山东大学学报(理学版)2024年1月 第59卷 第1期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.59, No.1, 2024

E-mail:xblxb@ sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2024)01-0056-06　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.596

非确定型模糊有限自动机的一种新的极小确定化方法

李平,杨巨芳,杨艳萍*
(陕西师范大学数学与统计学院, 陕西 西安 710119)

摘要:非确定型模糊有限自动机的极小确定化是自动机理论中的一个重要问题。在格序幺半群下, 本文给出一种非确定型模糊有限自动机的新的极小确定化方法, 称为内部构造法。为此, 首先给出了模糊状态的内部的定义及其相关性质, 进一步证明任给一个非确定型模糊有限自动机, 利用模糊状态的内部的性质得到一个极小的确定型模糊有限自动机与之等价, 最后通过例子验证该方法的正确性。

关键词:格序幺半群;非确定型模糊有限自动机;确定型模糊有限自动机;极小确定化;内部构造
中图分类号:TP301　　**文献标志码**:A
引用格式:李平,杨巨芳,杨艳萍.非确定型模糊有限自动机的一种新的极小确定化方法[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(1):56-61.

A new minimal determinization method of nondeterministic fuzzy finite automata

LI Ping, YANG Jufang, YANG Yanping*
(College of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, Shaanxi, China)

Abstract: The minimal determinization of nondeterministic fuzzy finite automata (NFFA) is an important problem in automata theory. A new minimal determinization method for nondeterministic fuzzy finite automata with membership values in lattice-ordered monoids called interior construction is presented. For this reason, the definition of the interior of a fuzzy state and its related properties are given firstly. It is further proved that for any nondeterministic fuzzy finite automata, a minimal deterministic fuzzy finite automata is obtained by using the internal properties of fuzzy states, which is equivalent to it, finally, the correctness of this method is verified by an example.

Key words: lattice-ordered monoids; nondeterministic fuzzy finite automata; deterministic fuzzy finite automata; minimal determinization; interior construction

0　引言

模糊自动机的概念最初是由 Wee 在 1967 年[1-2]提出的。此后有了较为显著的发展, 见 Santos[3-5]、Lee 和 Zadeh[6]。模糊自动机支持了大量的重要应用, 包括基于词的计算, 模糊离散事件系统, 模式识别和数据库理论[7-10]。

模糊自动机[11]是非确定型自动机[12]的自然推广。Močkoř[13]、Qiu[14-15]、Bělohlávek[16]、Li 和 Pedrycz[17-18]等研究了一些常见代数结构下非确定型模糊有限自动机(NFFA)与确定型模糊有限自动机(DFFA)之间的关系。从他们的研究中可知, 对于分配格上的任意 NFFA $\mathscr{N}$, 总是存在等价于 $\mathscr{N}$ 的 DFFA $\mathscr{D}$[18]; 对于完备剩余格或格半群上的任意 NFFA $\mathscr{N}$, 如果完备剩余格或格半群是局部有限的, 那么总是存在等价于 $\mathscr{N}$ 的 DFFA $\mathscr{D}$[19-20]。

非确定型模糊有限自动机的确定化是自动机理论中的一个重要问题[16-22]。NFFA 的特点是占用存储空

收稿日期:2022-11-04; **网络出版时间**:2023-12-13 10:00:27
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20231212.1940.008
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61673250); 陕西省自然科学基金资助项目(2020JM-247); 中央高校基础研究基金项目(Gk201803008)
第一作者简介:李平(1979—),女,副教授,硕士生导师,博士,研究方向为模糊数学、模糊自动机理论与计算智能. E-mail:liping@ snnu.edu.cn
* **通信作者简介**:杨艳萍(1997—),女,硕士研究生,研究方向为模糊自动机及其应用. E-mail:578818312@ qq.com

间较小,但在运行过程中每读入一个字符,都要更新其所维护的全部状态,因此运行效率较低;而 DFFA 的运行效率则高得多。所以,人们常常将 NFFA 转化为 DFFA。将一个 NFFA 转化为 DFFA 常见的方法有(可达)模糊子集构造法[16-20]、Brzozowski 型确定化[21]和基于语言包含程度的确定化[22]。其中基于语言包含程度的确定化是在完备剩余格下给出的,在构造极小 DFFA 的过程中剩余运算(→)扮演了非常重要的角色。

注意到基于语言包含程度的确定化方法构造出了极小的 DFFA,但该方法是在完备剩余格下给出的,剩余运算扮演了非常重要的角色。受到该方法的启示,在格序幺半群没有剩余运算的前提下,本文自然而然的想到了模糊状态的内部的概念,以此来代替剩余运算的功能。本文的极小确定化方法是该方法的一般化,将该方法推广到更广泛的代数结构——格序幺半群。在此过程中,模糊状态的内部有什么性质,能否保证得到的确定型模糊有限自动机与给定的非确定型模糊有限自动机等价并且状态数最少,这是本文面对的最大困难。本文解决了这些问题,详见本文第 2、3 部分。

1　预备知识

首先回顾格序幺半群的相关知识。

定义 1[17]　设 $\mathscr{L}$ 是一个有最小元 0 和最大元 1 的格,令 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别表示 $\mathscr{L}$ 上的上确界运算和下确界运算。设 $\mathscr{L}$ 上有一个二元运算 $\cdot$(称为乘积运算)使得$(\mathscr{L},\cdot,e)$是一个单位元为 $e\in\mathscr{L}$ 的幺半群,$\mathscr{L}$ 是一个格序幺半群,如果 $\forall a,b,c,x\in\mathscr{L}$ 满足以下 3 个条件:

(1) $a\cdot 0=0\cdot a=0$;

(2) $a\leqslant b\Rightarrow a\cdot x\leqslant b\cdot x$ 且 $x\cdot a\leqslant x\cdot b$;

(3) $a\cdot(b\vee c)=(a\cdot b)\vee(a\cdot c)$,且$(b\vee c)\cdot a=(b\cdot a)\vee(c\cdot a)$。

对于一个格序幺半群 $\mathscr{L}$,本文只关注 $\mathscr{L}$ 上的乘积运算 $\cdot$ 和有限上确界运算 $\vee$,因此,一个格序幺半群一般被记为$(\mathscr{L},\cdot,\vee)$。对于 $\mathscr{L}$ 的任意有限子集 $\mathscr{L}_1$,如果 $\mathscr{L}_1$ 生成的子代数$\langle\mathscr{L}_1\rangle$是有限的,则称$(\mathscr{L},\cdot,\vee)$是局部有限的[15]。

例 1[17]

(1) 设$(\mathscr{L},\wedge,\vee)$是一个完备分配格,并且设 $\cdot=\wedge$,则 $\mathscr{L}$ 是一个格序幺半群,其关于乘积运算的单位元是 1。$(\mathscr{L},\wedge,\vee)$是局部有限的。特别地,完备分配格$([0,1],\wedge,\vee)$是局部有限的。

(2) 设 $\mathscr{L}=[0,1]$,$\vee$ 是一般的取大运算。$\cdot$ 是一般的乘法运算,则对应的格序幺半群不是局部有限的。

设 A 是一个非空集合,A 的一个模糊子集是一个映射 $f:A\to\mathscr{L}$,$\mathscr{L}^A$ 表示所有从 A 到 $\mathscr{L}$ 的模糊子集的全体。任取 $f,g\in\mathscr{L}^A$,f 包含于 g 定义为:$f\subseteq g$ 当且仅当 $f(a)\leqslant g(a)$,$\forall a\in A$;f 等于 g 定义为:$f=g$ 当且仅当 $f(a)=g(a)$,$\forall a\in A$。令 I 是一个指标集,对任意 $i\in I$,$f_i\in\mathscr{L}^A$,模糊集合的任意并 $\bigcup\limits_{i\in I}f_i$ 和任意交 $\bigcap\limits_{i\in I}f_i$ 分别定义为 $\forall a\in A$,

$$\Big(\bigcup_{i\in I}f_i\Big)(a)=\bigvee_{i\in I}f_i(a)=\sup_{i\in I}f_i(a),\quad\Big(\bigcap_{i\in I}f_i\Big)(a)=\bigwedge_{i\in I}f_i(a)=\inf_{i\in I}f_i(a)。$$

设 A、B 是 2 个非空集合,A 到 B 的一个模糊关系是 1 个映射 $\alpha:A\times B\to\mathscr{L}$,即 $A\times B$ 的 1 个模糊子集。模糊关系的包含、等于、并、交就是模糊集合的包含、等于、并、交。A 到 B 的所有模糊关系之集记为 $\mathscr{L}^{A\times B}$。特别地,集合 A 上的一个模糊关系是一个映射 $\alpha':A\times A\to\mathscr{L}$。$A$ 上的所有模糊关系之集记为 $\mathscr{L}^{A\times A}$。对非空集合 A、B、C 和模糊关系 $\alpha\in\mathscr{L}^{A\times B}$,$\beta\in\mathscr{L}^{B\times C}$,$\alpha$ 和 β 的复合 $\alpha\circ\beta\in\mathscr{L}^{A\times C}$ 仍是一个模糊关系,定义为 $\forall a\in A$,$c\in C$,

$$(\alpha\circ\beta)(a,c)=\bigvee_{b\in B}\alpha(a,b)\cdot\beta(b,c),$$

对 $f\in\mathscr{L}^A$,$\alpha\in\mathscr{L}^{A\times B}$,$g\in\mathscr{L}^B$,$f\circ\alpha\in\mathscr{L}^B$ 和 $\alpha\circ g\in\mathscr{L}^A$ 定义为 $\forall b\in B$,$a\in A$,

$$(f\circ\alpha)(b)=\bigvee_{a\in A}f(a)\cdot\alpha(a,b),\quad(\alpha\circ g)(a)=\bigvee_{b\in B}\alpha(a,b)\cdot g(b);$$

对 $f,g\in\mathscr{L}^A$,$f\circ g\in\mathscr{L}$ 定义为

$$(f\circ g)=\bigvee_{a\in A}f(a)\cdot g(a),$$

当上述集合都有限时,模糊关系可以用矩阵表示,模糊集合可以用向量表示,模糊关系的复合可以表示为矩

阵的复合,模糊集合和模糊关系的复合表示为向量-矩阵复合。

容易验证模糊集合和模糊关系具有以下性质。

命题 1 设 $\alpha\in\mathscr{L}^{A\times B}$, $\beta\in\mathscr{L}^{B\times C}$, $\gamma\in\mathscr{L}^{C\times D}$, $f\in\mathscr{L}^{A}$, $g\in\mathscr{L}^{B}$, $h\in\mathscr{L}^{C}$,本文有以下结论:

(1) $(\alpha\circ\beta)\circ\gamma=\alpha\circ(\beta\circ\gamma)$, $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$;

(2) $(f\circ\alpha)\circ\beta=f\circ(\alpha\circ\beta)$, $(f\circ\alpha)\circ g=f\circ(\alpha\circ g)$, $(\alpha\circ\beta)\circ h=\alpha\circ(\beta\circ h)$;

(3) 如果 $\alpha\subseteq\beta$,则 $\alpha\circ\gamma\subseteq\beta\circ\gamma$;

(4) 如果 $\alpha\subseteq\gamma,\beta\subseteq\gamma$,则 $\alpha\cup\beta\subseteq\gamma$。特别地,如果 $\alpha_i\subseteq\gamma$,其中 $i\in I$,则 $\bigcup_{i\in I}\alpha_i\subseteq\gamma$;

(5) $(\alpha\cup\beta)\circ\gamma=(\alpha\circ\gamma)\cup(\beta\circ\gamma)$。

下面介绍模糊自动机的相关知识,如果不特别指出,$\mathscr{L}$ 是一个格序幺半群。

定义 2[17] 非确定型模糊有限自动机是一个五元组 $\mathscr{N}=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$,其中,

(1) Q 是非空有限状态集;

(2) Σ 是非空有限输入字符集;

(3) $I:Q\to\mathscr{L}$ 是模糊初始状态,或初始行向量;

(4) $F:Q\to\mathscr{L}$ 是模糊终止状态,或终止列向量;

(5) $\delta:Q\times\Sigma\times Q\to\mathscr{L}$ 是模糊转移函数。或等价的,对任意 $\sigma\in\Sigma$, $\delta_\sigma:Q\times Q\to\mathscr{L}$ 称为模糊转移矩阵。

令 Σ^* 表示 Σ 上的所有长度有限的字符串的集合,$|\theta|$ 表示字符串 θ 的长度,ε 表示空字符,其中 $|\varepsilon|=0$。用 $\mathscr{F}(\Sigma^*)=\{f|f:\Sigma^*\to\mathscr{L}\}$ 表示 Σ^* 到 $\mathscr{L}$ 上所有模糊语言之集。

δ 的扩张记为 $\delta^*:Q\times\Sigma^*\times Q\to\mathscr{L}$,定义如下:$\forall q,p\in Q$,

(1) $\delta^*(q,\varepsilon,p)=1\Leftrightarrow q=p$,否则,$\delta^*(q,\varepsilon,p)=0$,即 $\delta^*_\varepsilon=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}\in\mathscr{L}^{Q\times Q}$ 是 $\mathscr{L}$ 上的一个单位矩阵;

(2) $\forall\theta\in\Sigma^*$, $u\in\Sigma$, $\delta^*(q,\theta u,p)=\bigvee_{r\in Q}[\delta^*(q,\theta,r)\cdot\delta(r,u,p)]$ 即 $\delta^*_{\theta u}=\delta^*_\theta\circ\delta_u$。

$\mathscr{N}$ 识别的模糊语言 $\|\mathscr{N}\|\in\mathscr{F}(\Sigma^*)$ 定义为:$\forall\theta\in\Sigma^*$,

$$\|\mathscr{N}\|(\theta)=\bigvee_{q,q'\in Q}[I(q)\cdot\delta^*(q,\theta,q')\cdot F(q')],$$

设 $\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2$ 是 2 个非确定型模糊有限自动机,如果 $\|\mathscr{N}_1\|=\|\mathscr{N}_2\|$,称 $\mathscr{N}_1$ 和 $\mathscr{N}_2$ 等价,记作 $\mathscr{N}_1\equiv\mathscr{N}_2$。

定义 3[17] 确定型模糊有限自动机是一个五元组 $\mathscr{D}=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$,其中 $q_0\in Q$ 是一个初始状态,δ:$Q\times\Sigma\to Q$ 是一个转移函数,$F:Q\to\mathscr{L}$ 是模糊终止状态。

特别地,确定型模糊有限自动机是非确定型模糊有限自动机的特例。

δ 的扩张记为 $\delta^*:Q\times\Sigma^*\to Q$,定义如下:$\forall q\in Q$,

(1) $\delta^*(q,\varepsilon)=q$;

(2) $\forall\theta\in\Sigma^*$, $u\in\Sigma$, $\delta^*(q,\theta u)=\delta(\delta^*(q,\theta),u)$。

$\mathscr{D}$ 识别的模糊语言 $\|\mathscr{D}\|\in\mathscr{F}(\Sigma^*)$ 定义为 $\forall\theta\in\Sigma^*$,

$$\|\mathscr{D}\|(\theta)=F(\delta^*(q_0,\theta)),$$

设 $\mathscr{D}=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ 是 $\mathscr{L}$ 上的一个 DFFA,称 $Q^a=\{\delta^*(q_0,\theta)|\theta\in\Sigma^*\}$ 是 $\mathscr{D}$ 的可达状态集,$Q-Q^a$ 是 $\mathscr{D}$ 的不可达状态集。如果 $Q=Q^a$,则称 $\mathscr{D}$ 为可达的。$\forall q,q'\in Q$, $q\equiv q'$ 当且仅当 $F(\delta^*(q,\theta))=F(\delta^*(q',\theta))$, $\forall\theta\in\Sigma^*$,称 $\equiv$ 是 Q 上的等价关系。如果这个等价关系是相等关系,则称 DFFA $\mathscr{D}$ 是约简的。即 $q\equiv q'$ 推出 $q=q'$,$\mathscr{D}$ 是约简的。

命题 2[18] 一个 DFFA $\mathscr{D}$ 是极小的当且仅当 $\mathscr{D}$ 是可达且约简的。

2 模糊状态的内部及其性质

以下假设 $\mathscr{L}$ 是一个局部有限的格序幺半群。

设 $\mathscr{N}=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$ 是 $\mathscr{L}$ 上一个 NFFA。令 $S_I=\{I\}\cup\bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+}\{I\circ\delta_{\sigma_1}\circ\delta_{\sigma_2}\cdots\circ\delta_{\sigma_n}|\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\in\Sigma\}$, $S_F=\{F\}\cup\bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+}\{\delta_{\sigma_n}\circ\cdots\circ\delta_{\sigma_2}\circ\delta_{\sigma_1}\circ F|\sigma_n,\cdots,\sigma_2,\sigma_1\in\Sigma\}$。由于 $\mathscr{L}$ 局部有限,S_I 和 S_F 也有限。方便起见,令 $I\circ\delta_\sigma=$

I_σ，$\forall \sigma \in \Sigma$。等价的，$S_I = \{ I \circ \delta_\theta^* \mid \theta \in \Sigma^* \}$，$S_F = \{ \delta_\theta^* \circ F \mid \theta \in \Sigma^* \}$。$S_I$ 和 S_F 分别称为模糊自动机的可达状态集和余可达状态集。

定义 4　设 $\mathscr{N} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ 是 $\mathscr{L}$ 上一个 NFFA。$\forall A \in \mathscr{L}^Q$，$A$ 的内部定义为

$$\mathrm{int}(A) = \cup \{ C \mid C \circ f \leqslant A \circ f,\ C \in S_I,\ f \in S_F \},$$

显然，$\mathrm{int}(A) = \cup \{ C \mid C \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant A \circ \delta_\theta^* \circ F,\ C \in S_I,\ \forall \theta \in \Sigma^* \}$。

命题 3　设 $\mathscr{N} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ 是 $\mathscr{L}$ 上的一个 NFFA。$\forall A, B \in \mathscr{L}^Q$，以下结论成立：

(1) $\forall f \in S_F$，若 $B \circ f \leqslant A \circ f$，则 $B \subseteq \mathrm{int}(A)$。特别地，$A \subseteq \mathrm{int}(A)$；

(2) 若 $A \subseteq B$，则 $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(B)$；

(3) $\forall f \in S_F$，$A \circ f = \mathrm{int}(A) \circ f$；

(4) $\forall f \in S_F$，$A \circ f = B \circ f \Leftrightarrow \mathrm{int}(A) = \mathrm{int}(B)$。

证明　由定义 4，式(1)显然成立。由命题 1 式(3)、(4)易验证式(2)成立。由式(1)，可得 $\forall \theta \in \Sigma^*$，$A \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant \mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^* \circ F$；另一方面，任取 $C' \in \{ C \mid C \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant A \circ \delta_\theta^* \circ F,\ C \in S_I,\ \forall \theta \in \Sigma^* \}$，由命题 1 式(5)，可得$(\cup \{ C \mid C \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant A \circ \delta_\theta^* \circ F,\ C \in S_I,\ \forall \theta \in \Sigma^* \}) \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant A \circ \delta_\theta^* \circ F$，即 $\forall \theta \in \Sigma^*$，$\mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant A \circ \delta_\theta^* \circ F$，因此式(3)成立。$\forall f \in S_F$，设 $A \circ f = B \circ f$，由定义 4，易得 $\mathrm{int}(A) = \mathrm{int}(B)$。反之，设 $\mathrm{int}(A) = \mathrm{int}(B)$，易得 $\forall f \in S_F$，$\mathrm{int}(A) \circ f = \mathrm{int}(B) \circ f$，通过式(3)，可得 $A \circ f = B \circ f$。因此式(4)成立。

命题 4　$\forall A \in \mathscr{L}^Q$，$\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$。

证明　一方面，由命题 3 式(1)，可得 $A \subseteq \mathrm{int}(A)$，由命题 3 式(2)，可得 $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{int}(A))$；另一方面，任取 $C' \in \{ C \mid C \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant \mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^* \circ F,\ C \in S_I,\ \forall \theta \in \Sigma^* \}$，可得 $\forall \theta \in \Sigma^*$，$C' \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant \mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^* \circ F$，由命题 3 式(3)，可得 $C' \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant A \circ \delta_\theta^* \circ F$，即 $C' \in \{ C \mid C \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant A \circ \delta_\theta^* \circ F,\ C \in S_I,\ \forall \theta \in \Sigma^* \}$，从而 $C' \subseteq \cup \{ C \mid C \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant A \circ \delta_\theta^* \circ F,\ C \in S_I,\ \forall \theta \in \Sigma^* \}$。由命题 1 式(4)，可得 $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \cup \{ C \mid C \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant \mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^* \circ F,\ C \in S_I,\ \forall \theta \in \Sigma^* \} \subseteq \cup \{ C \mid C \circ \delta_\theta^* \circ F \leqslant A \circ \delta_\theta^* \circ F,\ C \in S_I,\ \forall \theta \in \Sigma^* \} = \mathrm{int}(A)$，即 $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) \subseteq \mathrm{int}(A)$。因此，$\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$。

命题 5　$\forall A \in \mathscr{L}^Q$，$\theta \in \Sigma^*$，$\mathrm{int}(\mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^*) = \mathrm{int}(A \circ \delta_\theta^*)$。特别地，$\forall \theta \in \Sigma^*$，$u \in \Sigma$，$\mathrm{int}(\mathrm{int}(A \circ \delta_\theta^*) \circ \delta_u) = \mathrm{int}(A \circ \delta_{\theta u}^*)$。

证明　$\forall \theta \in \Sigma^*$，由命题 3 式(1)，$A \subseteq \mathrm{int}(A)$，及命题 1 式(3)，$A \circ \delta_\theta^* \subseteq \mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^*$，由命题 3 式(2)，可得 $\mathrm{int}(A \circ \delta_\theta^*) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^*)$。反过来，$\forall \theta \in \Sigma^*$，任取 $C' \in \{ C \mid C \circ \delta_{\theta'}^* \circ F \leqslant (\mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^*) \circ \delta_{\theta'}^* \circ F, C \in S_I, \forall \theta' \in \Sigma^* \}$，由命题 3 式(3)可得，$\forall \theta' \in \Sigma^*$，$C' \circ \delta_{\theta'}^* \circ F \leqslant \mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^* \circ \delta_{\theta'}^* \circ F = A \circ \delta_\theta^* \circ \delta_{\theta'}^* \circ F$，即 $C' \circ \delta_{\theta'}^* \circ F \leqslant (A \circ \delta_\theta^*) \circ \delta_{\theta'}^* \circ F$，故 $C' \in \{ C \mid C \circ \delta_{\theta'}^* \circ F \leqslant (A \circ \delta_\theta^*) \circ \delta_{\theta'}^* \circ F, C \in S_I, \forall \theta' \in \Sigma^* \}$，从而 $C' \subseteq \cup \{ C \mid C \circ \delta_{\theta'}^* \circ F \leqslant (A \circ \delta_\theta^*) \circ \delta_{\theta'}^* \circ F,\ C \in S_I, \forall \theta' \in \Sigma^* \}$，因此 $\cup \{ C \mid C \circ \delta_{\theta'}^* \circ F \leqslant (\mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^*) \circ \delta_{\theta'}^* \circ F,\ C \in S_I, \forall \theta' \in \Sigma^* \} \subseteq \cup \{ C \mid C \circ \delta_{\theta'}^* \circ F \leqslant (A \circ \delta_\theta^*) \circ \delta_{\theta'}^* \circ F,\ C \in S_I, \forall \theta' \in \Sigma^* \}$，即 $\forall \theta \in \Sigma^*$，$\mathrm{int}(\mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^*) \subseteq \mathrm{int}(A \circ \delta_\theta^*)$。综上，$\mathrm{int}(\mathrm{int}(A) \circ \delta_\theta^*) = \mathrm{int}(A \circ \delta_\theta^*)$。将等式左边的 A 看作 $A \circ \delta_\theta^*$，δ_θ^* 看作 δ_u，易得 $\forall \theta \in \Sigma^*$，$u \in \Sigma$，$\mathrm{int}(\mathrm{int}(A \circ \delta_\theta^*) \circ \delta_u) = \mathrm{int}((A \circ \delta_\theta^*) \circ \delta_u) = \mathrm{int}(A \circ (\delta_\theta^* \circ \delta_u)) = \mathrm{int}(A \circ \delta_{\theta u}^*)$。

推论 1　$\forall A \in \mathscr{L}^Q$，$\theta$，$\theta' \in \Sigma^*$，$u \in \Sigma$，若 $\mathrm{int}(A \circ \delta_\theta^*) = \mathrm{int}(A \circ \delta_{\theta'}^*)$，则 $\mathrm{int}(A \circ \delta_{\theta u}^*) = \mathrm{int}(A \circ \delta_{\theta' u}^*)$。

证明　$\forall \theta, \theta' \in \Sigma^*$，$u \in \Sigma$，若 $\mathrm{int}(A \circ \delta_\theta^*) = \mathrm{int}(A \circ \delta_{\theta'}^*)$，由命题 5，则 $\mathrm{int}(A \circ \delta_{\theta u}^*) = \mathrm{int}((A \circ \delta_\theta^*) \circ \delta_u) = \mathrm{int}(\mathrm{int}(A \circ \delta_\theta^*) \circ \delta_u) = \mathrm{int}(\mathrm{int}(A \circ \delta_{\theta'}^*) \circ \delta_u) = \mathrm{int}((A \circ \delta_{\theta'}^*) \circ \delta_u) = \mathrm{int}(A \circ \delta_{\theta' u}^*)$，$\forall \theta, \theta' \in \Sigma^*$，$u \in \Sigma$。因此 $\mathrm{int}(A \circ \delta_{\theta u}^*) = \mathrm{int}(A \circ \delta_{\theta' u}^*)$。

3　NFFA 的极小确定化方法

内部构造：设 $\mathscr{N} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ 是 $\mathscr{L}$ 上一个 NFFA。可以构造一个 DFFA $\mathscr{D} = (Y, \Sigma, \eta, y_0, P)$，其中 $Y = \{ \mathrm{int}(I \circ \delta_\theta^*) \mid \theta \in \Sigma^* \} \subseteq \mathscr{L}^Q$ 是一个有限状态集；$\eta: Y \times \Sigma \to Y$ 定义为 $\forall y \in Y$，$\sigma \in \Sigma$，$\eta(y, \sigma) = \mathrm{int}(y \circ \delta_\sigma)$；$y_0 = \mathrm{int}(I) \in Y$；$P: Y \to \mathscr{L}$ 定义为 $\forall y \in Y$，$P(y) = y \circ F$。

定理 1 设$\mathscr{N}=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$是$\mathscr{L}$上一个 NFFA。则$\mathscr{D}=(Y,\Sigma,\eta,y_0,P)$是$\mathscr{L}$上一个等价于$\mathscr{N}$的极小的 DFFA。

证明 对 DFFA $\mathscr{D}$,先证转移函数 η 的扩张$\eta^*:Y\times\Sigma^*\to Y$ 满足 $\forall\theta\in\Sigma^*$, $\eta^*(y,\varepsilon)=y$ 且 $\eta^*(y,\theta)=\mathrm{int}(y\circ\delta_\theta^*)$。对 θ 的长度 n 进行归纳证明。当 $n=0$ 时,$\eta^*(y,\varepsilon)=y$ 显然成立。$\forall\theta\in\Sigma^*$,假设$|\theta|=n-1$ 时结论成立,则$|\theta|=n$ 时,不妨设 $\theta=\theta_1 u\in\Sigma^*$, $|\theta_1|=n-1$, $\forall u\in\Sigma$,由假设,$\forall\theta\in\Sigma^*$,$\eta^*(y,\theta)=\eta^*(y,\theta_1 u)=\eta(\eta^*(y,\theta_1),u)=\eta(\mathrm{int}(y\circ\delta_{\theta_1}^*),u)=\mathrm{int}(\mathrm{int}(y\circ\delta_{\theta_1}^*)\circ\delta_u)=\mathrm{int}(y\circ\delta_{\theta_1}^*\circ\delta_u)=\mathrm{int}(y\circ\delta_{\theta_1 u}^*)=\mathrm{int}(y\circ\delta_\theta^*)$。

下证 $\|\mathscr{D}\|=\|\mathscr{N}\|$。$\forall\theta\in\Sigma^*$, $\|\mathscr{D}\|(\theta)=P(\eta^*(y_0,\theta))=P(\mathrm{int}(y_0\circ\delta_\theta^*))=P(\mathrm{int}(\mathrm{int}(I)\circ\delta_\theta^*))=P(\mathrm{int}(I\circ\delta_\theta^*))=\mathrm{int}(I\circ\delta_\theta^*)\circ F\geqslant I\circ\delta_\theta^*\circ F=\|\mathscr{N}\|(\theta)$,则$\|\mathscr{N}\|(\theta)\leqslant\|\mathscr{D}\|(\theta)$。反之,$\forall\theta\in\Sigma^*$,任取$C'\in\{C\mid C\circ\delta_{\theta'}^*\circ F\leqslant(I\circ\delta_\theta^*)\circ\delta_{\theta'}^*\circ F,\ C\in S_I,\forall\theta'\in\Sigma^*\}$,易得 $C'\circ\delta_{\theta'}^*\circ F\leqslant(I\circ\delta_\theta^*)\circ\delta_{\theta'}^*\circ F$,从而 $C'\circ F\leqslant(I\circ\delta_\theta^*)\circ F$(取 $\theta'=\varepsilon$),由命题 1 式(5),可得$(\cup\{C\mid C\circ\delta_{\theta'}^*\circ F\leqslant(I\circ\delta_\theta^*)\circ\delta_{\theta'}^*\circ F,C\in S_I,\forall\theta'\in\Sigma^*\})\circ F=\cup\{C\circ F\mid C\circ\delta_{\theta'}^*\circ F\leqslant(I\circ\delta_\theta^*)\circ\delta_{\theta'}^*\circ F,\ C\in S_I,\ \forall\theta'\in\Sigma^*\}\leqslant I\circ\delta_\theta^*\circ F$,即 $\mathrm{int}(I\circ\delta_\theta^*)\circ F\leqslant I\circ\delta_\theta^*\circ F$,因此$\|\mathscr{D}\|(\theta)\leqslant\|\mathscr{N}\|(\theta)$。综上,$\|\mathscr{D}\|=\|\mathscr{N}\|$。

最后证$\mathscr{D}$是可达且约简的。$\forall A\in Y$, $\exists\theta\in\Sigma^*$,使得 $A=\mathrm{int}(I\circ\delta_\theta^*)$。由 η^* 的性质和命题 5 可知,$\eta^*(\mathrm{int}(I),\theta)=\mathrm{int}(\mathrm{int}(I)\circ\delta_\theta^*)=\mathrm{int}(I\circ\delta_\theta^*)=A$。因此$\mathscr{D}$是可达的。$\forall A,B\in Y$, $\exists\theta_1,\theta_2\in\Sigma^*$,使得 $A=\mathrm{int}(I\circ\delta_{\theta_1}^*)$, $B=\mathrm{int}(I\circ\delta_{\theta_2}^*)$。$\forall\theta\in\Sigma^*$,若 $P(\eta^*(\mathrm{int}(I\circ\delta_{\theta_1}^*),\theta))=P(\eta^*(\mathrm{int}(I\circ\delta_{\theta_2}^*),\theta))$,由内部构造得,$P(\mathrm{int}(\mathrm{int}(I\circ\delta_{\theta_1}^*)\circ\delta_\theta^*))=P(\mathrm{int}(\mathrm{int}(I\circ\delta_{\theta_2}^*)\circ\delta_\theta^*))$,进而,$\mathrm{int}(\mathrm{int}(I\circ\delta_{\theta_1}^*)\circ\delta_\theta^*)\circ F=\mathrm{int}(\mathrm{int}(I\circ\delta_{\theta_2}^*)\circ\delta_\theta^*)\circ F$。由命题 5,可得 $\mathrm{int}((I\circ\delta_{\theta_1}^*)\circ\delta_\theta^*)\circ F=\mathrm{int}((I\circ\delta_{\theta_2}^*)\circ\delta_\theta^*)\circ F$。由命题 4(3),可得$\forall f\in S_F$,$\mathrm{int}((I\circ\delta_{\theta_1}^*)\circ\delta_\theta^*)\circ f=(I\circ\delta_{\theta_1}^*)\circ\delta_\theta^*\circ f$,特别地,取 $f=F$,易得 $\mathrm{int}((I\circ\delta_{\theta_1}^*)\circ\delta_{0a}^*)\circ F=(I\circ\delta_{\theta_1}^*)\circ\delta_\theta^*\circ F$,同样的,$\mathrm{int}((I\circ\delta_{\theta_2}^*)\circ\delta_\theta^*)\circ F=(I\circ\delta_{\theta_2}^*)\circ\delta_\theta^*\circ F$,因此,$\forall\theta\in\Sigma^*$,$(I\circ\delta_{\theta_1}^*)\circ\delta_\theta^*\circ F=(I\circ\delta_{\theta_2}^*)\circ\delta_\theta^*\circ F$,即$(I\circ\delta_{\theta_1}^*)\circ f=(I\circ\delta_{\theta_2}^*)\circ f$。由定义 4,$\mathrm{int}(I\circ\delta_{\theta_1}^*)=\mathrm{int}(I\circ\delta_{\theta_2}^*)$,由命题 2 可知$\mathscr{D}$是极小的。

例子 2 设$\mathscr{L}=([0,1],\wedge,\vee)$,且$\mathscr{N}=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$是$\mathscr{L}$上一个 NFFA,其中 $Q=\{q_0,q_1\}$, $\Sigma=\{x,y\}$, $\delta(q_0,x,q_0)=0.5$, $\delta(q_0,y,q_0)=0.5$, $\delta(q_0,x,q_1)=0.5$, $\delta(q_0,y,q_1)=1$, $\delta(q_1,x,q_1)=1$, $\delta(q_1,y,q_1)=0.5$, $I=\{q_0\}$, $F=\{q_0/1,q_1/0.5\}$。$\mathscr{N}$的状态转移图见图 1。

方便起见,将$\mathscr{N}$的模糊状态和模糊转移函数表示为以下形式(其中列向量被表示成行向量的转置):

$$\boldsymbol{I}=(1\quad 0),\quad \boldsymbol{\delta}_x=\begin{pmatrix}0.5&0.5\\0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}_y=\begin{pmatrix}0.5&1\\0&0.5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=(1\quad 0.5)^{\mathrm{T}},$$

可以计算出 $\boldsymbol{S}_I=\{(1\quad 0),(0.5\quad 0.5),(0.5\quad 1)\}$, $\boldsymbol{S}_F=\{(1\quad 0.5)^{\mathrm{T}},(0.5\quad 0.5)^{\mathrm{T}}\}$。并且,由模糊状态的内部的定义,$\mathrm{int}(\boldsymbol{I})=\cup\{C\mid C\circ f\leqslant\boldsymbol{I}\circ f,\ C\in\boldsymbol{S}_I,\ f\in\boldsymbol{S}_F\}=\cup\{(1\quad 0),(0.5\quad 0.5),(0.5\quad 1)\}=(1\quad 1)$。

接下来,由内部构造法易得

$$\eta(\mathrm{int}(\boldsymbol{I}),x)=\mathrm{int}(\boldsymbol{I}\circ\boldsymbol{\delta}_x)=\mathrm{int}((0.5\quad 0.5))=(0.5\quad 1),$$
$$\eta(\mathrm{int}(\boldsymbol{I}),y)=\mathrm{int}(\boldsymbol{I}\circ\boldsymbol{\delta}_y)=\mathrm{int}((0.5\quad 1))=(0.5\quad 1),$$

由上式知 $\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_x)=\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_y)$,由推论 2.1,只需考虑 $\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_x)$的下一步转移:

$$\eta(\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_x),x)=\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_x\circ\boldsymbol{\delta}_x)=\mathrm{int}((0.5\quad 0.5))=\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_x),$$
$$\eta(\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_x),y)=\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_x\circ\boldsymbol{\delta}_y)=\mathrm{int}((0.5\quad 0.5))=\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_x),$$

令 $y_0=\mathrm{int}(\boldsymbol{I})$, $y_1=\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_x)$,则有 $P(y_0)=y_0\circ\boldsymbol{F}=1$, $P(y_1)=y_1\circ\boldsymbol{F}=0.5$。

由内部构造法得到的极小 DFFA $\mathscr{D}$的状态转移图见图 2。

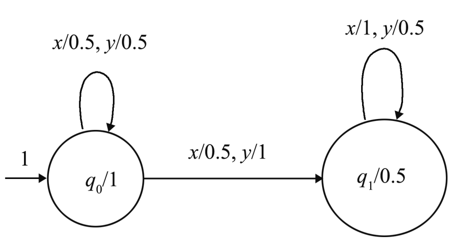

图 1 NFFA $\mathscr{N}$的状态转移图
Fig.1 State transition diagram of NFFA $\mathscr{N}$

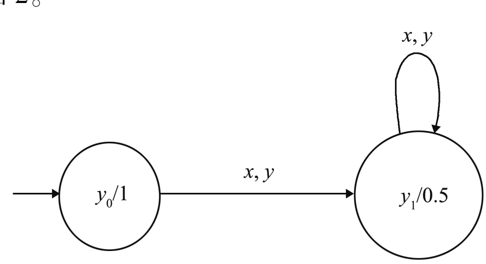

图 2 极小 DFFA $\mathscr{D}$的状态转移图
Fig.2 State transition diagram of the minimal NFFA $\mathscr{D}$

4 总结

在格序幺半群下,本文介绍了非确定型模糊有限自动机的一种新的极小确定化方法,称为内部构造法。该方法是基于语言包含程度极小确定化方法的一般化。

参考文献:

[1] WEE W G. On generalizations of adaptive algorithms and application of the fuzzy sets concept to pattern classification[D]. Lafayette: Purdue University, 1967.

[2] WEE W G, FU K S. A formulation of fuzzy automata and its application as a model of learning systems[J]. IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics, 1969, 5(3):215-223.

[3] SANTOS E S. Maximin automata[J]. Information and Control, 1968, 13(4):363-377.

[4] SANTOS E S. On reductions of maximin machines[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1972, 40(1):60-78.

[5] SANTOS E S. Fuzzy automata and languages[J]. Information Sciences, 1976, 10(3):193-197.

[6] LEE E T, ZADEH L A. Note on fuzzy languages[M]// Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A Zadeh. Singapore: World Scientific, 1996:69-82.

[7] MORDESON J N, MALIK, D S. Fuzzy automata and languages: Theory and applications[M]. New York: Chapman and Hall/CRC, 2002.

[8] PWDRYCZ W, GACEK A. Learning of fuzzy automata[J]. International Journal of Computational Intelligence and Applications, 2001, 1(1):19-33.

[9] LIN F, YING H. Modeling and control of fuzzy discrete event systems[J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Part B Cybernetics, 2002, 32(4):408-460.

[10] YING M. A formal model of computing with words[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10(5):640-652.

[11] 李永明,李平. 模糊计算理论[M]. 北京: 科学出版社, 2016:151-157.
LI Yongming, LI Ping. Fuzzy calculation theory[M]. Beijing: Science Press, 2016:151-157.

[12] 蒋宗礼,姜守旭. 形式语言与自动机理论[M]. 3 版. 北京:清华大学出版社, 2013:83-86.
JIANG Zongli, JIANG Shouxu. Formal language and automata theory[M]. 3rd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013:83-86.

[13] MOČKOŘ J. Fuzzy and non-deterministic automata[J]. Soft Computing, 1999, 3(4):221-226.

[14] BĚLOHLÁVEK R. Determinism and fuzzy automata[J]. Information Sciences, 2002, 143(1/2/3/4):205-209.

[15] QIU Daowen. Automata theory based on complete residuated latticed-valued logic[J]. Science in China Series: Information Sciences, 2001, 44(6):419-429.

[16] XING Hongyan, QIU Daowen, LIU Fuchun, et al. Equivalence in automata theory based on complete residuated lattice-valued logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158:1407-1422.

[17] LI Yongming, PEDRYCZ W. Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membership values in lattice-ordered monoids[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 156(1):68-92.

[18] LI Y M, PEDRYCZ W. Minimization of lattice finite automata and its application to the decomposition of lattice languages[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(13):1423-1436.

[19] IGNJATOVIĆ J, ĆIRIĆ M, BOGDANOVIĆ S. Determinization of fuzzy automata with membership values in complete residuated lattices[J]. Information Sciences, 2008, 178(1):164-180.

[20] JANČIĆ Z, IGNJATOVIĆ J, ĆIRIĆ M. An improved algorithm for determinization of weighted and fuzzy automata[J]. Information Sciences, 2011, 181(7):1358-1368.

[21] JANČIĆ Z, ĆIRIĆ M. Brzozowski type determinization for fuzzy automata[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 249:73-82.

[22] MICIĆ I, JANČIĆ Z, IGNJATOVIĆ J, ĆIRIĆ M. Determinization of fuzzy automata by means of the degrees of language inclusion[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(6):2144-2153.

(编辑:胡春燕)