3=\{\langle q_1,0.1,0.3,0.4\rangle,\langle q_2,0.4,0.3,0.1\rangle,\langle q_3,0.3,0.4,0.2\rangle,\langle q_4,0.2,0.5,0.3\rangle,\langle q_5,0.5,0.3,0.1\rangle\}$,

$H=\{\langle q_1,0.6,0.2,0.1\rangle,\langle q_2,0.3,0.4,0.2\rangle,\langle q_3,0.4,0.3,0.2\rangle,\langle q_4,0.7,0.1,0.1\rangle,\langle q_5,0.4,0.2,0.2\rangle\}$。

研究目标是将未知模式 H 分类为 Q_1、Q_2 和 Q_3 模式之一,因此,利用减法和除法算子计算偏差值得到的得分值矩阵分别为:

$$\begin{array}{c}\\ Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5\end{array}\\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -1\\ -1 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{20} & \frac{1}{3} & -\frac{11}{21}\\ \frac{11}{36} & -1 & -\frac{5}{7} & \frac{7}{24} & -1\end{pmatrix}\end{array},\qquad \begin{array}{c}\\ Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5\end{array}\\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 1 & \frac{7}{9} & 1\\ 1 & \frac{5}{12} & \frac{1}{8} & \frac{2}{63} & \frac{5}{8}\\ -\frac{1}{6} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{4}{63} & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

根据式(5)确定对应的对象权重为 $\boldsymbol{\xi}=(0.239\,1,0.130\,4,0.217\,4,0.260\,9,0.152\,2)^{\mathrm{T}}$,利用模式识别算法

获得的各个模式 Q_i 的加权数值 $S(Q_i,H)$。利用减法算子或除法算子方法时,模式 H 都属于模式 Q_1。此外,为了验证所提出的算子的有效性,将上述示例的结果与现有的一些度量(D_1[20]、S_1[21]、S_2[22]、D_2[23]、D_3[24]、K 和 γ[25])比较,本文方法得到的结果与其他度量结果是保持一致的,其中 D_1 表示 PFSs 的不相似测度,S_1 和 S_2 表示 PFSs 的相似性测度,D_2 和 D_3 表示 PFSs 的距离测度,K 和 γ 表示 PFSs 的相关系数,见表 15。

表 15 不同方法的模式识别的结果
Table 15 The results of pattern recognition using different methods

测度数值	D_1	S_1	S_2	D_2	D_3	K	γ	减法算子	除法算子
(Q_1,H)	0.093 3	0.741 1	0.965 2	0.041 2	0.083 6	0.492 9	0.227 0	−0.710 2	0.862 3
(Q_2,H)	0.126 7	0.683 4	0.937 8	0.065 4	0.138 4	0.162 1	0.160 8	−0.3134	0.424 0
(Q_3,H)	0.133 3	0.685 3	0.925 9	0.074 5	0.158 1	−0.767 6	−0.679 3	−0.288 7	0.422 4
最优识别模式	Q_1	Q_1	Q_1	Q_1	Q_1	Q_1	Q_1	Q_1	Q_1

例 5 假设 H_1、H_2、H_3、H_4 代表 4 位患者和疾病症状用 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5 代表,其中 Q_1 表示体温,Q_2 表示胸痛,Q_3 表示咳嗽,Q_4 表示胃痛,Q_5 表示头痛,并以 PFSs 的形式展示如下:

$Q_1=\{\langle q_1,0.1,0.5,0.3\rangle,\langle q_2,0,0.35,0.5\rangle,\langle q_3,0.2,0.5,0.3\rangle,\langle q_4,0.2,0.4,0.35\rangle,\langle q_5,0.8,0.1,0\rangle\}$,

$Q_2=\{\langle q_1,0.1,0.5,0.3\rangle,\langle q_2,0.2,0.3,0.4\rangle,\langle q_3,0.8,0,0\rangle,\langle q_4,0.2,0.3,0.4\rangle,\langle q_5,0.2,0.3,0.35\rangle\}$,

$Q_3=\{\langle q_1,0.3,0.3,0.4\rangle,\langle q_2,0.6,0.1,0.2\rangle,\langle q_3,0.2,0.4,0.3\rangle,\langle q_4,0.2,0.3,0.35\rangle,\langle q_5,0.1,0.6,0.2\rangle\}$,

$Q_4=\{\langle q_1,0.7,0,0\rangle,\langle q_2,0.2,0.35,0.4\rangle,\langle q_3,0,0.5,0.4\rangle,\langle q_4,0.7,0,0.1\rangle,\langle q_5,0.1,0.5,0.3\rangle\}$,

$Q_5=\{\langle q_1,0.4,0,0\rangle,\langle q_2,0.3,0.4,0.2\rangle,\langle q_3,0.1,0.5,0.35\rangle,\langle q_4,0.4,0.2,0.3\rangle,\langle q_5,0.1,0.5,0.25\rangle\}$,

$H_1=\{\langle q_1,0.8,0.1,0\rangle,\langle q_2,0.4,0.2,0.3\rangle,\langle q_3,0.1,0.2,0.4\rangle,\langle q_4,0.6,0.2,0.1\rangle,\langle q_5,0.2,0.3,0.5\rangle\}$,

$H_2=\{\langle q_1,0.1,0.6,0.2\rangle,\langle q_2,0.3,0.2,0.4\rangle,\langle q_3,0.9,0.1,0\rangle,\langle q_4,0.2,0.5,0.2\rangle,\langle q_5,0.3,0.2,0.4\rangle\}$,

$H_3=\{\langle q_1,0.7,0.2,0.1\rangle,\langle q_2,0.4,0.3,0.2\rangle,\langle q_3,0.1,0.5,0.2\rangle,\langle q_4,0.3,0.2,0.4\rangle,\langle q_5,0.1,0.4,0.3\rangle\}$,

$H_4=\{\langle q_1,0.4,0.3,0.2\rangle,\langle q_2,0.5,0.2,0.1\rangle,\langle q_3,0.3,0.5,0.1\rangle,\langle q_4,0.3,0.4,0.2\rangle,\langle q_5,0.1,0.7,0.2\rangle\}$。

利用模式识别(除法算子)算法计算患者在不同疾病症状 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5 下的加权数值,其中加权数值分别用 κ_1、κ_2、κ_3、κ_4、κ_5 表示,结果见表 16。

表 16 患者和疾病症状之间的加权数值
Table 16 Weighted values between patients and disease symptoms

患者	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5
H_1	0.382 7	0.442 6	0.489 6	0.541 5	<u>0.640 9</u>
H_2	0.450 8	<u>0.607 8</u>	0.441 9	0.500 9	0.549 7
H_3	0.400 8	0.445 9	0.669 3	0.522 4	<u>0.877 2</u>
H_4	0.342 0	0.458 4	<u>0.634 5</u>	0.504 0	0.610 3

注:标有下划线的值对应表示患者在不同疾病症状下的最优加权数值。

根据最优加权数值所对应的疾病症状即为患者症状,因此患者 H_1 和 H_3 患有疾病 Q_5(头痛),患者 H_2 患有疾病 Q_2(胸痛),患者 H_4 患有疾病 Q_3(咳嗽)。

5 结语

本文基于交互运算法则,提出了图片模糊数的减法和除法运算,并讨论其相关性质,但是,对于上述运算可能存在无法求精确解的情况,结合线性规划又构造了改进的图片模糊数的减法和除法算子,且任意 2 个图片模糊数都可以通过该运算获得。将改进的减法和除法运算拓展到图片模糊集上。最后,将这些运算应用到模式识别中,结果表明该算子的可行性。本文为图片模糊集的基本算术运算(减法和除法)提供了理论基础,可以将它应用到多属性决策、聚类分析等问题中,也可以推广到球形模糊集、T-球形模糊集、区间值图片模糊集等的基本算子理论研究中。

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3):338-353.

[2] YAGER R R. Generalized orthopair fuzzy sets[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2016, 25(5):1222-1230.
[3] CUONG B C, KREINOVICH V. Picture fuzzy sets: a new concept for computational intelligence problems[C]//2013 Third World Congress on Information and Communication Technologies (WICT 2013). Hanoi: IEEE, 2013:1-6.
[4] ALMULHIM T, BARAHONA I. An extended picture fuzzy multicriteria group decision analysis with different weights: a case study of COVID-19 vaccine allocation[J]. Socio-economic Planning Sciences, 2023, 85:101435.
[5] KUMAR S, ARYA V, KUMAR S, et al. A new picture fuzzy entropy and its application based on combined picture fuzzy methodology with partial weight information[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2022, 24(7):3208-3225.
[6] VERMA R, ROHTAGI B. Novel similarity measures between picture fuzzy sets and their applications to pattern recognition and medical diagnosis[J]. Granular Computing, 2022, 7(4):761-777.
[7] SI A, DAS S, KAR S. Picture fuzzy set-based decision-making approach using Dempster-Shafer theory of evidence and grey relation analysis and its application in COVID-19 medicine selection[J]. Soft Computing, 2023, 27(6):3327-3341.
[8] GARG H. Some picture fuzzy aggregation operators and their applications to multi-criteria decision-making[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2017, 42(12):5275-5290.
[9] JANA C, SENAPATI T, PAL M, et al. Picture fuzzy Dombi aggregation operators: application to MADM process[J]. Applied Soft Computing, 2019, 74:99-109.
[10] ULLAH K. Picture fuzzy Maclaurin symmetric mean operators and their applications in solving multi-attribute decision-making problems[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2021, 2021:1-13.
[11] WU Xinxing, ZHU Zhiyi, LIU Peide, et al. Picture fuzzy interactional aggregation operators via strict triangular norms and applications to multi-criteria decision making[EB/OL]. (2022-04-08)[2023-06-09]. https://arxiv.org/abs/2204.03878.
[12] CHEN Tingyu. Remarks on the subtraction and division operations over intuitionistic fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets [J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2007, 9(3):169172.
[13] LIAO Huchang, XU Zeshui. Subtraction and division operations over hesitant fuzzy sets[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2014, 27(1):65-72.
[14] FARHADINIA B. Study on division and subtraction operations for hesitant fuzzy sets, interval-valued hesitant fuzzy sets and typical dual hesitant fuzzy sets[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2015, 28(3):1393-1402.
[15] GOU Xunjie, XU Zeshui, REN Peijia. The properties of continuous pythagorean fuzzy information[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(5):401-424.
[16] RANI D, GARG H. Some modified results of the subtraction and division operations on interval neutrosophic sets[J]. Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence, 2019, 31(4):677-698.
[17] DU Weisheng. Subtraction and division operations on intuitionistic fuzzy sets derived from the Hamming distance[J]. Information Sciences, 2021, 571:206-224.
[18] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
CHEN Baolin. Optimization theory and algorithm[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.
[19] DU Weisheng. Research on arithmetic operations over generalized orthopair fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2019, 34(5):709-732.
[20] SHAH J A, SUKHEJA D, BHATNAGAR P, et al. A decision-making problem using dissimilarity measure in picture fuzzy sets[J]. Materials Today: Proceedings, 2023, 80:3405-3410.
[21] SINGH S, GANIE A H. Applications of picture fuzzy similarity measures in pattern recognition, clustering, and MADM[J]. Expert Systems with Applications, 2021, 168:114264.
[22] LUO Minxia, ZHANG Yue. A new similarity measure between picture fuzzy sets and its application[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2020, 96:103956.
[23] GANIE A H, SINGH S. An innovative picture fuzzy distance measure and novel multi-attribute decision-making method[J]. Complex & Intelligent Systems, 2021, 7(2):781-805.
[24] GANIE A H. A picture fuzzy distance measure and its application to pattern recognition problems[J]. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2023, 20(1):71-85.
[25] GANIE A H, SINGH S, BHATIA P K. Some new correlation coefficients of picture fuzzy sets with applications[J]. Neural Computing and Applications, 2020, 32(16):12609-12625.

(编辑:陈丽萍)