

两类树图的加权 Szeged 指标的界

胡姣, 刘蒙蒙*

(兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 给定一个连通图 G , 图 G 的加权 Szeged 指标的定义为 $S_w(G) = \sum_{uv=e \in E(G)} (d_G(u) + d_G(v)) n_u^G(e) n_v^G(e)$, 其中, $d_G(u)$ 表示图 G 的顶点 u 的度, $n_u^G(e)$ 表示图 G 中距离顶点 u 比顶点 v 近的顶点个数。首先给出了一些图变换, 然后利用这些图变换得到了繁星图的加权 Szeged 指标的上界、下界以及给定直径的树图的加权 Szeged 指标的上界, 并刻画了相应的极值图。

关键词: 加权 Szeged 指标; 繁星; 树

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A

引用格式: 胡姣, 刘蒙蒙. 两类树图的加权 Szeged 指标的界[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(2): 34-40.

Bounds of weighted Szeged index of two kinds of tree graphs

HU Jiao, LIU Mengmeng

(School of Mathematics and Science, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: Given a graph G , the weighted Szeged index of a graph G , denoted by $S_w(G) = \sum_{uv=e \in E(G)} (d_G(u) + d_G(v)) n_u^G(e) n_v^G(e)$,

where $d_G(u)$ is the degree of u in G . For edge $uv=e \in E(G)$, $n_u(e)$ represents the number of vertices closer to vertex u than vertex v in graph G . Some graph transformations are given, by using these graph transformations, the upper bound and lower bound of weighted Szeged index of blossomed stars and the upper bound of weighted Szeged index of trees with given diameters are obtained, and the corresponding extreme value graphs are characterized.

Key words: weighted Szeged index; blossomed star; tree

0 引言

本文涉及的所有图都是无向、有限的简单图, 涉及的术语和符号请参考文献[1]。Wiener^[2]提出的 Wiener 指标是最早研究的拓扑指标。Gutman^[3]引入了一个一般图的不变量, 即 Szeged 指标, 相关研究见文献[4-6]。

Ilić^[7]首次给出了加权 Szeged 指标的定义。Nagarajan 等^[8]计算了广义层次积图的加权 Szeged 指标。Pattabiraman 等^[9]计算了笛卡尔积图和冠图的加权 Szeged 指标。Atanasov 等^[10]证明了对于具有最小加权 Szeged 指标的树, 其最大度不超过 16。Bok 等^[11]确定了在所有的树图中, 星图的加权 Szeged 指标最大, 证明了在所有二部图中具有最大加权 Szeged 指标的是完全平衡二部图, 给出了具有最小加权 Szeged 指标的树的一些性质。

此外, 关于树图的一些拓扑指标问题已经有了大量的研究结果。如文献[12]研究了半星树的 Szeged 指标和边 Szeged 指标的极值问题, 并刻画了相应的极值图。文献[13]对繁星的极值能量问题进行了研究。文献[14]确定了在给定直径的树中的 GA_2 指标最小的树。受此启发, 本文对两类树图的加权 Szeged 指标问题展开研究, 得到了繁星图的加权 Szeged 指标的上、下界和给定直径的树图的加权 Szeged 指标的上界,

收稿日期: 2023-02-27; 网络出版时间: 2024-02-28 11:39:12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11961040)

第一作者: 胡姣(1997—), 女, 硕士研究生, 研究方向为代数图论及其应用。E-mail: hujiao012@163.com

* 通信作者: 刘蒙蒙(1986—), 女, 教授, 博士研究生, 研究方向为图论与组合优化。E-mail: liumm05@163.com

并给出了相应的极值图。

1 基本概念

令 $V(G)$ 是图 G 的顶点集, $E(G)$ 是图 G 的边集。对于顶点 $u, v \in V(G)$, $d_G(u)$ 表示图 G 中顶点 u 的度, 即与 u 相邻的点的数目; $d_G(u, v)$ 表示图 G 中顶点 u 和顶点 v 之间的距离, 即连接顶点 u 和顶点 v 之间最短路径的长度。对于 $uv \in E(G)$, $G-uv$ 表示图 G 删去边 uv 得到的图。图 G 的直径是指图 G 中任意 2 个顶点 u, v 之间的最大距离。图 G 中度为 1 的点称为叶子点(悬挂点), 如果一个顶点在图 G 中去掉叶子点后成为叶子点, 那么该顶点称为图 G 的内叶点, 其他既不是叶子点又不是内叶点的的顶点称为非叶顶点。

对于边 $uv=e \in E(G)$, 定义以下集合:

$$N_u^G(e) = \{x \in V(G) \mid d_G(u, x) < d_G(v, x)\},$$

$$N_v^G(e) = \{x \in V(G) \mid d_G(v, x) < d_G(u, x)\},$$

$$N_0^G(e) = \{x \in V(G) \mid d_G(u, x) = d_G(v, x)\}.$$

令 $n_u^G(e) = |N_u^G(e)|$, $n_v^G(e) = |N_v^G(e)|$, $n_0^G(e) = |N_0^G(e)|$, 若 G 是 n 阶图, 则 $n_u^G(e) + n_v^G(e) + n_0^G(e) = n$ 。Szeged 指标 $S(G)$ 和加权 Szeged 指标 $S_w(G)$ 的定义分别为:

$$S(G) = \sum_{uv=e \in E(G)} n_u^G(e)n_v^G(e),$$

$$S_w(G) = \sum_{uv=e \in E(G)} (d_G(u) + d_G(v))n_u^G(e)n_v^G(e).$$

P_n 表示具有 n 个顶点的路, S_n 表示具有 n 个顶点的星图, 把星图中度不等于 1 的顶点称为中心顶点。双星图是用一条边将 2 个不相交的星图的中心顶点连接起来得到的图。

给定 r 个整数 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 0$, $SC(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$ 表示具有 n 个顶点的繁星, 它是在星图 S_{r+1} 的 r 个悬挂点上依次悬挂 n_1, n_2, \dots, n_r 个悬挂点得到的图, 其中星图 S_{r+1} 的中心顶点即为 $SC(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$ 的中心顶点。令 $\mathcal{SC}(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$ 表示 $SC(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$ 这一类图构成的集合, 即

$$\mathcal{SC}(n, n_1, n_2, \dots, n_r) = \{SC(n, n_1, n_2, \dots, n_r) \mid \sum_{i=1}^r n_i = n - r - 1\}.$$

$CP(n, d)$ 表示直径为 d 的 n 阶毛虫树, 它是在 $P_{d+1} = v_0v_1 \dots v_d$ 的顶点 $v_i (i=1, 2, \dots, d-1)$ 上悬挂叶子点得到的图。 $\mathcal{CP}(n, d)$ 表示 $CP(n, d)$ 这一类图构成的集合。

2 繁星的加权 Szeged 指标的上、下界

本章首先给出了一种重要的图变换, 然后利用该变换分别得到了繁星的加权 Szeged 指标的上界和下界, 并刻画了相应的极值图。

引理 2.1 如果 $1 \leq i < j \leq r$, $n_i \geq n_j \geq 1$, $SC(n, n_1, \dots, n_i + 1, n_j - 1, \dots, n_r)$ 是通过将繁星 $SC(n, n_1, \dots, n_i, n_j, \dots, n_r)$ 中 n_j 个悬挂点中的一个放到 n_i 个悬挂点中得到的图(如图 1 所示), 则

$$S_w(SC(n, n_1, \dots, n_i, n_j, \dots, n_r)) < S_w(SC(n, n_1, \dots, n_i + 1, n_j - 1, \dots, n_r)).$$

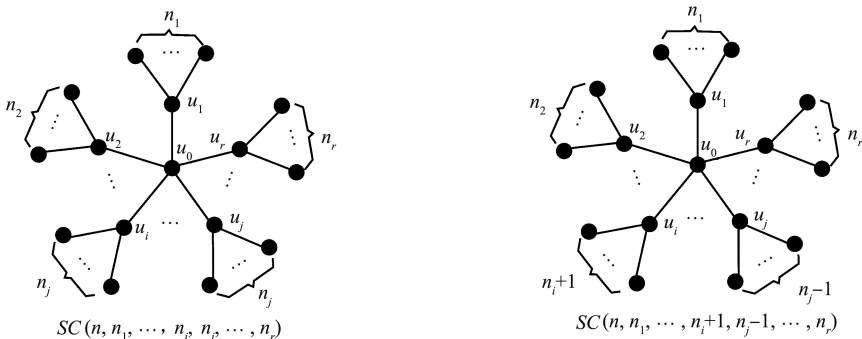


图 1 引理 2.1 中的图形变换
Fig.1 Transformation of graph in Lemma 2.1

证明 记 u_0 是繁星图 $SC(n, n_1, \dots, n_i, n_j, \dots, n_r)$ 的中心顶点, u_0 的邻点集为 $\{u_1, \dots, u_i, u_j, \dots, u_r\}$. $u_1, u_2, \dots, u_i, u_j, \dots, u_r$ 上依次悬挂 $n_1, n_2, \dots, n_i, n_j, \dots, n_r$ 个悬挂点. $SC(n, n_1, \dots, n_i+1, n_j-1, \dots, n_r)$ 是将 $SC(n, n_1, \dots, n_i, n_j, \dots, n_r)$ 中 u_j 上一个悬挂点变成 u_i 的悬挂点得到的图, 如图 1 所示. 令

$$\Delta = S_w(SC(n, n_1, \dots, n_i+1, n_j-1, \dots, n_r)) - S_w(SC(n, n_1, \dots, n_i, n_j, \dots, n_r)).$$

由加权 Szeged 指标的定义可知, 除了边 u_0u_i, u_0u_j 与 u_i, u_j 相关联的悬挂边对加权 Szeged 指标的贡献是改变的, 其他的边对加权 Szeged 指标的贡献是不变的, 因此在计算 Δ 时这些边是不用考虑的, 则

$$\begin{aligned} \Delta &= (n_i+r+2)(n_i+2)(n-n_i-2) - (n_i+r+1)(n_i+1)(n-n_i-1) \\ &\quad + (n_j+r)n_j(n-n_j) - (n_j+r+1)(n_j+1)(n-n_j-1) + (n_i+1)(n_i+3)(n-1) \\ &\quad - n_i(n_i+2)(n-1) + (n_j-1)(n_j+1)(n-1) - n_j(n_j+2)(n-1) \\ &= (n_i-n_j)(4n-3n_i-3n_j-2r-5) - 6n_i+4n-2r-8 \\ &= 3(n_i-n_j)(n-n_i-n_j-r-1) + (n_i-n_j-2)r + (n_i-n_j+4)n + 2n_j-8n_i-8. \end{aligned}$$

因为 $n \geq n_i+n_j+r+1$, 所以

$$\begin{aligned} \Delta &\geq 3(n_i-n_j)(n-n_i-n_j-r-1) + (n_i-n_j-2)r + (n_i-n_j+4)(n_i+n_j+r+1) + 2n_j-8n_i-8 \\ &= 3(n_i-n_j)(n-n_i-n_j-r-1) + (n_i-n_j-2)r + 2n_j + (n_i-n_j-4)n_i + (n_i-n_j+4)(n_j+r+1) - 8. \end{aligned}$$

对 $n_i \geq n_j$ 分以下 5 种情况讨论.

情况 1 当 $n_i \geq n_j+4$ 时, 有 $(n_i-n_j+4)(n_j+r+1) - 8 > 0$, 故 $\Delta > 0$.

情况 2 当 $n_i = n_j+3$ 时, 有

$$\begin{aligned} \Delta &\geq 3(n_i-n_j)(n-n_i-n_j-r-1) + (n_i-n_j-2)r + 2n_j + (n_i-n_j-4)n_i + (n_i-n_j+4)(n_j+r+1) - 8 \\ &= 9(n-n_i-n_j-r-1) + 8r + 8n_j - 4 > 0. \end{aligned}$$

情况 3 当 $n_i = n_j+2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \Delta &\geq 3(n_i-n_j)(n-n_i-n_j-r-1) + (n_i-n_j-2)r + 2n_j + (n_i-n_j-4)n_i + (n_i-n_j+4)(n_j+r+1) - 8 \\ &= 6(n-n_i-n_j-r-1) + 6r + 6n_j - 6 > 0. \end{aligned}$$

情况 4 当 $n_i = n_j+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \Delta &\geq 3(n_i-n_j)(n-n_i-n_j-r-1) + (n_i-n_j-2)r + 2n_j + (n_i-n_j-4)n_i + (n_i-n_j+4)(n_j+r+1) - 8 \\ &= 3(n-n_i-n_j-r-1) + 4r + 4n_j - 6 > 0. \end{aligned}$$

情况 5 当 $n_i = n_j$ 时, 有

$$\begin{aligned} \Delta &\geq 3(n_i-n_j)(n-n_i-n_j-r-1) + (n_i-n_j-2)r + 2n_j + (n_i-n_j-4)n_i + (n_i-n_j+4)(n_j+r+1) - 8 \\ &= 2r + 2n_j - 4 > 0. \end{aligned}$$

综上所述, 当 $n_i \geq n_j \geq 1$ 时, 有 $\Delta > 0$, 即

$$S_w(SC(n, n_1, \dots, n_i+1, n_j-1, \dots, n_r)) > S_w(SC(n, n_1, \dots, n_i, n_j, \dots, n_r)).$$

即证。

定理 2.1 若 $T \in \mathcal{SC}(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$, 则有

$$S_w(T) \leq S_w(SC(n, n-r-1, 0, 0, \dots, 0)),$$

等号成立当且仅当 $T \cong SC(n, n-r-1, 0, 0, \dots, 0)$.

证明 假设繁星 $SC(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$ 是 $\mathcal{SC}(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$ 里加权 Szeged 指标最大的图, 对于 $1 \leq i < j \leq r$, 若存在 $n_i \geq n_j \geq 1$, 利用引理 2.1, 可得新的繁星图 $SC(n, n_1, \dots, n_i+1, n_j-1, \dots, n_r)$, 且

$$S_w(SC(n, n_1, n_2, \dots, n_r)) < S_w(SC(n, n_1, \dots, n_i+1, n_j-1, \dots, n_r)),$$

与假设矛盾, 因此对于 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 0$, 有 $n_2 = n_3 = \dots = n_r = 0$, 即证 $SC(n, n-r-1, 0, 0, \dots, 0)$ 是 $\mathcal{SC}(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$ 里加权 Szeged 指标最大的图。

定理 2.2 若 $T \in \mathcal{SC}(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$, 则有

$$S_w(T) \geq S_w(SC(n, \underbrace{p+1, \dots, p+1}_{t \uparrow}, \underbrace{p, \dots, p}_{r-t \uparrow})),$$

其中 $n-r-1 = pr+t$, $0 \leq t \leq r-1$, 等号成立当且仅当 $T \cong SC(n, \underbrace{p+1, \dots, p+1}_{t \uparrow}, \underbrace{p, \dots, p}_{r-t \uparrow})$ 。

证明 假设繁星 $SC(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$ 是 $\mathcal{SC}(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$ 里加权 Szeged 指标最小的图, 对于 $1 \leq i < j \leq r$, 若存在 $n_i \geq n_j+2$, 利用引理 2.1, 可得新的繁星图 $SC(n, n_1, \dots, n_i-1, n_j+1, \dots, n_r)$, 且

$$S_w(SC(n, n_1, n_2, \dots, n_r)) > S_w(SC(n, n_1, \dots, n_i+1, n_j-1, \dots, n_r)),$$

与假设矛盾, 因此对于 $1 \leq i < j \leq r$ 均有 $|n_i - n_j| \leq 1$, 即对于任意的 $1 \leq i \leq r$, 都有 $n_i = \lceil \frac{n-r-1}{r} \rceil$ 或 $\lfloor \frac{n-r-1}{r} \rfloor$, 因此 $SC(n, \underbrace{p+1, \dots, p+1}_{r-1}, \underbrace{p, \dots, p}_{r-1})$ 是 $\mathcal{SC}(n, n_1, n_2, \dots, n_r)$ 里加权 Szeged 指标最小的图。

3 给定直径的树的加权 Szeged 指标的上界

本章给出了几种重要的图变换, 并且变换后的图的加权 Szeged 指标均变大, 因此利用这几种变换给出了给定直径的树的加权 Szeged 指标的极大值, 并且刻画了相应的极值图。

令 T_n 表示 n 阶树, \mathcal{T}_n 表示所有的 n 阶树集, 令 $T_{n,d}$ 表示所有直径为 d 的 n 阶树, $\mathcal{T}_{n,d}$ 表示直径为 d 的 n 阶树集, $P_{d+1}(i, n-d-1)$ 表示在路 $P_{d+1} = v_0 v_1 \dots v_{d-1} v_d$ 的 $v_i (i=1, 2, \dots, d-1)$ 顶点上悬挂 $n-d-1$ 个顶点得到的图, $\mathcal{P}_{d+1}(i, n-d-1)$ 表示 $P_{d+1}(i, n-d-1)$ 这一类图构成的集合。

因为在所有的 n 阶树集 \mathcal{T}_n 中, 只有 P_2 是 2 阶树图, P_3 是 3 阶树图; 在给定直径的树集 $\mathcal{T}_{n,d}$ 中, 只有星图 S_n 直径为 2, 只有路 p_n 的直径为 $n-1$, 所以接下来讨论时, 只考虑 $n \geq 4, 3 \leq d \leq n-2$ 的情况。

引理 3.1^[10] 设 $T \in \mathcal{T}_n, e = uv \in E(T)$, 其中 u 是 T 的一个内叶点, x_1, x_2, \dots, x_a 为连接在 u 上的叶子点, $y_1, y_2, \dots, y_b (y_i \neq u, i=1, 2, \dots, b)$ 为 v 的邻点, T' 是通过将树 T 的边 uv 收缩为悬挂边 $u'v'$ 得到的图 (如图 2 所示), 则

$$S_w(T) < S_w(T').$$

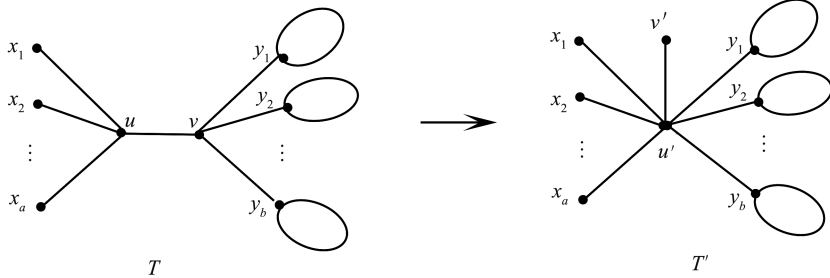


图 2 引理 3.1 中的图形变换
Fig.2 Transformation of graph in Lemma 3.1

引理 3.2 令 $T \in \mathcal{CP}(n, d)$, 对于 $1 \leq i < j \leq d-1, v_i$ 是 P_{d+1} 上第 1 个悬挂星的顶点, v_j 是 P_{d+1} 上第 2 个悬挂星的顶点。 T' 是通过将 T 中 v_i 上的所有悬挂点都悬挂到 v_j 上得到的图, T'' 是通过将 T 中 v_j 上的所有悬挂点都悬挂到 v_i 上得到的图 (如图 3 所示), 则有

$$S_w(T) < S_w(T') \text{ 或 } S_w(T) < S_w(T'').$$

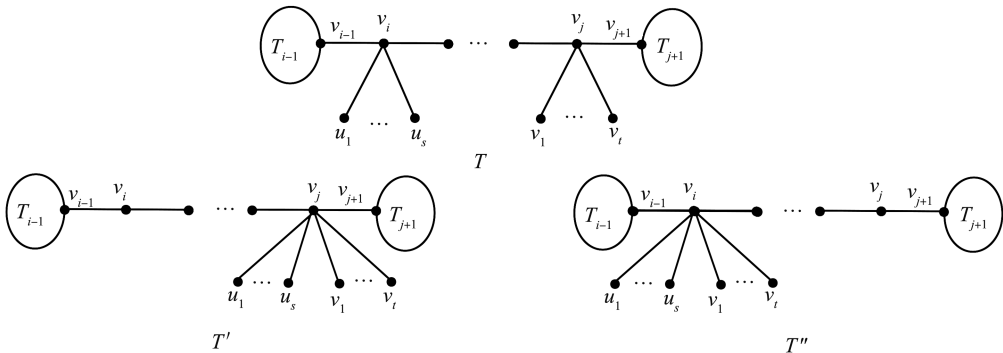


图 3 引理 3.2 中的图形变换
Fig.3 Transformation of graph in Lemma 3.2

证明 为了方便, 将 v_i 到 v_j 的这条路记为 $P_k = w_1 w_2 \dots w_{k-1} w_k$, 其中 $w_1 (v_i)$ 上悬挂了 $s (s \geq 1)$ 个顶点, $w_k (v_j)$ 上悬挂了 $t (t \geq 1)$ 个顶点。 T_{i-1} 是表示 $T - v_{i-1} v_i$ 包含顶点 v_{i-1} 的子树, T_{j+1} 是表示 $T - v_j v_{j+1}$ 包含顶点 v_{j+1} 的子树, 其中 $|V(T_{i-1})| = x, |V(T_{j+1})| = y$ 。

不妨设 $x \geq y$, 令 $\Delta = S_w(T) - S_w(T')$, 由加权 Szeged 指标的定义可知, 在 T, T' 中, 子树 T_{i-1}, T_{j+1} 中的所有边对加权 Szeged 指标的贡献均不变, 因此下面在计算 Δ 时这些边是不考虑的, 故

$$\begin{aligned} \Delta &= S_w(T) - S_w(T') \\ &= (d_T(v_{i-1}) + s + 2)x(n-x) - (d_{T'}(v_{i-1}) + 2)x(n-x) + (s+4)(x+s+1)[n-(x+s+1)] \\ &\quad - 4(x+1)[n-(x+1)] + 4(x+s+2)[n-(x+s+2)] - 4(x+2)[n-(x+2)] + \cdots \\ &\quad + 4(x+s+k-2)[n-(x+s+k-2)] - 4(x+k-2)[n-(x+k-2)] + (t+4)(x+s+k-1)[n-(x+s+k-1)] \\ &\quad - (s+t+4)(x+k-1)[n-(x+k-1)] + (d_T(v_{j+1}) + t + 2)y(n-y) - (d_{T'}(v_{j+1}) + s + t + 2)y(n-y) \\ &\quad + s(s+3)(n-1) - s(s+t+3)(n-1) + t(t+3)(n-1) - t(s+t+3)(n-1) \\ &= sx(n-x) + (sx+s^2+s)(n-x-s-1) - 4s \sum_{i=1}^{k-1} (x+i) \\ &\quad + 4s \sum_{i=1}^{k-1} (n-s-x-i) + ts(n-2x-2k+2) - ts^2 \\ &\quad - (sx+sk-s)(n-x-k+1) - sy(n-y) - 2st(n-1) \\ &= (sx+s^2-2s+3sk-st-sy)n - sx^2 - 2s^2x + 4sx - s^3 + 2s^2 \\ &\quad - 6sxx - 3sk^2 + 2sk - 4s^2k - 2sxt - 2stk + 4st - s^2t + sy^2, \end{aligned}$$

其中 $n = x + y + s + t + k$, $(x, y, s, t \geq 1, k \geq 2)$, 则

$$\begin{aligned} \Delta &= (sx+s^2-2s+3sk-st-sy)n - sx^2 - 2s^2x + 4sx - s^3 + 2s^2 - 6sxx \\ &\quad - 3sk^2 + 2sk - 4s^2k - 2sxt - 2stk + 4st - s^2t + sy^2 \\ &= 2sx + 2st + 2sky - 2sxt - 2sxx - 2sy - 2sty - st^2 - s^2t \\ &= 2sx(1-t) + st(2-s-t) + 2sky - 2sxx - 2sy - 2sty \\ &= 2sx(1-t) + st(2-s-t) + 2s[k(y-x) - y(t+1)]. \end{aligned}$$

显然当 $x \geq y$ 时, $\Delta < 0$, 则 $S_w(T) < S_w(T')$ 。

同理可得, 当 $x \leq y$ 时, 有 $S_w(T) < S_w(T'')$ 。即证。

引理 3.3 对于 $T \in \mathcal{P}_{d+1}(i, n-d-1)$, 有

$$S_w(T) \leq S_w(P_{d+1}(1, n-d-1)),$$

等号成立当且仅当 $T \cong P_{d+1}(1, n-d-1)$ 。

证明 $P_{d+1}(i+1, n-d-1)$ 是通过将 $P_{d+1}(i, n-d-1)$ 中 v_i 上的 $n-d-1$ 个悬挂点悬挂到 v_{i+1} 上而得到的图。

令

$$\Delta(i) = S_w(P_{d+1}(i, n-d-1)) - S_w(P_{d+1}(i+1, n-d-1)).$$

由加权 Szeged 指标的定义可知, 在 $P_{d+1}(i, n-d-1), P_{d+1}(i+1, n-d-1)$ 中, 只有 $v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}, v_{i+1}v_{i+2}$ 这 3 条边对加权 Szeged 指标的贡献发生改变, 因此下面在计算 Δ 时只需要考虑这 3 条边。

$$\begin{aligned} \Delta(i) &= (n-d-1+4)i(n-i) - 4i(n-i) + (n-d-1+4)(i+1+n-d-1)[n-(n-d+i)] \\ &\quad - (n-d-1+4)(i+1)[n-(i+1)] + 4(i+2+n-d-1)[n-(n-d+i+1)] \\ &\quad - (n-d-1+4)(i+2+n-d-1)[n-(n-d+i+1)] \\ &= (n-d-1)i(n-i) + (n-d+3)(n-d+i)(d-i) - (n-d+3)(i+1)(n-i-1) \\ &\quad + 4(n-d+i+1)(d-i-1) - (n-d+3)(n-d+i+1)(d-i-1) \\ &= -4in - 2n + 2dn + 4di - 2d^2 + 4i + 2, \end{aligned}$$

则

$$\Delta'(i) = -4n + 4d + 4 = -4(n-d-1) < 0,$$

即 $\Delta(i)$ 为严格单调递减函数。

又 $\Delta\left(\frac{d-1}{2}\right) = 0$, 则当 $i < \frac{d-1}{2}$ 时, 有 $\Delta(i) > 0$, 即

$$S_w(P_{d+1}(i, n-d-1)) > S_w(P_{d+1}(i+1, n-d-1));$$

当 $i > \frac{d+1}{2}$ 时, 有 $\Delta(i) < 0$, 即

$$S_w(P_{d+1}(i, n-d-1)) < S_w(P_{d+1}(i+1, n-d-1)).$$

因为 $i \in \mathbf{N}^+$, 所以对 d 分以下 2 种情况讨论。

情况 1 d 为偶数。

当 $i < \frac{d-1}{2}$ 时, 即 $i = 1, 2, \dots, \frac{d-4}{2}, \frac{d-2}{2}$, 此时有

$$S_w(P_{d+1}(1, n-d-1)) > S_w(P_{d+1}(2, n-d-1)) > \dots > S_w\left(P_{d+1}\left(\frac{d}{2}, n-d-1\right)\right);$$

当 $i > \frac{d+1}{2}$ 时, 即 $i = \frac{d}{2}, \frac{d+2}{2}, \dots, d-2, d-1$, 此时有

$$S_w(P_{d+1}(d-1, n-d-1)) > S_w(P_{d+1}(d-2, n-d-1)) > \dots > S_w\left(P_{d+1}\left(\frac{d}{2}, n-d-1\right)\right),$$

因此, 在 $\mathcal{P}_{d+1}(i, n-d-1)$ 中, $P_{d+1}(d-1, n-d-1)$ 或 $P_{d+1}(1, n-d-1)$ 的加权 Szeged 指标最大。

情况 2 d 为奇数。

当 $i < \frac{d-1}{2}$ 时, 即 $i = 1, 2, \dots, \frac{d-5}{2}, \frac{d-3}{2}$, 此时有

$$S_w(P_{d+1}(1, n-d-1)) > S_w(P_{d+1}(2, n-d-1)) > \dots > S_w\left(P_{d+1}\left(\frac{d-1}{2}, n-d-1\right)\right);$$

当 $i > \frac{d+1}{2}$ 时, 即 $i = \frac{d+1}{2}, \frac{d+3}{2}, \dots, d-2, d-1$, 此时有

$$S_w(P_{d+1}(d-1, n-d-1)) > S_w(P_{d+1}(d-2, n-d-1)) > \dots > S_w\left(P_{d+1}\left(\frac{d+1}{2}, n-d-1\right)\right);$$

又

$$S_w\left(P_{d+1}\left(\frac{d-1}{2}, n-d-1\right)\right) = S_w\left(P_{d+1}\left(\frac{d+1}{2}, n-d-1\right)\right),$$

因此, 在 $\mathcal{P}_{d+1}(i, n-d-1)$ 中, $P_{d+1}(d-1, n-d-1)$ 或 $P_{d+1}(1, n-d-1)$ 的加权 Szeged 指标最大。即证。

定理 3.1 对于 $T \in \mathcal{T}_{n,d}$, 如图 4 所示, 有

$$S_w(T) \leq S_w(P_{d+1}(1, n-d-1)),$$

等号成立当且仅当 $T \cong P_{d+1}(1, n-d-1)$ 。

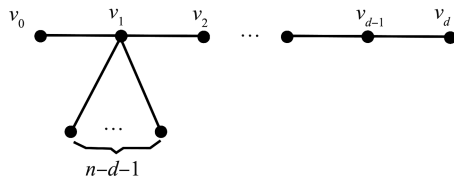


图 4 $P_{d+1}(1, n-d-1)$
Fig.4 $P_{d+1}(1, n-d-1)$

证明 令 T 表示 $\mathcal{T}_{n,d}$ 中加权 Szeged 指标最大的树, 且 T 中最长的一条路记为 $P_{d+1} = v_0 v_1 \dots v_{d-1} v_d$ 。

对于 $2 \leq i \leq d-2$, 若存在 v_i 上悬挂的树图不是星图, 则在该悬挂树上一定存在内叶点, 通过反复利用引理 3.1 的图变换, 最终可以将 v_i 上悬挂的树图变换成悬挂星, 对每一个非星图的悬挂树都多次利用引理 3.1 的图变换, 最终可以将 T 变换成直径为 d 的毛虫树。随后, 通过反复地利用引理 3.2 的图变换, 可知 T 必定与 $P_{d+1}(i, n-d-1)$ ($1 \leq i \leq d-1$) 同构。又由引理 3.3 可知, 在所有的 $P_{d+1}(i, n-d-1)$ 中, $P_{d+1}(1, n-d-1)$ 具有最大的加权 Szeged 指标。

综上所述, 在所有的给定直径的树图中, $P_{d+1}(1, n-d-1)$ 具有最大的加权 Szeged 指标。即证。

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. Berlin: Springer, 2008.
[2] WIENER H. Structural determination of paraffin boiling points[J]. Journal of the American Chemical Society, 1947, 69(1):

17-20.

- [3] GUTMAN I. A formula for the Wiener number of trees and its extension to graphs containing cycles[J]. Graph Theory Notes, 1994, 27(9):9-15.
- [4] SIMIĆ S, GUTMAN I, BALTIĆ V. Some graphs with extremal Szeged index[J]. Mathematica Slovaca, 2000, 50(1):1-15.
- [5] LIU Yan, YU Aimei, LU Mei, et al. On the Szeged index of unicyclic graphs with given diameter[J]. Discrete Applied Mathematics, 2017, 233:118-130.
- [6] ZHOU Bo, CAI Xiaochun, DU Zhibin. On Szeged indices of unicyclic graphs[J]. Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2010, 63:113-132.
- [7] ILIĆ A, MILOSAVLJEVIĆ N. The weighted vertex PI index[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2013, 57(3/4):623-631.
- [8] NAGARAJAN S, PATTABIRAMAN K, CHANDRASEKHARAN M. Weighted Szeged index of generalized hierarchical product of graphs[J]. General Mathematics Notes, 2014, 23(2):85-95.
- [9] PATTABIRAMAN K, KANDAN P. Weighted Szeged indices of some graph operations[J]. Transactions on Combinatorics, 2016, 5(1):25-35.
- [10] ATANASOV R, FURTULA B, ŠKREKOVSKI R. Trees with minimum weighted Szeged index are of a large diameter[J]. Symmetry, 2020, 12(5):793.
- [11] BOK J, FURTULA B. On extremal graphs of weighted Szeged index[J]. Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2019, 82:93-109.
- [12] DOLATI A, MOTEVALIAN I, EHYAEE A. Szeged index, edge Szeged index, and semi-star trees[J]. Discrete Applied Mathematics, 2010, 158(8):876-881.
- [13] CHEN Wuxian, YAN Weigen. On the energy of blossomed stars[J]. Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2020, 83:623-630.
- [14] HUA Hongbo. Trees with given diameter and minimum second Geometric-Arithmetic index[J]. Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2010, 64:631-638.

(编辑:祁业卿)

(上接第33页)

- [7] 李世玲,陈祥恩,王治文. 完全二部图 $K_{3,n}(n \geq 18)$ 的点可区别 E-全染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2016, 51(4):68-71.
LI Shiling, CHEN Xiang'en, WANG Zhiwen. Vertex-distinguishing E-total coloring of complete bipartite graph $K_{3,n}$ with $n \geq 18$ [J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2016, 51(4):68-71.
- [8] 陈祥恩. 某些顶点对被非多重色集合所区别的未必正常染色的综述[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2019, 18(4):50-59.
CHEN Xiang'en. A survey on not necessarily proper colorings under which certain pairs of vertices are distinguished by nonmultiple color sets[J]. Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition), 2019, 18(4):50-59.
- [9] 曹静,陈祥恩. 轮与扇的点被多重集可区别的 E-全染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(2):38-46.
CAO Jing, CHEN Xiang'en. E-total coloring of wheels and fans which are vertex distinguished by multiple sets[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2024, 59(2):38-46.
- [10] 邵嘉裕. 组合数学[M]. 上海:同济大学出版社, 1990.
SHAO Jiayu. Combinatorial mathematics[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1990.

(编辑:祁业卿)