

# $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子及其应用

杜文胜

(郑州大学商学院, 河南 郑州 450001)

**摘要:** 针对  $q$ -阶正交模糊多属性决策问题, 给出基于  $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子的信息融合方法以及应用。讨论  $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子的幂等性、单调性、有界性。研究了该算子的极限情形, 并利用加权幂平均函数的单调性给出该算子更为精确的边界刻画。提出  $q$ -阶正交模糊环境下基于该聚合算子的多属性决策方法, 通过体育赛事举办地的选取说明该方法的可行性与有效性。通过不同的参数取值对排序结果的影响并与其他聚合算子进行比较, 说明本研究方法的稳定性及计算简便的优点。

**关键词:**  $q$ -阶正交模糊集; 自对偶聚合算子; 多属性决策

**中图分类号:** O159; C934 **文献标志码:** A

**引用格式:** 杜文胜.  $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子及其应用[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(1): 120-126.

## $q$ -rung orthopair fuzzy self-dual aggregation operator and its application

DU Wensheng

(School of Business, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, Henan, China)

**Abstract:** To handle  $q$ -rung orthopair fuzzy multi-attribute decision making problems, an information fusion method is proposed based on the  $q$ -rung orthopair fuzzy self-dual aggregation operator, which is induced by the weighted power mean operator with its power being rung  $q$ . Some regular properties of this  $q$ -rung orthopair fuzzy aggregation operator are investigated, such as the idempotency, monotonicity and boundedness. The limiting case of this operator is examined as  $q$  approaches infinity, and the boundedness is precisely characterized by the monotonicity of weighted power means. The aggregation operator based approach is developed to deal with multi-attribute decision making problems under  $q$ -rung orthopair fuzzy environment. An illustrative example related to the venue selection for sporting events is proposed to show the effectiveness and feasibility of this approach. The influence of the parameter therein on the ranking results is discussed to demonstrate the robustness, and comparisons with some existing methods are presented, which implies the current method can maintain the final results with a simpler calculation.

**Key words:**  $q$ -rung orthopair fuzzy set; self-dual aggregation operator; multi-attribute decision making

## 0 引言

由于现代社会决策问题存在复杂性与不确定性, 因此决策理论应运而生。Zadeh<sup>[1]</sup>提出了处理不确定性的模糊集理论。Atanassov<sup>[2]</sup>引入了直觉模糊集理论, 该理论同时给出了隶属度和非隶属度 2 种信息, 分别表示支持和反对的程度。之后, Yager 等<sup>[3]</sup>提出了 Pythagorean 模糊集, 将直觉模糊集中隶属度与非隶属度之和小于等于 1 这一限制条件扩展到其平方和小于等于 1。Yager<sup>[4]</sup>提出了  $q$ -阶正交模糊集, 将约束条件进一步放松为隶属度与非隶属度的  $q$  次方之和不大于 1 (这里  $q \geq 1$ ), 从而更好满足不同偏好倾向的赋值<sup>[5-6]</sup>。

聚合算子是通过信息间的运算进行信息集结的有效工具。利用聚合算子可以将多源信息融合为一项复

收稿日期: 2023-05-29; 网络出版时间: 2024-02-28 17:15:05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12271493); 河南省自然科学基金资助项目(242300421154); 河南省高等学校青年骨干教师培养计划项目(2024GGJS001); 郑州大学青年人才创新团队支持计划项目(35240264)

作者简介: 杜文胜(1987—), 男, 副教授, 博士生导师, 博士, 研究方向为决策理论与决策分析。E-mail: wsdu@zzu.edu.cn

合信息,便于之后对方案排序或选取最优方案。 $q$ -阶正交模糊信息的聚合是  $q$ -阶正交模糊集理论的重要组成部分,相关研究引起学者的广泛关注<sup>[7-10]</sup>。基于代数运算,Liu 等<sup>[11]</sup>提出了  $q$ -阶正交模糊信息的加权算术平均和加权几何平均算子。考虑到指标间的依存关系,Wei 等<sup>[12]</sup>提出了  $q$ -阶正交模糊数的 Heronian 平均算子。Liu 等<sup>[13]</sup>引入了  $q$ -阶正交模糊数的 Bonferroni 平均算子,可以进行属性值间的交互。相应地,Liu 等<sup>[14]</sup>提出了基于 Archimedean 三角模运算的 Bonferroni 平均算子。

在文献[4]中,Yager 给出了根据聚合算子及其对偶构造  $q$ -阶正交模糊聚合算子的基本范式,利用聚合算子和对偶算子对隶属度和非隶属度分别进行聚合,这种方式可以保证运算结果依然为  $q$ -阶正交模糊数。文献[11]提出的 2 种算子均可以看作由加权几何平均聚合算子生成。针对 Pythagorean 模糊信息,文献[15-16]提出了分别考虑隶属度和非隶属度信息的聚合算子。次幂为  $q$  的加权幂平均算子及其对偶具有相同的聚合形式,这是区别于其他聚合算子的显著特点,因此,用该算子聚合  $q$ -阶正交模糊信息实际上只需要一种聚合函数,但目前尚未深入研究该算子的性质及其应用。

本文考虑  $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子,该算子对隶属度和非隶属度信息分别予以处理,研究该算子的各种性质,尤其是给出了该算子精确的边界刻画,提出  $q$ -阶正交模糊环境下基于该算子的多属性决策方法,并给出其在体育赛事举办地选取中的应用。

### 1 预备知识

**定义 1**<sup>[4]</sup> 设  $X$  为非空集合, $A$  为定义在  $X$  上的  $q$ -阶正交模糊集,其表达式为

$$A = \{ \langle x, u_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in X \}, \tag{1}$$

其中  $u_A(x)$  和  $\nu_A(x)$  分别表示元素  $x$  属于集合  $X$  的隶属度和非隶属度,并且满足  $0 \leq u_A(x) \leq 1, 0 \leq \nu_A(x) \leq 1$  以及  $0 \leq u_A^q(x) + \nu_A^q(x) \leq 1 (q \geq 1)$ 。

记  $\alpha = (u, \nu)$  为  $q$ -阶正交模糊数,即  $u, \nu$  满足  $0 \leq u, \nu \leq 1, u^q + \nu^q \leq 1$ 。显然, $q$ -阶正交模糊数的隶属度空间的大小随着参数  $q$  的增大而增大。特殊地,当  $q=1$  时, $\alpha$  退化为直觉模糊数;当  $q=2$  时, $\alpha$  退化为 Pythagorean 模糊数。直觉模糊数、Pythagorean 模糊数、 $q$ -阶正交模糊数的隶属度空间分别为  $uOv$  平面内  $u + \nu \leq 1, u^2 + \nu^2 \leq 1, u^q + \nu^q \leq 1$  的部分,如图 1 所示。

$q$ -阶正交模糊数之间的序关系  $\geq$  如下确定。

**定义 2**<sup>[4]</sup> 设  $\alpha = (u_1, \nu_1)$  和  $\beta = (u_2, \nu_2)$  为 2 个  $q$ -阶正交模糊数,则

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow u_1 \geq u_2, \nu_1 \leq \nu_2。$$

**定义 3**<sup>[17]</sup> 设映射  $\varphi: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ , 则称  $\varphi$  为

$[0, 1]^n$  上的聚合算子,若满足:(1)  $\varphi(0, 0, \dots, 0) = 0$ ; (2)  $\varphi(1, 1, \dots, 1) = 1$ ; (3)  $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \varphi(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , 其中  $a_i \geq b_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。

**定义 4**<sup>[17]</sup> 称映射  $\phi: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  为聚合算子  $\varphi$  关于模糊否定算子  $N$  的对偶聚合算子,若

$$\phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = N(\varphi(N(a_1), N(a_2), \dots, N(a_n))), \tag{2}$$

其中  $N$  满足:(1)  $N(0) = 1$ ; (2)  $N(1) = 0$ ; (3)  $N(a) \geq N(b)$ , 若  $0 \leq a \leq b \leq 1$ 。

进一步地,若  $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 则称聚合算子  $\phi$  为自对偶的。

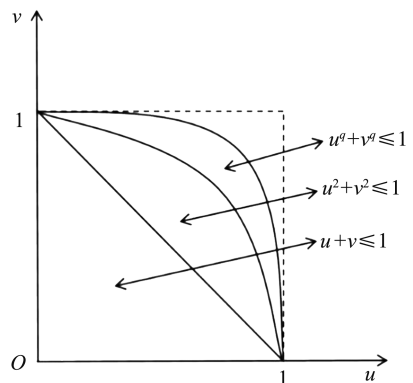


图 1 不同类型模糊数的隶属度空间  
Fig. 1 Spaces of membership degrees of different fuzzy numbers

### 2 $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子及其性质

本章首先给出  $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子的构造方式,并讨论其幂等性、单调性、有界性等性质。

**定义 5**<sup>[4]</sup> 设  $\alpha_i = (u_i, \nu_i) (i = 1, 2, \dots, n)$  为一组  $q$ -阶正交模糊数, $\varphi$  为聚合算子,构造映射  $\sigma: \psi^n \rightarrow \psi$ ,

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n), \phi(v_1, v_2, \dots, v_n)), \quad (3)$$

其中  $\psi$  为所有  $q$ -阶正交模糊数的集合, 则称  $\sigma$  为由  $\varphi$  及其对偶  $\phi$  所诱导的  $q$ -阶正交模糊聚合算子。

考虑次幂和阶数相等的加权幂平均聚合算子<sup>[18]</sup>, 即  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i x_i^q}$ , 以及  $q$ -阶正交模糊数自然的模糊否定算子  $N(x) = \sqrt[q]{1-x^q}$ , 其中  $x, x_i \in [0, 1]$ ,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  为属性权重向量, 即满足  $w_i \in [0, 1]$  和  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , 则由式(3)诱导的聚合算子为

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left( \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i u_i^q}, \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i v_i^q} \right). \quad (4)$$

可以验证该聚合算子为自对偶的, 并且计算结果仍为  $q$ -阶正交模糊数。具体地, 由于  $\alpha_i = (u_i, v_i)$  为  $q$ -阶正交模糊数, 即  $u_i^q + v_i^q \leq 1$ , 进而  $\sum_{i=1}^n w_i u_i^q + \sum_{i=1}^n w_i v_i^q = \sum_{i=1}^n w_i (u_i^q + v_i^q) \leq \sum_{i=1}^n w_i = 1$ 。

当  $q=1$  时, 式(4)化为直觉模糊自对偶算子<sup>[19]</sup>  $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left( \sum_{i=1}^n w_i u_i, \sum_{i=1}^n w_i v_i \right)$ ; 当  $q=2$  时, 式(4)化为 Pythagorean 模糊自对偶算子<sup>[15]</sup>  $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i u_i^2}, \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i v_i^2} \right)$ 。

接下来探讨该聚合算子的性质。

**定理 1 (幂等性)** 令  $\alpha_i = (u_i, v_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 为一组  $q$ -阶正交模糊数, 若不论  $i$  取何值, 均有  $u_i = u$ ,  $v_i = v$  成立, 则

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (u, v).$$

**定理 2 (单调性)** 令  $\alpha_i = (u_i, v_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 和  $\beta_i = (s_i, t_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 为 2 组  $q$ -阶正交模糊数, 若不论  $i$  取何值, 均有  $u_i \leq s_i$ ,  $v_i \geq t_i$  成立, 则

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \sigma(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

**定理 3 (有界性)** 设  $\alpha_i = (u_i, v_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 为一组  $q$ -阶正交模糊数, 则

$$\min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \leq \sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}. \quad (5)$$

**证明** 记  $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = (u, v)$ , 即  $u_i \leq u, v_i \geq v$  对任意  $i$  成立, 则有

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left( \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i u_i^q}, \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i v_i^q} \right) \leq \left( \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i u^q}, \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i v^q} \right) = (u, v),$$

即  $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 。类似地, 可得  $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 。

下面考虑该算子当  $q \rightarrow \infty$  时的极限情况, 此时有  $\lim_{q \rightarrow \infty} \sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) =$

$$\left( \lim_{q \rightarrow \infty} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i u_i^q}, \lim_{q \rightarrow \infty} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i v_i^q} \right) = (\max\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \max\{v_1, v_2, \dots, v_n\}).$$

事实上, 为了方便起见, 记  $u_j = \max\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , 则  $\sqrt[q]{w_j} u_j = \sqrt[q]{w_j} u_j^q \leq \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i u_i^q} \leq \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i u_j^q} = u_j$ 。另

外, 若  $w_j \neq 0$ , 则  $\lim_{q \rightarrow \infty} \sqrt[q]{w_j} u_j = u_j$ 。根据两边夹法则, 有  $\lim_{q \rightarrow \infty} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i u_i^q} = u_j = \max\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 。

类似地, 有  $\lim_{q \rightarrow \infty} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n w_i v_i^q} = \max\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  成立。

另外, 考虑到幂平均算子是关于次幂的递增函数<sup>[18]</sup>, 因此

$$\left( \sum_{i=1}^n w_i u_i, \max\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \right) \leq \sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \left( \max\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \sum_{i=1}^n w_i v_i \right). \quad (6)$$

与式(5)相比, 式(6)是对  $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子的有界性更精确的刻画。

进一步地, 若  $\alpha_i = (u_i, v_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 恰为  $q_0$ -阶正交模糊数, 即对任意  $q < q_0$ , 都存在  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 使得  $\alpha_i$  不为  $q$ -阶正交模糊数, 则式(6)变为

$$\left( \sqrt[q_0]{\sum_{i=1}^n w_i u_i^{q_0}}, \max\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \right) \leq \sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \left( \max\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \sqrt[q_0]{\sum_{i=1}^n w_i v_i^{q_0}} \right)。$$

### 3 $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子的应用步骤

设  $q$ -阶正交模糊环境下, 候选方案集为  $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , 属性集为  $C=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , 权重向量为  $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 。同时, 决策矩阵为  $M=(\alpha_{ij})_{m \times n}$ , 其中  $\alpha_{ij}=(u_{ij}, v_{ij})$ ,  $u_{ij}$  和  $v_{ij}$  分别表示方案  $x_i$  关于属性  $c_j$  的隶属度和非隶属度, 满足  $u_{ij}, v_{ij} \in [0, 1]$  且  $u_{ij}^q + v_{ij}^q \leq 1$ 。

接下来给出基于  $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子的多属性决策步骤。

**步骤 1** 标准化决策矩阵。属性包括效益型和成本型, 对于成本型属性的矩阵, 须要进行标准化处理, 而对于效益型属性, 则无须处理。执行如下标准化操作: 令  $\alpha_{ij}=(u_{ij}, v_{ij})$ ,  $\alpha'_{ij}=(v_{ij}, u_{ij})$ ,  $I_1$  表示效益型属性,  $I_2$  表示成本型属性, 则标准化后的属性值为

$$\alpha_{ij} \triangleq (u_{ij}, v_{ij}) = \begin{cases} \alpha_{ij}, & U_i \in I_1, \\ \alpha'_{ij}, & U_i \in I_2. \end{cases} \quad (7)$$

**步骤 2** 根据决策矩阵, 并利用式(4)计算各个候选方案的聚合信息:

$$\alpha_i = \sigma(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}) = \left( \sqrt[q]{\sum_{j=1}^n w_j u_{ij}^q}, \sqrt[q]{\sum_{j=1}^n w_j v_{ij}^q} \right)。$$

**步骤 3** 由于  $q$ -阶正交模糊数间的序关系  $\geq$  不为全序, 为比较步骤 2 计算的聚合结果, 须要计算每个方案的得分和精确度。

设  $\alpha_i=(u_i, v_i)$ , 关于  $\alpha_i$  的得分函数为

$$S(\alpha_i) = u_i^q - v_i^q, \quad (9)$$

关于  $\alpha_i$  的精确函数为

$$H(\alpha_i) = u_i^q + v_i^q, \quad (10)$$

因此,  $q$ -阶正交模糊数  $\alpha_i$  的得分和精确度分别为

$$S(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n w_j (u_{ij}^q - v_{ij}^q), \quad (11)$$

$$H(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n w_j (u_{ij}^q + v_{ij}^q)。 \quad (12)$$

**步骤 4** 根据步骤 3 中得到的得分和精确度进行综合排序, 选出最佳方案。具体地, 对于任意 2 个  $q$ -阶正交模糊数  $\alpha_i$  和  $\alpha_j$ , 有: (1) 若  $S(\alpha_i) > S(\alpha_j)$ , 则  $\alpha_i > \alpha_j$ ; (2) 若  $S(\alpha_i) = S(\alpha_j)$ , 进一步地, 若  $H(\alpha_i) > H(\alpha_j)$ , 则  $\alpha_i > \alpha_j$ ; 若  $H(\alpha_i) = H(\alpha_j)$ , 则  $\alpha_i = \alpha_j$ 。

根据以上步骤可以对候选方案进行排序和选取最优候选方案。

下面给出基于该算子的  $q$ -阶正交模糊多属性决策算法。

**算法 1** 基于  $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子的多属性决策算法。

输入  $q$ -阶正交模糊决策矩阵以及属性权重;

输出 候选方案排序/最优候选方案。

**步骤 1** 根据式(7)标准化决策矩阵;

**步骤 2** 根据式(8)聚合各候选方案;

**步骤 3** 根据式(9)、(10)计算各候选的得分和精确度;

**步骤 4** 根据聚合结果的排序, 给出候选方案的综合排序, 选择最佳方案。

该算法的核心为步骤 2, 须要计算每个候选方案的聚合结果, 即分别计算候选方案关于各属性的隶属度信息和非隶属度信息的加权幂平均, 因此该算法的计算复杂度为  $O(mn)$ 。

### 4 $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子的应用案例

本章通过体育赛事举办地的选取说明决策方法的可行性和稳定性, 并与已有聚合算子进行对比分析。

随着乡村振兴工作的全面推进,乡村体育迎来良好的发展机遇,逐步探索出“体育搭台,经济唱戏”等发展路径,推动体育产业与乡村振兴深度融合,赋能乡村振兴,带动乡村高质量发展。推动群众体育运动的发展,激发全民运动的热情,某省体育协会举办年度村级篮球联赛,其中决赛在某村镇进行。现有  $x_1, x_2, x_3$  村镇政府表示可以举办决赛赛事,影响赛事举办的4个因素是公众意愿  $c_1$ 、物资保障  $c_2$ 、办赛经验  $c_3$ 、技术支持  $c_4$ ,对应的属性权重向量为  $w = (0.3, 0.4, 0.2, 0.1)^T$ 。针对现有信息,将3个村镇在4个指标上的评价信息用  $q$ -阶正交模糊决策矩阵表示,结果见表1。根据决策矩阵,选取最适宜举办决赛赛事的村镇。

表1 候选方案在各指标上的评价信息  
Table 1 Evaluations of alternatives with respect to four attributes

村镇	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$x_1$	(0.5, 0.3)	(0.3, 0.6)	(0.4, 0.5)	(0.4, 0.1)
$x_2$	(0.3, 0.5)	(0.5, 0.2)	(0.5, 0.3)	(0.6, 0.3)
$x_3$	(0.3, 0.4)	(0.2, 0.7)	(0.3, 0.6)	(0.4, 0.4)

### 4.1 决策步骤

采用第3章中介绍的方法给出决策的具体过程如下:

**步骤1** 表1矩阵中的属性均为效益型,因此决策矩阵无须进行标准化。

**步骤2** 计算村镇  $x_1$  的聚合信息,如取  $q = 2$ ,据式(8)得  $\alpha_1 = \sigma(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}) =$

$$\left( \sqrt{\sum_{i=1}^4 w_i u_{1i}^2}, \sqrt{\sum_{i=1}^4 w_i v_{1i}^2} \right) = (0.3987, 0.4712)。$$

同理可得  $\alpha_2 = (0.4615, 0.3435)$  和  $\alpha_3 = (0.2775, 0.5762)$ 。

**步骤3** 计算各村镇的得分,由式(9)可得  $S(\alpha_1) = 0.3987^2 - 0.4712^2 = -0.0630$ 。同理可得  $S(\alpha_2) = 0.0950$  和  $S(\alpha_3) = -0.2550$ 。另外有  $H(\alpha_1) = 0.3810$ ,  $H(\alpha_2) = 0.3310$  和  $H(\alpha_3) = 0.4090$ 。

**步骤4** 由此可知  $S(\alpha_2) > S(\alpha_1) > S(\alpha_3)$ ,进而有  $\alpha_2 > \alpha_1 > \alpha_3$ ,则村镇间的排序为  $x_2 > x_1 > x_3$ ,即得最优方案为村镇  $x_2$ 。

### 4.2 参数对决策结果的影响

由式(8)可知,参数  $q$  的取值会对该算子的聚合结果产生一定影响,因此,本节采用控制变量法,令除  $q$  以外的其他参数保持不变,以此说明  $q$  的取值变化对聚合结果产生的影响。

因为决策矩阵中的每个值均可看作直觉模糊数,即  $q = 1$ ,所以本例中可取  $q \geq 1$ 。令  $q \in [1, 10]$ ,得到各村镇关于  $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子的相应得分函数如图2所示。

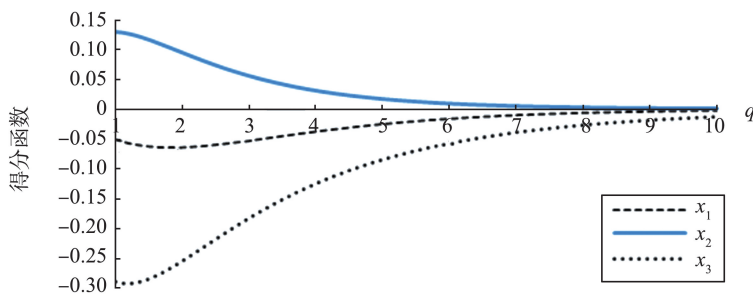


图2 候选方案关于自对偶聚合算子中参数  $q$  的得分函数

Fig.2 Scores of alternatives with different  $q$  in the self-dual aggregation operator

由图2可以看出,3个村镇的得分函数随着  $q$  的变化发生改变,但始终保持  $x_2 > x_1 > x_3$  成立,即最优方案总为村镇  $x_2$ ,由此说明该决策方法的稳定性。具体来说:一方面,  $x_1$  的得分函数随  $q$  的增大先减小后增大,  $x_2$  的得分函数随  $q$  的增大而减小,  $x_3$  的得分函数随  $q$  的增大而增大;另一方面,3个村镇的得分函数之差随着  $q$  的增大而不断减小。特殊地,当  $q$  取值接近10时,三者的得分函数均趋近于0。若决策者要求村镇间具有较高的区分度,那么可以取一个相对较小的  $q$  值,如取  $q \in [1, 3]$ 。

### 4.3 对比分析

为了说明  $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子的特点,将基于该算子的多属性决策方法与文献[10]中的基于

$q$ -阶正交模糊 Einstein 加权平均算子的多属性决策方法、文献[11]中的基于  $q$ -阶正交模糊加权平均算子的多属性决策方法、文献[12]中的基于  $q$ -阶正交模糊 Heronian 平均算子的多属性决策方法、文献[13]中的基于  $q$ -阶正交模糊 Bonferroni 平均算子的多属性决策方法以及文献[20]中的基于  $q$ -阶正交模糊 Hamacher 加权平均算子的多属性决策方法相比较。根据各种决策方法所得的得分函数与综合排序如表 2 所示。

表 2 候选方案基于不同聚合算子的得分函数与综合排序  
Table 2 Scores and rankings of alternatives by different aggregation operators

多属性决策方法	得分函数	综合排序
基于 $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子的决策方法( $q=2$ )	$S(\alpha_1) = -0.063\ 0, S(\alpha_2) = 0.095\ 0, S(\alpha_3) = -0.255\ 0$	$x_2 > x_1 > x_3$
基于 $q$ -阶正交模糊 Einstein 加权平均算子的决策方法( $q=2$ ) <sup>[10]</sup>	$S(\alpha_1) = -0.000\ 4, S(\alpha_2) = 0.124\ 8, S(\alpha_3) = -0.224\ 0$	$x_2 > x_1 > x_3$
基于 $q$ -阶正交模糊加权平均算子的决策方法( $q=2$ ) <sup>[11]</sup>	$S(\alpha_1) = 0.007\ 4, S(\alpha_2) = 0.129\ 3, S(\alpha_3) = -0.216\ 7$	$x_2 > x_1 > x_3$
基于 $q$ -阶正交模糊加权 Heronian 平均算子的决策方法( $s=t=1, q=2$ ) <sup>[12]</sup>	$S(\alpha_1) = -0.168\ 3, S(\alpha_2) = 0.006\ 8, S(\alpha_3) = -0.358\ 1$	$x_2 > x_1 > x_3$
基于 $q$ -阶正交模糊加权 Bonferroni 平均算子的决策方法 <sup>[13]</sup>	$S(\alpha_1) = -0.464\ 5, S(\alpha_2) = -0.394\ 7, S(\alpha_3) = -0.632\ 4$	$x_2 > x_1 > x_3$
基于 $q$ -阶正交模糊 Hamacher 加权平均算子的决策方法( $\gamma=3, q=2$ ) <sup>[20]</sup>	$S(\alpha_1) = -0.004\ 0, S(\alpha_2) = 0.122\ 0, S(\alpha_3) = -0.227\ 3$	$x_2 > x_1 > x_3$

根据表 2 可知,本文方法与其他方法得到的综合排序均为  $x_2 > x_1 > x_3$ ,说明了本文方法的合理性。这些聚合算子具有类似特征:文献[10-11,20]的决策方法基于变量之间的不同运算将权重信息带入聚合算子;文献[12]的决策方法可以处理多个变量之间的相关关系;文献[13]的决策方法则能够表示两两变量之间的相关关系。本文提出的  $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子则通过计算隶属度和非隶属度的加权  $q$  次幂平均进行信息聚合。同其他方法相比,本文提出的方法也具有一定的可行性与有效性。另外, $q$ -阶正交模糊自对偶聚合算子利用式(8)进行信息聚合,而其他算子的聚合方式更为复杂,因此,本文采用的聚合算子计算过程非常简洁,可以极大地减少运算量,提高决策效率。

## 5 结语

本文在  $q$ -阶正交模糊隶属度空间上定义了自对偶聚合算子,其中加权幂平均算子的幂恰为正交模糊数的阶数且模糊否定算子为  $q$ -阶正交模糊数的补运算,证明了该算子具有幂等性、单调性、有界性等性质,并利用加权幂平均算子关于次幂的单调性给出该算子更加精确的边界刻画,给出了基于该算子的  $q$ -阶正交模糊多属性决策方法。以赛事举办地选取实例说明了该方法的有效性,含有的参数展现算子灵活性,通过参数  $q$  取值的变化表明了该方法的稳定性,利用对比分析表明其合理性,同时该方法具有明显的计算简洁的特点,编程实现更加容易。

值得注意的是,在自对偶聚合算子中固定了幂平均算子的次幂,在一定程度上限制了聚合算子的灵活性,因此之后将继续研究  $q$ -阶正交模糊数的新型聚合算子。

### 参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3):338-353.  
 [2] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1):87-96.  
 [3] YAGER R R, ABBASOV A M. Pythagorean membership grades, complex numbers, and decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2013, 28(5):436-452.  
 [4] YAGER R R. Generalized orthopair fuzzy sets[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 25(5):1222-1230.  
 [5] 任睿,张超,庞继芳. 有限理性下多粒度  $q$ -RO 模糊粗糙集的最优粒度选择及其在并购对象选择中的应用[J]. 南京大学学报(自然科学版), 2020, 56(4):452-460.  
 REN Rui, ZHANG Chao, PANG Jifang. Optimal granularity selections of multigranulation  $q$ -RO fuzzy rough sets under

- bounded rationality and their applications in merger and acquisition target selections[J]. *Journal of Nanjing University (Natural Science)*, 2020, 56(4):452-460.
- [6] 周延年,徐彤,胡滨. 属性相关条件下广义  $q$ -ROF TODIM 决策方法[J]. *西北工业大学学报*, 2020, 38(5):1068-1073.  
ZHOU Yannian, XU Tong, HU Bin. Generalized  $q$ -ROF TODIM decision-making method considering attribute correlation[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2020, 38(5):1068-1073.
- [7] 王军,张润彤,朱晓敏. 广义正交模糊 Maclaurin 对称平均算子及其应用[J]. *计算机科学与探索*, 2019, 13(8):1411-1421.  
WANG Jun, ZHANG Runtong, ZHU Xiaomin. Generalized orthopair fuzzy Maclaurin symmetric mean operators and their application[J]. *Journal of Frontiers of Computer Science and Technology*, 2019, 13(8):1411-1421.
- [8] 陈艳如,王润玮,林志超,等. 基于区间 Orthopair 模糊 Heronian 测度的多属性群决策方法[J]. *武汉理工大学学报(信息与管理工程版)*, 2020, 42(4):319-325.  
CHEN Yanru, WANG Runwei, LIN Zhichao, et al. Multiple attribute group decision making based on interval-valued orthopair fuzzy Heronian measure[J]. *Journal of WUT (Information & Management Engineering)*, 2020, 42(4):319-325.
- [9] 杜文胜,徐涛. 广义正交模糊混合平均算子及其在多属性决策中的应用[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2021, 56(1):35-42.  
DU Wensheng, XU Tao. Generalized orthopair fuzzy hybrid aggregation operator and its application to multiple attribute decision making[J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2021, 56(1):35-42.
- [10] 杜玉琴,孙超,崔建新.  $q$ -阶正交区间模糊 Einstein 集成算子及其应用[J]. *复旦大学学报(自然科学版)*, 2022, 61(1):17-26.  
DU Yuqin, SUN Chao, CUI Jianxin.  $q$ -rung orthopair interval fuzzy Einstein aggregation operators and their application[J]. *Journal of Fudan University (Natural Science)*, 2022, 61(1):17-26.
- [11] LIU Peide, WANG Peng. Some  $q$ -rung orthopair fuzzy aggregation operators and their applications to multiple-attribute decision making[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2018, 33(2):259-280.
- [12] WEI Guiwu, GAO Hui, WEI Yu. Some  $q$ -rung orthopair fuzzy Heronian mean operators in multiple attribute decision making [J]. *International Journal of Intelligent System*, 2018, 33(7):1426-1458.
- [13] LIU Peide, LIU Junlin. Some  $q$ -rung orthopair fuzzy Bonferroni mean operators and their application to multi-attribute group decision making[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2018, 33(2):315-347.
- [14] LIU Peide, WANG Peng. Multiple-attribute decision making based on Archimedean Bonferroni operators of  $q$ -rung orthopair fuzzy numbers[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 27(5):834-848.
- [15] PENG Xindong, YANG Yong. Some results for Pythagorean fuzzy sets[J]. *International Journal of Intelligent Systems*. 2015, 30(11):1133-1160.
- [16] PENG Xindong, YUAN Huiyong. Fundamental properties of Pythagorean fuzzy aggregation operators[J]. *Fundamenta Informaticae*, 2016, 147(4):415-446.
- [17] BELIAKOV G, BUSTINCE H, CALVO T. A practical guide to averaging functions[M]. Heidelberg:Springer, 2016.
- [18] BULLEN P S. Handbook of means and their inequalities[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [19] NGUYEN H. Some new operations on Atanassov's intuitionistic fuzzy sets in decision-making problems [J]. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2020, 38(1):639-651.
- [20] DARKO A P, LIANG D C. Some  $q$ -rung orthopair fuzzy Hamacher aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making with modified EDAS method[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2020, 87:103259.

(编辑:陈丽萍)