山东大学学报(理学版)2025 年 2 月 第 60 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.2, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0001-08　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.342

S-超格理想的相关性质

刘妮,崔盼盼
(陕西师范大学数学与统计学院, 陕西 西安 710119)

摘要:本文对 S-超格理想的性质进行了探究。证明了两个 S-超格的 S-超格理想的直积是它们直积的 S-超格理想,S-超格理想在 S-超格满同态下的像和原像仍为 S-超格理想,任意 S-超格的全体 S-超格理想构成一个代数的有顶交结构。举例说明了对于 S-超格同余,最小元 0 所在的同余类一般不是 S-超格理想,并给出了它是 S-超格理想的一个充分条件,同时对任意 S-超格理想,构造了以其为同余类的最大的 S-超格同余。

关键词:超格;S-超格;S-超格理想;S-超格同余;交结构
中图分类号:O153.1　**文献标志码**:A
引用格式:刘妮,崔盼盼.S-超格理想的相关性质[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):1-8.

On the properties of S-hyperlattice ideals

LIU Ni, CUI Panpan
(School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, Shaanxi, China)

Abstract: In this paper, the properties of S-hyperlattice ideals are explored. It is proved that the direct product of S-hyperlattice ideals of two S-hyperlattices is an S-hyperlattice ideal of their direct product, the homomorphic image and preimage of S-hyperlattice ideal are still S-hyperlattice ideals, the set of all S-hyperlattice ideals of an S-hyperlattice is an algebraic topped meet structure. It is illustrated that for an S-hyperlattice congruence, the congruence class of the smallest element zero is generally not an S-hyperlattice ideal, and a sufficient condition for it to be an S-hyperlattice ideal is given. While for an S-hyperlattice ideal, a maximal S-hyperlattice congruence with it as a congruence class is constructed.
Key words: hyperlattice; S-hyperlattice; S-hyperlattice ideal; S-hyperlattice congruence; meet structure

0 引言

1934 年,Marty 提出了超群的概念[1],开启了超代数系统的研究。超环[2]、超 BCI-代数[3]等超代数结构相继被提出并得到了比较系统的研究。超代数理论不仅在数学领域有重要应用[4],而且在物理、化学、生物等学科也有一定的应用[5-7]。格既是一种特殊的序结构,又是带有两个二元运算的代数结构。Konstaninidou 等[8]将格中两个二元运算中的并运算推广为超运算而得到了超格(也称为并超格)的概念。郭效芝等[9]将格中两个二元运算都推广为超运算而定义了一种新的超格。近年来,这两种不同的超格都得到了进一步的研究[10-17],同时一些特殊的超格,如分配超格[12]、完备并超格[13]、强并超格[14]、序超格[15]相继出现。特别地,文献[10]和文献[11]分别对两种定义下的超格的理想、同态等进行了系统研究,得到了一些较好的结论。

群 G 作用到集合上可得 G-集[18],环 R 作用到加群上可得 R-模[19],这种作用也被应用到了序代数的研究中,如文献[20]将序幺半群 S 作用到偏序集上得到了 S-偏序集,文献[21-22]将格序幺半群 S 作用到格上引入了 S-格的概念,文献[23-24]则将超格序幺半群 S 作用到超格上定义了 S-超格。本文讨论 S-超格理想的相关性质,研究 S-超格理想的结构,并探究 S-超格同余与 S-超格理想的关系。

收稿日期:2023-08-04; **网络出版时间**:2024-02-28 09:43:23
第一作者:刘妮(1976—),女,副教授,博士,研究方向为序代数与 Domain 理论. E-mail:niliu@snnu.edu.cn

1　预备知识

设 L 是任一非空集合，$P^*(L)$ 表示 L 的所有非空子集构成的集合，映射 $\circ: L\times L\to P^*(L)$ 是 L 上一个二元超运算，则称 $(L,\circ)$ 为一个超群胚。

设 $(L,\circ)$ 为一个超群胚，$\forall a,b,c\in L$，$A,B\in P^*(L)$，记：

（1）$c\circ A=\bigcup\limits_{a\in A} c\circ a$，$A\circ c=\bigcup\limits_{a\in A} a\circ c$。

（2）$A\circ B=\bigcup\limits_{a\in A,b\in B} a\circ b$。

定义 1[8,16]　设 L 是一个非空集合，$\vee$ 是 L 上的一个二元超运算，$\wedge$ 是 L 上的二元运算，若 $\forall a,b,c\in L$，都有

（1）$a\in a\vee a$，$a=a\wedge a$；

（2）$a\vee b=b\vee a$，$a\wedge b=b\wedge a$；

（3）$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$，$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$；

（4）$a\in a\vee(a\wedge b)$，$a\in a\wedge(a\vee b)$，

则称 L 是一个并超格，记为 $(L,\vee,\wedge)$。若 L 还满足

（5）$a\in a\vee b\Leftrightarrow b=a\wedge b$，

则称 L 为一个强并超格。

同样地，若 L 中的 $\wedge$ 为二元超运算，$\vee$ 为二元运算，则可定义交超格 $(L,\vee,\wedge)$ 和强交超格。

注 1　若 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个并超格，则 $(L,\wedge)$ 是一个交半格，故可诱导 L 上的一个自然偏序关系 $\leqslant$：

$$\forall x,y\in L,\quad x\leqslant y\Leftrightarrow x=x\wedge y。$$

定义 2[9]　设 L 是一个非空集合，$\vee$ 和 $\wedge$ 是 L 上的二元超运算，若 $\forall a,b,c\in L$，都有

（1）$a\in a\vee a$，$a\in a\wedge a$；

（2）$a\vee b=b\vee a$，$a\wedge b=b\wedge a$；

（3）$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$，$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$；

（4）$a\in a\vee(a\wedge b)$，$a\in a\wedge(a\vee b)$，

则称 L 是一个超格，记为 $(L,\vee,\wedge)$。

定义 3[16]　设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个并超格，若 $\forall a,b,c\in L$，都有 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$，则称 L 是 $\wedge$-分配并超格，简称为分配并超格。

命题 1[17]　设 $(L,\vee,\wedge)$ 为含有最小元 0 的分配并超格，则 $0\vee 0=\{0\}$。

命题 2[17]　设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个并超格，则 $\forall a,b\in L$，存在 $a_1,b_1\in a\vee b$，使得 $a\leqslant a_1$，$b\leqslant b_1$。

定义 4[16]　设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个并超格，I 是 L 的非空子集，若 I 满足：

（1）$\forall x,y\in I$，$x\vee y\subseteq I$；

（2）$\forall x\in I$，$y\in L$ 且 $y\leqslant x$，都有 $y\in I$，

则称 I 为 L 的超格理想。

设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个并超格，且 ρ 为 L 上的一个等价关系。$\forall A,B\in P^*(L)$，$(A,B)\in\bar{\rho}$ 表示：$\forall a\in A$，存在 $b\in B$ 使得 $a\rho b$；$\forall b\in B$，存在 $a\in A$ 使得 $a\rho b$。

定义 5[11]　设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个并超格，ρ 为 L 上的一个等价关系，若 $\forall a_1,a_2,b_1,b_2\in L$，由 $(a_1,b_1)\in\rho$，$(a_2,b_2)\in\rho$ 均可得 $(a_1\vee a_2,b_1\vee b_2)\in\bar{\rho}$，$(a_1\wedge a_2,b_1\wedge b_2)\in\rho$，则称 ρ 为并超格 L 上的同余关系。

定义 6　设 $(L_1,\vee_1,\wedge_1)$ 和 $(L_2,\vee_2,\wedge_2)$ 是两个并超格，$f: L_1\to L_2$ 是一个映射，若 $\forall a,b\in L_1$，有 $f(a\vee_1 b)=f(a)\vee_2 f(b)$，$f(a\wedge_1 b)=f(a)\wedge_2 f(b)$，则称 f 是从 $(L_1,\vee_1,\wedge_1)$ 到 $(L_2,\vee_2,\wedge_2)$ 的一个并超格同态；若 f 还是一个双射，则称 f 为并超格同构。

定义 7[25]　设 X 是一个集合，Ω 是 X 的一些子集构成的集合（关于包含序构成偏序集），若 Ω 满足：

（1）对每个非空集族 $\{A_i\}_{i\in I}\subseteq\Omega$，都有 $\bigcap\limits_{i\in I} A_i\in\Omega$；

(2) $X\in\Omega$,
则称 Ω 为 X 上的有顶交结构，且 Ω 是一个完备格。若 Ω 还满足
(3) 对每个定向集族 $\{A_i\}_{i\in I}\subseteq\Omega$，都有 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\in\Omega$,
则称 Ω 为代数的有顶交结构。

2 S-超格理想和 S-超格同余

本节主要讨论 S-超格理想的相关性质，并探究 S-超格理想和 S-超格同余之间的联系。为了不致混淆，以下所提到的超格均指并超格。

定义 8[23] 设 $(S,\cdot)$ 是一个幺半群，$(S,\vee,\wedge)$ 是一个超格，若 $\forall a,b,c\in S$，都有
(1) $c(a\vee b)=ca\vee cb$, $c(a\wedge b)=ca\wedge cb$;
(2) $(a\vee b)c=ac\vee bc$, $(a\wedge b)c=ac\wedge bc$,
则称 $(S,\vee,\wedge,\cdot)$ 为超格序幺半群。

定义 9[23] 设 S 是超格序幺半群，L 为超格，f 是从 $S\times L$ 到 L 的映射，简记为 $f(s,a)=s\cdot a$，若 $\forall s,t\in S$, $a,b\in L$，都有
(1) $s\cdot(a\vee b)=(s\cdot a)\vee(s\cdot b)$, $s\cdot(a\wedge b)=(s\cdot a)\wedge(s\cdot b)$;
(2) $(s\vee t)\cdot a=(s\cdot a)\vee(t\cdot a)$, $(s\wedge t)\cdot a=(s\cdot a)\wedge(t\cdot a)$;
(3) $(st)\cdot a=s\cdot(t\cdot a)$;
(4) $1\cdot a=a$,
则称超格 (L,f) 为左 S-超格，简记为 L。若 L 还是一个分配超格，则称 L 为分配左 S-超格。

文中将左 S-超格简记为 S-超格，分配左 S-超格简记为分配 S-超格。

例 1 设 $S=\{s_1,s_2\}$，定义 S 的“$\cdot$”、“$\vee$”和“$\wedge$”运算如表 1—3 所示，可验证 $(S,\vee,\wedge,\cdot)$ 是超格序幺半群。

表 1 “$\cdot$”运算
Table 1 “$\cdot$” operation

$\cdot$	s_1	s_2
s_1	s_1	s_2
s_2	s_2	s_2

表 2 “$\vee$”运算
Table 2 “$\vee$” operation

$\vee$	s_1	s_2
s_1	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_1,s_2\}$
s_2	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_2\}$

表 3 “$\wedge$”运算
Table 3 “$\wedge$” operation

$\wedge$	s_1	s_2
s_1	s_1	s_1
s_2	s_1	s_2

设 $L=\{0,a,b\}$，定义 L 的“$\vee$”和“$\wedge$”运算以及 S 作用如表 4—6 所示，可验证 L 为 S-超格。

表 4 “$\wedge$”运算
Table 4 “$\wedge$” operation

$\wedge$	0	a	b
0	0	0	0
a	0	a	a
b	0	a	b

表 5 “$\vee$”运算
Table 5 “$\vee$” operation

$\vee$	0	a	b
0	$\{0,b\}$	$\{0,a\}$	$\{0,b\}$
a	$\{0,a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
b	$\{0,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$

表 6 S-作用
Table 6 S-action

$\cdot$	0	a	b
s_1	0	a	b
s_2	b	b	b

定义 10[23-24] 设 S 是超格序幺半群，$(L_1,\vee_1,\wedge_1)$、$(L_2,\vee_2,\wedge_2)$ 是 S-超格，若 $f\colon L_1\to L_2$ 为超格同态，且满足 $\forall s\in S$, $a\in L_1$, $f(s\cdot a)=s\cdot f(a)$，则称 f 是 S-超格同态；若 f 还是一个双射，则称 f 为 S-超格同构。

定义 11[24] 设 L 是 S-超格，ρ 是超格 $(L,\vee,\wedge)$ 上的一个超格同余，S 是半群，若 ρ 和 S-作用是兼容的，即 $\forall a,b\in L$, $s\in S$，由 $(a,b)\in\rho$ 可推出 $(s\cdot a,s\cdot b)\in\rho$，则称 ρ 是 L 上的 S-超格同余。

命题 3 设 $(L_1,\vee_1,{}_1)$、$(L_2,\vee_2,\wedge_2)$ 是 S-超格，则 $(L_1\times L_2,\vee,\wedge)$ 也是 S-超格。

证明 类似于文献[9]中的定理 2，可证明并超格的直积仍为并超格，即 $(L_1\times L_2,\vee,\wedge)$ 为超格。设 S 为超格序幺半群，定义 $L_1\times L_2$ 上的 S 作用为：$\forall s\in S$, $(x_1,x_2)\in L_1\times L_2$, $s\cdot(x_1,x_2)=(s\cdot x_1,s\cdot x_2)$。下面验证 $L_1\times L_2$ 为 S-超格。$\forall s,t\in S$, (x_1,x_2), $(y_1,y_2)\in L_1\times L_2$，则
(1) $(s\vee t)\cdot(x_1,x_2)=((s\vee t)\cdot x_1,(s\vee t)\cdot x_2)=((s\cdot x_1)\vee_1(t\cdot x_1),(s\cdot x_2)\vee_2(t\cdot x_2))$

$$=(s\cdot x_1,s\cdot x_2)\vee(t\cdot x_1,t\cdot x_2)=(s\cdot(x_1,x_2))\vee(t\cdot(x_1,x_2)),$$

易证$(s\wedge t)\cdot(x_1,x_2)=(s\cdot(x_1,x_2))\wedge(t\cdot(x_1,x_2))$。

(2)
$$\begin{aligned}s\cdot((x_1,x_2)\vee(y_1,y_2))&=\{s\cdot(c_1,c_2)\mid c_1\in x_1\vee_1 y_1,c_2\in x_2\vee_2 y_2\}\\&=\{(s\cdot c_1,s\cdot c_2)\mid s\cdot c_1\in(s\cdot x_1)\vee_1(s\cdot y_1),\ s\cdot c_2\in(s\cdot x_2)\vee_2(s\cdot y_2)\}\\&=(s\cdot x_1,s\cdot x_2)\vee(s\cdot y_1,s\cdot y_2)=(s\cdot(x_1,x_2))\vee(s\cdot(y_1,y_2)),\end{aligned}$$

易证 $s\cdot((x_1,x_2)\wedge(y_1,y_2))=(s\cdot(x_1,x_2))\wedge(s\cdot(y_1,y_2))$。

(3) $(st)\cdot(x_1,x_2)=((st)\cdot x_1,(st)\cdot x_2)=(s\cdot(t\cdot x_1),s\cdot(t\cdot x_2))=s\cdot(t\cdot x_1,t\cdot x_2)=s\cdot(t\cdot(x_1,x_2))$。

(4) $1\cdot(x_1,x_2)=(1\cdot x_1,1\cdot x_2)=(x_1,x_2)$。

综上所述,$L_1\times L_2$ 为 S-超格。

定义 12[23-24]　设 S 是超格序幺半群,L 为 S-超格,I 为 L 的任一非空子集,若 I 满足下列条件:

(1) I 为 L 的一个超格理想;

(2) $\forall a\in I,\ s\in S,\ s\cdot a\in I$,

则称 I 为 L 的 S-超格理想。用 $SI(L)$ 表示 L 的所有 S-超格理想构成的集合,其关于包含序构成偏序集。

例 2[23]　设 L 是分配 S-超格,则$\forall\ a\in L$, $(S\cdot a]=\{b\in L\mid\exists s\in S,\ b\leqslant s\cdot a\}$是 L 的 S-超格理想。

例 3　设 $S=\{a,\ b\}$,定义 S 的"·"、"∨"和"∧"运算如表 7—9 所示,可验证$(S,\vee,\wedge,\cdot)$是超格序幺半群。

表 7　"·"运算
Table 7　"·" operation

·	a	b
a	a	b
b	b	b

表 8　"∨"运算
Table 8　"∨" operation

∨	a	b
a	$\{a\}$	$\{b\}$
b	$\{b\}$	$\{b\}$

表 9　"∧"运算
Table 9　"∧" operation

∧	a	b
a	a	a
b	a	b

设 $L=\{0,\ 1\}$,定义 L 的"∨"和"∧"运算以及 S 作用如表 10—12 所示,可验证$(L,\vee,\wedge)$是 S-超格,且 $SI(L)=\{\{0\},\ \{0,\ 1\}\}$。

表 10　"∧"运算
Table 10　"∧" operation

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

表 11　"∨"运算
Table 11　"∨" operation

∨	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$

表 12　S-作用
Table 12　S-action

·	0	1
a	0	1
b	1	1

命题 4　设$(L,\vee,\wedge)$是 S-超格,若 I_1、I_2 为 L 的两个 S-超格理想,则 $I_1\cap I_2$ 是 L 的 S-超格理想。

证明　因为$(L,\wedge)$是交半格,$I_1\cap I_2$ 是下集,所以$\forall x,y\in I_1\cap I_2$, $x\wedge y$ 存在且$x\wedge y\in I_1\cap I_2$,即 $I_1\cap I_2$ 非空。由 I_1 和 I_2 是 S-超格理想知,$\forall x,\ y\in I_1\cap I_2,\ s\in S,\ x\vee y\subseteq I_1\cap I_2,\ s\cdot x\in I_1\cap I_2$。综上可知,$I_1\cap I_2$ 是 L 的 S-超格理想。

引理 1　设 L 是含有最小元 0 的 S-超格,$\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 L 的任意一族 S-超格理想,则$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$ 也是 L 的 S-超格理想。

证明　因为一族下集的交还是下集,$0\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$,所以$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$ 是非空的下集。$\forall a,b\in L,s\in S$,若 a, $b\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$,则对任意的$\alpha\in\Lambda$,有 a, $b\in I_\alpha$。因为 I_α 是 S-超格理想,所以 $a\vee b\subseteq I_\alpha$, $s\cdot a\in I_\alpha$,即$a\vee b\subseteq\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$, $s\cdot a\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$。综上可知,$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$是 S-超格理想。

引理 2　设 L 是 S-超格,$\{J_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 L 中的 S-超格理想构成的定向集族,则$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$是 L 的 S-超格理想,且$\bigvee\limits_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$。

证明　显然$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$是非空的。$\forall x,y\in L$,则

(1) 若 $x,y\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$,则存在$\alpha_1,\alpha_2\in\Lambda$,使得 $x\in J_{\alpha_1},y\in J_{\alpha_2}$。因为$\{J_\alpha\}\alpha\in\Lambda$ 是定向集族,所以存在$\alpha_3\in\Lambda$,使得$J_{\alpha_1}\subseteq J_{\alpha_3}$, $J_{\alpha_2}\subseteq J_{\alpha_3}$,于是有 $x,y\in J_{\alpha_3}$,由 J_{α_3}是 S-超格理想知,$x\vee y\subseteq J_{\alpha_3}$,即$x\vee y\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$。

(2) 若$x\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$，且$y\leqslant x$，则存在$\alpha\in\Lambda$，使得$x\in J_\alpha$。由$J_\alpha$是S-超格理想知，$y\in J_\alpha$，即$y\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$。

(3) 若$x\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$，$s\in S$，则存在$\alpha\in\Lambda$，使得$x\in J_\alpha$。由$J_\alpha$是S-超格理想知，$s\cdot x\in J_\alpha$，即$s\cdot x\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$。

综上可知，$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$是S-超格理想，显然$\bigvee_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha$。

由引理 1 和引理 2 可得以下结论。

定理 1　设L是含有最小元 0 的S-超格，则$SI(L)$是一个代数的有顶交结构，因而是完备格，其中$\bigwedge_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$，$\bigvee_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha=\bigcap\{B\in SI(L)\mid\bigcup_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha\subseteq B\}$（$\forall\ \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq SI(L)$）。

注 2　设L是S-超格，A是L的非空子集，则L中包含A的所有S-超格理想的交仍然是S-超格理想，它也是包含A的最小的S-超格理想，称其为由子集A生成的S-超格理想，记为$\langle A\rangle$，即$\langle A\rangle=\bigcap\{I\mid I\in SI(L),A\subseteq I\}$。当$L$为分配S-超格时，例 2 中的$(S\cdot a]$恰为由$a$生成的S-超格理想，即$\langle a\rangle=(S\cdot a]$。

定理 2　设$(L_1,\vee_1,\wedge_1)$、$(L_2,\vee_2,\wedge_2)$是S-超格，I_1、I_2分别是L_1、L_2的S-超格理想，则$I_1\times I_2$是$(L_1\times L_2,\vee,\wedge)$的S-超格理想。

证明　由命题 3 知$(L_1\times L_2,\vee,\wedge)$为S-超格，下证$I_1\times I_2$是$L_1\times L_2$的S-超格理想。

(1) $\forall(a_1,a_2)$，$(b_1,b_2)\in I_1\times I_2$，$(a_1,a_2)\vee(b_1,b_2)=\{(a,b)\mid a\in a_1\vee_1 b_1,\ b\in a_2\vee_2 b_2\}$。因为$I_1$、$I_2$分别是$L_1$、$L_2$的S-超格理想，所以$a_1\vee_1 b_1\subseteq I_1$，$a_2\vee_2 b_2\subseteq I_2$，即$(a_1,a_2)\vee(b_1,b_2)\subseteq I_1\times I_2$。

(2) $\forall(a,b)\in I_1\times I_2$，$(c,d)\in L_1\times L_2$，且满足$(c,d)\leqslant(a,b)$，即$c\leqslant a$，$d\leqslant b$。因为$I_1$、$I_2$是S-超格理想，所以$c\in I_1$，$d\in I_2$，即$(c,d)\in I_1\times I_2$。

(3) $\forall(a,b)\in I_1\times I_2$，$s\in S$，因为$s\cdot(a,b)=(s\cdot a,s\cdot b)$，$I_1$、$I_2$是S-超格理想，所以$s\cdot a\in I_1$，$s\cdot b\in I_2$，即$s\cdot(a,b)\in I_1\times I_2$。

综上，$I_1\times I_2$是$(L_1\times L_2,\vee,\wedge)$的S-超格理想。

命题 5　设$(L_1,\vee_1,\wedge_1)$、$(L_2,\vee_2,\wedge_2)$是两个S-超格，$f:L_1\to L_2$是满的S-超格同态，若I是L_1的S-超格理想，则$f(I)$是L_2的S-超格理想。

证明　显然$f(I)$是L_2的非空子集。下证$f(I)$满足S-超格理想的 3 个条件。

(1) $\forall x,y\in f(I)$，存在a，$b\in I$，使得$f(a)=x$，$f(b)=y$。由I是L_1的S-超格理想知，$a\vee_1 b\subseteq I$。因为f是S-超格同态，所以$x\vee_2 y=f(a)\vee_2 f(b)=f(a\vee_1 b)\subseteq f(I)$。

(2) $\forall x\in f(I)$，$y\in L_2$且$y\leqslant x$，由f是满同态知，存在$a\in I$，$b\in L_1$，使得$f(a)=x$，$f(b)=y$。因为I是S-超格理想，$a\wedge_1 b\leqslant a$，所以$a\wedge_1 b\in I$，$f(b)=f(a)\wedge_2 f(b)=f(a\wedge_1 b)\in f(I)$，即$y\in f(I)$。

(3) $\forall x\in f(I)$，$s\in S$，显然存在$a\in I$，使得$f(a)=x$。由I是L_1的S-超格理想知，$s\cdot a\in I$。因为f是S-超格同态，所以$s\cdot f(a)=f(s\cdot a)\in f(I)$，即$s\cdot x\in f(I)$。

综上可知，$f(I)$是L_2的S-超格理想。

命题 6　设$(L_1,\vee_1,\wedge_1)$、$(L_2,\vee_2,\wedge_2)$是两个S-超格，$f:L_1\to L_2$是S-超格同态，若I是L_2的S-超格理想且$f^{-1}(I)\neq\varnothing$，则$f^{-1}(I)$是L_1的S-超格理想。

证明　设$f^{-1}(I)$是L_1的非空子集，下证$f^{-1}(I)$满足S-超格理想的 3 个条件。

(1) $\forall a,b\in f^{-1}(I)$，即$f(a)$，$f(b)\in I$，有$f(a)\vee_2 f(b)\subseteq I$。因为$f$是S-超格同态，所以$f(a\vee_1 b)=f(a)\vee_2 f(b)\subseteq I$，即$a\vee_1 b\subseteq f^{-1}(I)$。

(2) $\forall a\in f^{-1}(I)$，$b\in L_1$且$b\leqslant a$，因为f是S-超格同态，所以$f(b)=f(a\wedge_1 b)=f(a)\wedge_2 f(b)$，即$f(b)\leqslant f(a)$。由$f(a)\in I$知，$f(b)\in I$，即$b\in f^{-1}(I)$。

(3) $\forall a\in f^{-1}(I)$，$s\in S$，有$f(a)\in I$。因为I是S-超格理想，所以$s\cdot f(a)\in I$。由f是S-超格同态知，$f(s\cdot a)=s\cdot f(a)\in I$，即$s\cdot a\in f^{-1}(I)$。

综上，$f^{-1}(I)$是L_1的S-超格理想。

在格论中，若θ为格L上的同余关系，则$\forall a\in L$，L上的任意一个同余类$[a]_\theta$都是子格，但不一定是理想；若$0\in L$，则 0 所在的同余类$[0]_\theta$一定是格的理想。由文献[22]可知$[0]_\theta$是S-格理想，但对S-超格，此结

论一般不成立。

例 4 设 L 为例 1 中的 S-超格,θ 是由划分$\{\{0, a\}, \{b\}\}$确定的等价关系,可以验证 θ 是 L 上的 S-超格同余,但$[0]_\theta=\{0,a\}$不是 S-超格理想。

下面定理给出了对于含有最小元 0 的 S-超格,$[0]_\theta$ 是 S-超格理想的一个充分条件。

定理 3 设 L 是 S-超格,θ 是 L 上的同余关系,0 为 L 的最小元,若 $\forall s\in S$, $s\cdot 0=0$,则$[0]_\theta$ 为 S-超格理想。

证明 显然$[0]_\theta$ 非空。下证$[0]_\theta$ 满足 S-超格理想的 3 个条件。

(1) $\forall a,b\in[0]_\theta$,即$(a,0)\in\theta$, $(b,0)\in\theta$,由 θ 是同余关系知:$(a\vee b, 0\vee 0)\in\overline{\theta}$,则$\forall$ $x\in a\vee b$,存在 $y\in 0\vee 0$,使得$(x, y)\in\theta$。因为 $0\vee 0=(s\cdot 0)\vee(s\cdot 0)=(s\vee s)\cdot 0=\{0\}$,所以 $y=0$, $x\in[0]_\theta$,即 $a\vee b\subseteq[0]_\theta$。

(2) $\forall a\in[0]_\theta$, $b\in L$,且 $b\leqslant a$,有$(a,0)\in\theta$。由 θ 是同余关系知,$(a\wedge b,0\wedge b)\in\theta$,因此$(b,0)\in\theta$,即 $b\in[0]_\theta$。

(3) $\forall$ $a\in[0]_\theta$, $s\in S$,有$(a,0)\in\theta$,由 θ 是同余关系知,$(s\cdot a, s\cdot 0)\in\theta$,因此$(s\cdot a,0)\in\theta$,即 $s\cdot a\in[0]_\theta$。

综上所述,$[0]_\theta$ 为 S-超格理想。

对于给定的 S-超格理想,以下将构造一个 S-超格同余,并且得到一个以它为同余类的最大的 S-超格同余。

定理 4 设 L 是分配 S-超格,I 是 L 上的 S-超格理想,在 L 上规定二元关系 θ_I 如下:

$$\forall a,b\in L,\quad (a,b)\in\theta_I\Leftrightarrow\exists i\in I,\quad a\wedge i=b\wedge i,$$

则 θ_I 为 S-超格同余,且$\forall x,y\in I$,都有$(x,y)\in\theta_I$,即 I 包含在 θ_I 的某个同余类中。

证明 $\forall x,y\in I$, $x\wedge y\in I$, $x\wedge(x\wedge y)=y\wedge(x\wedge y)$,因此,$(x,y)\in\theta_I$。以下须要证明 θ_I 是 S-超格同余。

(1) 证明 θ_I 是 L 上的等价关系。显然 θ_I 是自反的和对称的,下证传递性。

若$(x,y)\in\theta_I$,$(y,z)\in\theta_I$,则存在 $i_1,i_2\in I$,使得 $x\wedge i_1=y\wedge i_1$, $y\wedge i_2=z\wedge i_2$。因为 $x\wedge i_1\wedge i_2=z\wedge i_1\wedge i_2$,即 $x\wedge(i_1\wedge i_2)=z\wedge(i_1\wedge i_2)$,由 I 是 S-超格理想知,$i_1\wedge i_2\in I$,即$(x,z)\in\theta_I$,所以 θ_I 是 L 上的等价关系。

(2) 证明若$(x,y)\in\theta_I$,则$\forall s\in S$, $(s\cdot x,s\cdot y)\in\theta_I$。

由$(x,y)\in\theta_I$知,存在$i\in I$,使得 $x\wedge i=y\wedge i$,则 $s\cdot(x\wedge i)=s\cdot(y\wedge i)$,即$(s\cdot x)\wedge(s\cdot i)=(s\cdot y)\wedge(s\cdot i)$。显然$s\cdot i\in I$,故$(s\cdot x, s\cdot y)\in\theta_I$。

(3) 由$(x,y)\in\theta_I$证明$\forall z\in L$, $(x\wedge z,y\wedge z)\in\theta_I$, $(x\vee z,y\vee z)\in\overline{\theta_I}$。

由$(x,y)\in\theta_I$知,存在$i\in I$,使得 $x\wedge i=y\wedge i$,则$(x\wedge i)\wedge z=(y\wedge i)\wedge z$,即$(x\wedge z)\wedge i=(y\wedge z)\wedge i$,故$(x\wedge z,y\wedge z)\in\theta_I$。因为 L 是分配 S-超格,所以$(x\vee z)\wedge i=(x\wedge i)\vee(z\wedge i)$。又 $x\wedge i=y\wedge i$,即$(x\vee z)\wedge i=(y\wedge i)\vee(z\wedge i)=(y\vee z)\wedge i$。显然$\forall m\in x\vee z$,存在$n\in y\vee z$,使得$(m,n)\in\theta_I$。同样地,$\forall p\in y\vee z$,存在 $q\in x\vee z$,使得$(q, p)\in\theta_I$,即$(x\vee z, y\vee z)\in\overline{\theta_I}$。

综上可知,θ_I 为 S-超格同余。

注 3 若 L 是含有最小元 0 的 S-超格,I 为 L 的 S-超格理想,则 $\theta_I=L^2$。

定理 5 设 L 是分配 S-超格,I 是 L 的 S-超格理想,定义 L 上的二元关系 $\Phi(I)$ 如下:

$$(x, y)\in\Phi(I)\Leftrightarrow\forall s\in S,\quad\{z\in L|z\wedge s\cdot x\in I\}=\{z\in L|z\wedge s\cdot y\in I\},$$

则 $\Phi(I)$是 L 上以 I 作为同余类的最大 S-超格同余。

证明 (ⅰ)显然 $\Phi(I)$是等价关系。下证 $\Phi(I)$是 S-超格同余。设$(x,y)\in\Phi(I)$,则:

(1) 证$\forall t\in S$, $(t\cdot x, t\cdot y)\in\Phi(I)$。$\forall s\in S$,

$\{z\in L|z\wedge s\cdot(t\cdot x)\in I\}=\{z\in L|z\wedge(st)\cdot x\in I\}=\{z\in L|z\wedge(st)\cdot y\in I\}=\{z\in L|z\wedge s\cdot(t\cdot y)\in I\}$,故$(t\cdot x, t\cdot y)\in\Phi(I)$。

(2) 证$\forall a\in L$, $(a\wedge x, a\wedge y)\in\Phi(I)$,即证明$\{z\in L|z\wedge s\cdot(a\wedge x)\in I\}=\{z\in L|z\wedge s\cdot(a\wedge y)\in I\}$。

$\forall t\in\{z\in L|z\wedge s\cdot(a\wedge x)\in I\}$,有 $t\wedge s\cdot a\wedge s\cdot x=t\wedge s\cdot(a\wedge x)\in I$,由 $t\wedge s\cdot a\in L$, $(x, y)\in\Phi(I)$ 知,

$t \wedge s\cdot a \wedge s\cdot y \in I$, 则$t \in \{z \in L | z \wedge s\cdot(a \wedge y) \in I\}$,即$\{z \in L | z \wedge s\cdot(a \wedge x) \in I\} \subseteq \{z \in L | z \wedge s\cdot(a \wedge y) \in I\}$。

同理可证$\{z \in L | z \wedge s\cdot(a \wedge x) \in I\} \supseteq \{z \in L | z \wedge s\cdot(a \wedge y) \in I\}$。

综上,$(a \wedge x,\ a \wedge y) \in \Phi(I)$。

(3) 证$\forall\ a \in L$, $(x \vee a,\ y \vee a) \in \overline{\Phi(I)}$,即证明$\{z \in L | z \wedge s\cdot(x \vee a) \subseteq I\} = \{z \in L | z \wedge s\cdot(y \vee a) \subseteq I\}$。

$\forall z \in L$,由分配性可得 $z \wedge s\cdot(x \vee a) = (z \wedge s\cdot x) \vee (z \wedge s\cdot a)$。若$(z \wedge s\cdot x) \vee (z \wedge s\cdot a) \subseteq I$,由命题 2 知,存在 $d_1, d_2 \in (z \wedge s\cdot x) \vee (z \wedge s\cdot a)$,使得 $z \wedge s\cdot x \leqslant d_1$, $z \wedge s\cdot a \leqslant d_2$。因为 d_1, $d_2 \in I$, I 是 S-超格理想,所以 $z \wedge s\cdot x \in I$, $z \wedge s\cdot a \in I$,即$(z \wedge s\cdot x) \vee (z \wedge s\cdot a) \subseteq I \Leftrightarrow z \wedge s\cdot x \in I$, $z \wedge s\cdot a \in I$。

同理可得 $(z \wedge s\cdot y) \vee (z \wedge s\cdot a) \subseteq I \Leftrightarrow z \wedge s\cdot y \in I$, $z \wedge s\cdot a \in I$。

由$(x,y) \in \Phi(I)$知, $(z \wedge s\cdot x) \vee (z \wedge s\cdot a) \subseteq I \Leftrightarrow (z \wedge s\cdot y) \vee (z \wedge s\cdot a) \subseteq I$,因此$\{z \in L | (z \wedge s\cdot x) \vee (z \wedge s\cdot a) \subseteq I\} = \{z \in L | (z \wedge s\cdot y) \vee (z \wedge s\cdot a) \subseteq I\}$,即$\{z \in L | z \wedge s\cdot(x \vee a) \subseteq I\} = \{z \in L | z \wedge s\cdot(y \vee a) \subseteq I\}$。

显然 $\forall m \in x \vee a$, 存在 $n \in y \vee a$, 使得 $(m,n) \in \Phi(I)$。同样地, $\forall p \in y \vee a$, 存在 $q \in x \vee a$, 使得 $(q,p) \in \Phi(I)$,因此$(x \vee a,\ y \vee a) \in \overline{\Phi(I)}$。

(ⅱ) 证明 I 是 $\Phi(I)$ 的一个同余类。$\forall x,\ y \in I$, $s \in S$, $\forall z \in L$,总有 $z \wedge s\cdot x \in I$, $z \wedge s\cdot y \in I$, $\{z \in L | z \wedge s\cdot x \in I\} = \{z \in L | z \wedge s\cdot y \in I\} = L$,故$(x,\ y) \in \Phi(I)$。

设$x \in I$, $(x,y) \in \Phi(I)$,因为 I 是 S-超格理想,所以$\forall\ s \in S$,都有 $s\cdot x \in I$; $\forall z \in L$, $z \wedge s\cdot x \in I$。由$(x,y) \in \Phi(I)$知,$\{z \in L | z \wedge s\cdot x \in I\} = \{z \in L | z \wedge s\cdot y \in I\}$,即 $z \wedge s\cdot y \in I$,令 $z=y$, $s=1$,则 $y \wedge y = y \in I$。

(ⅲ) 证明 $\Phi(I)$是满足上述条件的最大的 S-超格同余。

设 θ 是一个以 I 为同余类的 S-超格同余,若$(x,\ y) \in \theta$,则$\forall s \in S$, $(s\cdot x, s\cdot y) \in \theta$,且$\forall z \in L$,$(z \wedge s\cdot x, z \wedge s\cdot y) \in \theta$,因此$\forall s \in S$, $z \in L$, $z \wedge s\cdot x \in I \Leftrightarrow z \wedge s\cdot y \in I$,故$(x,y) \in \Phi(I)$,即 $\theta \leqslant \Phi(I)$。

推论 1　设 L 为含有最小元 0 的 S-超格,I 为 L 的 S-超格理想,则 $I = [0]_{\Phi(I)}$。

3　结论

本文研究了 S-超格理想的性质及其与 S-超格同态、S-超格同余的关系。一方面,证明了任意 S-超格的全体 S-超格理想构成一个代数的有顶交结构,得到了 S-超格理想的满同态像和原像都是 S-超格理想的结论;另一方面,对任意 S-超格同余 θ,给出了同余类$[0]_\theta$ 是 S-超格理想的一个充分条件,同时对任意的 S-超格理想,构造了一个以其为同余类的最大的 S-超格同余。论文研究的不足之处是没有给出同余类$[0]_\theta$ 是 S-超格理想的一个充要条件。本文研究针对的是并运算为超运算的 S-超格,后续还可对并交均为超运算的 S-超格进行相关研究,并讨论 S-超格范畴的性质以及超格范畴和 S-超格范畴之间的关系。

参考文献:

[1] MARTY F. Sur une generalization de la notion de groupe[C]//Proceedings of 8th Congress Mathematiciens Scandenaves. Stockholm, Sweden:[s.n.], 1934:45-49.
[2] ROSARIA R. Hyperaffine planes over hyperrings[J]. Discrete Mathematics, 1966, 155:215-223.
[3] XIN Xiaolong. Hyper BCI-algebras[J]. Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications, 2006, 26(1):5-19.
[4] CORSINI P, LEOREANU-FOTEA V. Applications of hyperstructure theory[M]. Dordrecht: Kluwer, 2003.
[5] AL-TAHAN M, DAVVAZ B. Algebraic hyperstructures associated to biological inheritance[J]. Mathematical Biosciences, 2017, 285:112-118.
[6] DAVVAZ B, NEZAD A D, MAZLOUM-ARDAKANI M. Chemical hyperalgebra: redox reactions[J]. MATCH-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2014, 71(2):323-331.
[7] DEHGHAN NEZHAD A, MOOSAVI NEJAD S M, NADJAFIKHAH M, et al. A physical example of algebraic hyperstructures: Leptons[J]. Indian Journal of Physics, 2012, 86:1027-1032.
[8] KONSTANINIDOU M, MITTAS J. An introduction to the theory of hyperlattices[J]. Math Balkanica, 1977, 7: 187-193.
[9] 郭效芝,辛小龙. 超格[J]. 纯粹数学与应用数学, 2004, 20(1):40-43.

GUO Xiaozhi, XIN Xiaolong. Hyperlattice[J]. Pure and Applied Mathematics, 2004, 20(1):40-43.
[10] ZHAO Bin, HAN Shengwei. The ideal on hyperlattices[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2008, 22(4):44-51.
[11] KOGUEP B B N, LELE C. On hyperlattices: congruence relations, ideals and homomorphism[J]. Afrika Matematika, 2019, 30(1-2):101-111.
[12] 韩胜伟,赵彬. 分配超格[J]. 西北大学学报(自然科学版),2005,35(2):125-129.
HAN Shengwei, ZHAO Bin. Distributive hyperlattices[J].Journal of Northwest University(Natural Science), 2005, 35(2): 125-129.
[13] SOLTANI LASHKENARI A, DAVVAZ B. Complete join hyperlattices[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2015, 46:633-645.
[14] JAKUBÍK J. On strong superlattices[J]. Mathematica Slovaca, 1994, 44(2):131-138.
[15] HEIDARI D, DAVVAZ B. On ordered hyperlattices[J]. University Politehnica of Bucharest Scientifific Bulletin (Series A: Applied Mathematics and Physics), 2011, 73(2):85-96.
[16] RAHNAMAI BARGHI A. The prime ideal theorem for distributive hyperlattices[J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2001, 10: 75-78.
[17] KOGUEP B B N, NKUIMI C, LELE C. On fuzzy ideals of hyperlattice[J]. International Journal of Algebra, 2008, 2(15): 739-750.
[18] 刘绍学. 近世代数基础[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2012.
LIU Shaoxue. Foudation of mordern algebra[M]. 2nd. Beijing: Higher Education Press, 2012.
[19] 章璞,吴泉水.基础代数学讲义[M]. 北京:高等教育出版社,2018.
ZHANG Pu, WU Quanshui. Lectures on basic algebra[M]. Beijing: Higher Education Press, 2018.
[20] BULMAN-FLEMING S, MAHMOUDI M. The category of S-posets[J]. Semigroup Forum, 2005, 71:443-461.
[21] LUO Congwen. S-Lattice congruences of S-Lattices[J]. Academy of Mathematics and Systems Science, 2012(19):465-472.
[22] 温燕,罗从文. 格半群的表示和S-格[J]. 三峡大学学报(自然科学版),2007,29(5):467-469.
WEN Yan, LUO Congwen. The representation of lattice ordered semigroups and S-lattices[J]. Journal of China Three Gorges University (Natural Sciences), 2007, 29(5):467-469.
[23] 李敏. 偏序超半群中的若干问题研究[D]. 江门:五邑大学,2018.
LI Min. Studies on some topics of partially ordered hypersemigroups[D]. Jiangmen: Wuyi University, 2018.
[24] 高连飞. 超序结构中的若干问题研究[D]. 江门:五邑大学,2020.
GAO Lianfei. Studies on some topics of hyperordered structures[D]. Jiangmen: Wuyi University, 2020.
[25] DAVEY B A, PRIESTLEY H A. Introduction to lattices and order[M]. New York: Cambridge University Press, 2002.

(编辑:陈丽萍)