

文章编号: 1671-9352(2024)02-0001-07 DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.489

## \*-zip 环

王尧<sup>1</sup>, 李欣<sup>1</sup>, 任艳丽<sup>2\*</sup>

(1. 南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京 210044; 2. 南京晓庄学院信息工程学院, 江苏 南京 211171)

**摘要:** 提出 \*-zip 环的概念, 给出一些 \*-zip 环的例子, 研究它们的扩张性质。证明: (1) 设 \* 是环  $R$  上的一个对合,  $n \in \mathbb{N}$  且  $n \geq 2$ , 则  $R$  是 \*-zip 环当且仅当  $V_n(R)$  是  $\overline{}$ -zip 环; (2) 设  $R$  是一个 \*-斜 Armendariz 环, 则  $R$  是 \*-zip 环当且仅当 \*-斜多项式环  $R[x; *]$  是 \*-zip 环。

**关键词:** 对合; \*-zip 环; 环的扩张; \*-斜多项式环

**中图分类号:** O153.39 **文献标志码:** A

**引用格式:** 王尧, 李欣, 任艳丽. \*-zip 环[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(2): 1-7.

## \*-zip rings

WANG Yao<sup>1</sup>, LI Xin<sup>1</sup>, REN Yanli<sup>2\*</sup>

(1. School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, Jiangsu, China; 2. School of Information Engineering, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing 211171, Jiangsu, China)

**Abstract:** The concept of \*-zip ring is introduced. Some examples of this class rings are given and their extension properties are investigate, prove that (1) Let  $R$  be a \*-ring,  $n \in \mathbb{N}$  and  $n \geq 2$ , then  $R$  is \*-zip if and only if  $V_n(R)$  is  $\overline{}$ -zip; (2) Let  $R$  be a \*-skew Armendariz ring, then  $R$  is \*-zip if and only if \*-skew polynomial ring  $R[x; *]$  is \*-zip.

**Key words:** involution; \*-zip ring; extension of ring; \*-skew polynomial ring

## 0 引言

本文对一般结合环(未必有 1)进行讨论, 另有说明除外。对任意的  $X \subseteq R$ ,  $r_R(X)$  表示  $X$  在  $R$  中的右零化子, 即  $r_R(X) = \{r \in R \mid xr = 0, \forall x \in X\}$ 。Zelmanowitz<sup>[1]</sup> 称一个环  $R$  是右(左) zip 环, 对于环  $R$  的任一非空子集  $X \subseteq R$ , 如果  $r_R(X) = 0$  ( $l_R(X) = 0$ ), 则一定存在一个有限子集  $Y \subseteq X$ , 使得  $r_R(Y) = 0$  ( $l_R(Y) = 0$ )。文献[1]指出, 一般地, 一个左 zip 环未必是右 zip 环, 一个右 zip 环也未必是左 zip 环。若一个环  $R$  既是右 zip 环又是左 zip 环, 则称  $R$  为 zip 环。近年来, 众多学者进一步研究了 zip 环的性质(参见文献[2-7])。

设  $\ast: x \rightarrow x^*$  是环  $R$  上的一个映射, 如果对于任意  $x, y \in R$ , 有  $(x+y)^* = x^* + y^*$ ,  $(xy)^* = y^*x^*$ ,  $(x^*)^* = x$ , 则称  $\ast$  是环  $R$  上的一个对合映射, 简称对合<sup>[8]</sup>, 此时称环  $R$  为 \*-环。对于环  $R$  的任一非空子集  $X \subseteq R$ , Herstein 在文献[9]中称  $r_{(R, \ast)}(X) = \{r \in R \mid xr = xr^* = 0, \forall x \in X\}$  是  $X$  在  $R$  中的右 \*-零化子。类似地, 也有左 \*-零化子的概念。本文利用 \*-零化子提出 \*-zip 环的概念, 研究这类特殊 \*-环的性质。

## 1 \*-zip 环的例子

**定义 1.1** 设  $\ast$  是环  $R$  上的一个对合映射, 称  $R$  是 \*-zip 环, 如果对于环  $R$  的任一非空子集  $X \subseteq R$ , 当

收稿日期: 2022-09-16; 网络出版时间: 2023-12-13 08:45:33

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20231212.0809.002>

基金项目: 江苏省自然科学基金资助项目(BK20181406)

第一作者简介: 王尧(1962—), 男, 教授, 博士, 研究方向为环论。E-mail: wangyao@nuist.edu.cn

\*通信作者简介: 任艳丽(1965—), 女, 教授, 硕士, 研究方向为环论。E-mail: renyanlix@163.com

$r_{(R,*)}(X) = 0$  时,一定存在一个有限子集  $Y \subseteq X$ ,使得  $r_{(R,*)}(Y) = 0$ 。

下面的引理是易见的。

**引理 1.1** 设  $*$  是环  $R$  上的一个对合映射,则有

- (1)  $r_R(X) = (l_R(X^*))^*$ ;
- (2)  $r_{(R,*)}(X) = l_{(R,*)}(X^*)$ 。

左 zip 环和右 zip 环的定义并不等价,然而  $*$ -zip 环的概念是左右对称的。

**命题 1.1** 设  $*$  是环  $R$  上的一个对合映射,则下列命题等价:

- (1) 对于环  $R$  的任一非空子集  $X \subseteq R$ ,若  $r_{(R,*)}(X) = 0$ ,则一定存在一个有限子集  $Y \subseteq X$ ,使得  $r_{(R,*)}(Y) = 0$ 。
- (2) 对于环  $R$  的任一非空子集  $X \subseteq R$ ,若  $l_{(R,*)}(X) = 0$ ,则一定存在一个有限子集  $Y \subseteq X$ ,使得

$l_{(R,*)}(Y) = 0$ 。

**证明** (1) $\Rightarrow$ (2)。设  $0 \neq X \subseteq R$  使得  $l_{(R,*)}(X) = 0$ ,则由引理 1.1 知  $r_{(R,*)}(X^*) = 0$ ,因此存在有限子集  $Y \subseteq X^*$  使得  $r_{(R,*)}(Y) = 0$ ,于是有  $l_{(R,*)}(Y^*) = 0$ 。又由于  $Y \subseteq X^*$ ,因此存在有限子集  $Y^* \subseteq (X^*)^* = X$  使得  $l_{(R,*)}(Y^*) = 0$ 。

(2) $\Rightarrow$ (1)。类似可证。

文献[10]中称一个环  $R$  是  $*$ -可逆环,如果对任意  $a, b \in R$ ,由  $ab = 0$  可以推出  $ba^* = 0$ 。

**引理 1.2** 设  $R$  是一个  $*$ -可逆环,对于环  $R$  的任一非空子集  $X \subseteq R$ , $r_R(X) = 0$  当且仅当  $r_{(R,*)}(X) = 0$ 。

**证明** 因为  $R$  是  $*$ -可逆环,所以  $rX = 0$  等价于  $r^*X = 0$ ,也等价于  $rX = r^*X = 0$ ,故对于环  $R$  的任一非空子集  $X \subseteq R$ , $r_R(X) = 0$  当且仅当  $r_{(R,*)}(X) = 0$ 。

**命题 1.2** 设  $*$  是环  $R$  上的一个对合映射,且  $R$  是  $*$ -可逆环,则  $R$  是  $*$ -zip 环当且仅当  $R$  是 zip 环。

**证明** 必要性。设  $R$  是一个  $*$ -zip 环,任取  $0 \neq X \subseteq R$  使得  $r_R(X) = 0$ ,则  $r_{(R,*)}(X) = 0$ 。又因为  $R$  是  $*$ -zip 环,故存在一个有限子集  $Y \subseteq X$  使得  $r_{(R,*)}(Y) = 0$ 。再根据引理 1.2 知  $r_R(Y) = 0$ ,故  $R$  是右 zip 环。同样可证  $R$  是左 zip 环。

充分性。类似引理 1.2 可证。

**命题 1.3** 设  $*$  是环  $R$  上的一个对合映射,若  $R$  是有限无零因子环,则  $R$  是  $*$ -zip 环。

**证明** 由文献[7,命题 1.1]知有限环是 zip 环。又因为具有对合映射的无零因子环是  $*$ -可逆环,所以根据命题 1.2,即知  $R$  是  $*$ -zip 环。

**例 1.1** (1) 设  $Z$  是整数环,  $*$  是环  $Z$  上的对合映射,则  $Z$  是  $*$ -zip 环。

(2) 设  $Z_2$  是模 2 的剩余类环, $R = Z_2 \oplus Z_2$ 。做  $R$  上的对合映射  $*$ :  $Z_2 \oplus Z_2 \rightarrow Z_2 \oplus Z_2$ ,  $(a, b)^* = (a, -b)$ ,则  $R$  是  $*$ -zip 环。

以  $C(R) = \{x \in R \mid xr = rx, \forall r \in R\}$  表示环  $R$  的中心。称一个元素  $r \in R$  是中心的,如果  $r \in C(R)$ 。称环  $R$  中的一个元素  $e$  为投射,如果  $e = e^* = e^2$ 。称环  $R$  中的一个元素  $r$  为正则元,如果  $r$  为不是零因子的非零元。

**命题 1.4** 设  $*$  是环  $R$  上的一个对合, $e$  是环  $R$  上的一个的中心正则投射元,则  $R$  是  $*$ -zip 环当且仅当  $eR$  是  $*$ -zip 环。

**证明** 必要性。设  $R$  是  $*$ -zip 环,若  $0 \neq X \subseteq eR$  使得  $r_{(eR,*)}(X) = 0$ 。令  $Y = \{a \in R \mid ea \in X\} \subseteq R$ ,任取  $b \in r_{(R,*)}(Y)$ ,则对任意  $ea \in X$  有  $(ea)(eb) = e(ab) = 0$ ,  $(ea)(eb)^* = e(ab^*) = 0$ ,因此  $eb \in r_{(eR,*)}(X) = 0$ ,即  $eb = 0$ 。又由于  $e$  是正则元,于是有  $b = 0$ ,因此  $r_{(R,*)}(Y) = 0$ 。因为  $R$  是  $*$ -zip 环,所以存在有限子集  $Y_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq Y$  使得  $r_{(R,*)}(Y_0) = 0$ 。令  $X_0 = \{ea_1, ea_2, \dots, ea_m\}$ ,显然  $X_0 \subseteq X$ 。任取  $eb_j \in r_{(eR,*)}(X_0)$ ,对任意  $0 \leq i \leq m$ ,有  $a_i(eb_j) = (ea_i)(eb_j) = 0$ ,  $a_i(eb_j)^* = (ea_i)(eb_j^*) = 0$ ,故有  $eb_j \in r_{(R,*)}(Y_0) = 0$ ,  $b_j = 0$ ,从而有  $r_{(eR,*)}(X_0) = 0$ ,推出  $eR$  是  $*$ -zip 环。

充分性。设  $eR$  是  $*$ -zip 环,且  $0 \neq X \subseteq R$  使得  $r_{(R,*)}(X) = 0$ 。对于  $Y = \{ea \in eR \mid a \in X\} \subseteq eR$ ,取  $eb \in r_{(eR,*)}(Y)$ ,则对任意  $a \in X$ ,有  $a(eb) = (ea)(eb) = 0$ ,  $a(eb)^* = (ea)(eb)^* = 0$ ,故有  $eb \in r_{(R,*)}(X) = 0$ ,从而有  $r_{(eR,*)}(Y) = 0$ 。由于  $eR$  是  $*$ -zip 环,因此存在有限子集  $Y_0 = \{ea_1, ea_2, \dots, ea_m\} \subseteq Y$  使得  $r_{(eR,*)}(Y_0) = 0$ 。令  $X_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq X$ ,若  $b_j \in r_{(R,*)}(X_0)$ ,则对任意  $0 \leq i \leq m$ ,有  $(ea_i)(eb_j) = e(a_i b_j) = 0$ ,  $(ea_i)(eb_j)^* =$

$e(a_i b_j^*) = 0$ , 因此  $eb_j \in r_{(eR, *)}(Y_0) = 0$ , 即  $eb_j = 0$ . 又由于  $e$  是正则元, 因此有  $b_j = 0$ , 从而推出  $r_{(R, *)}(X_0) = 0$ ,  $R$  是 \* -zip 环.

**命题 1.5** 设  $R$  和  $S$  是 2 个环,  $*$  是环  $R$  上的一个对合,  $t$  是环  $R$  到环  $S$  上的同构映射,  $t(*) = t * t^{-1}$  是环  $S$  上的对合, 则环  $R$  是 \* -zip 环当且仅当环  $S$  是  $t(*)$ -zip 环.

**证明** 必要性. 设  $R$  是 \* -zip 环,  $0 \neq X \subseteq S$  使得  $r_{(S, t(*))}(X) = 0$ . 因为  $t$  是环  $R$  到环  $S$  上的同构, 所以  $t^{-1}$  是环  $S$  到环  $R$  上的同构, 故对任意的  $a' \in S$ , 存在  $a \in R$  使得  $t(a) = a'$ ,  $t^{-1}(a') = a$ . 令  $Y = \{a \in R \mid t(a) = a' \in X\}$ , 若  $b \in r_{(R, *)}(Y)$ , 则对任意  $a \in Y$  有  $ab = ab^* = 0$ , 因此  $0 = t(ab) = t(a)t(b) = a'b'$ ,  $0 = t(ab^*) = t(a)t(b^*) = a'(b')^{t(*)}$ . 于是有  $b' = t(b) \in r_{(S, t(*))}(X) = 0$ , 从而  $b = 0$ ,  $r_{(R, *)}(Y) = 0$ . 由于  $R$  是 \* -zip 环, 因此存在有限非空子集  $Y_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq Y$  使得  $r_{(R, *)}(Y_0) = 0$ . 令  $X_0 = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_m\}$ ,  $X_0$  是  $X$  的有限非空子集, 任取  $c' \in r_{(S, t(*))}(X_0) = 0$ , 则对任意的  $0 \leq i \leq m$ , 有  $a'_i c' = a'_i (c')^{t(*)} = 0$ , 因此有  $0 = t^{-1}(a'_i c') = t^{-1}(a'_i) t^{-1}(c') = a_i c$ ,  $0 = t^{-1}(a'_i (c')^{t(*)}) = t^{-1}(a_i) t^{-1}((c')^{t(*)}) = a_i c^*$ , 故  $c \in r_{(R, *)}(Y_0) = 0$ ,  $c' = t(c) = 0$ , 从而推出  $r_{(S, t(*))}(X_0) = 0$ ,  $S$  是  $t(*)$ -zip 环.

充分性. 设  $S$  是  $t(*)$ -zip 环,  $0 \neq X \subseteq R$  使得  $r_{(R, *)}(X) = 0$ . 令  $Y = \{a' = t(a) \in S \mid a \in X\}$ , 若  $b' \in r_{(S, t(*))}(Y)$ , 则任取  $a' = t(a) \in Y$ , 有  $a'b' = a'(b')^{t(*)} = 0$ , 于是有  $0 = t^{-1}(a'b') = t^{-1}(a')t^{-1}(b') = ab$ ,  $0 = t^{-1}(a'(b')^{t(*)}) = t^{-1}(a')t^{-1}((b')^{t(*)}) = ab^*$ ,  $b \in r_{(R, *)}(X) = 0$ , 所以有  $b' = 0$ ,  $r_{(S, t(*))}(Y) = 0$ . 由于  $S$  是  $t(*)$ -zip 环, 因此存在  $Y$  的有限非空子集  $Y_0 = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_m\} \subseteq Y$  使得  $r_{(S, t(*))}(Y_0) = 0$ . 令  $X_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , 显然  $X_0$  是  $X$  的有限非空子集. 若  $c \in r_{(R, *)}(X_0) = 0$ , 则对任意的  $0 \leq i \leq m$ , 有  $a_i c = a_i c^* = 0$ , 从而  $0 = t(a_i c) = t(a_i) t(c) = a'_i c'$ ,  $0 = t(a_i c^*) = t(a_i) t(c^*) = a'_i (c')^{t(*)}$ , 故  $c' \in r_{(S, t(*))}(Y_0) = 0$ ,  $c = t^{-1}(c') = 0$ . 由此知  $r_{(R, *)}(X_0) = 0$ ,  $R$  是 \* -zip 环.

称一个对合环  $(R, *)$  是一个交换环  $S$  上的 \* -代数<sup>[8]</sup>, 如果  $R$  是  $S$  上的代数,  $S$  是具有对合  $*^1: s \rightarrow s^*$  的环, 且满足  $(sx)^* = s^* x^*$ , 其中  $s \in S, x \in R$ . 我们用  $D = R \times S$  表示  $R$  通过  $S$  的 Dorroh 扩张, 其中加法运算就是按分量相加, 乘法运算为  $(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1, s_1 s_2)$ , 其中  $s_i \in S, r_i \in R$ . 在 Dorroh 扩张环  $D = R \times S$  上定义  $\bar{*}: D \rightarrow D, (r, s)^* = (r^*, s^*)$ , 易知  $\bar{*}$  是  $D$  上的一个对合映射.

**命题 1.6** 设  $*$  是环  $R$  上的一个对合,  $R$  是一个交换环且  $2^{-1} \in R$ , 若  $R$  通过  $R$  的 Dorroh 扩张  $D$  是  $\bar{*}$ -zip 环, 则  $R$  是 \* -zip 环.

**证明** 设  $D = D(R, R)$  是  $\bar{*}$ -zip 环,  $0 \neq X \subseteq R$  使得  $r_{(R, *)}(X) = 0$ . 令  $Y = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq D$ , 若  $(a, b) \in r_{(D, \bar{*})}(Y)$ , 则对任意  $x \in X$  有  $(x, x)(a, b) = (x, x)(a, b)^{\bar{*}} = 0$ , 因此有  $(xa + xa + bx, xb) = (xa^* + xa^* + b^* x, xb^*) = 0$ , 故有  $2xa + bx = 0, 2xa^* + b^* x = 0, xb = xb^* = 0$ . 这样就有  $b \in r_{(R, *)}(X) = 0$ , 于是有  $b = 0, 2xa = 2xa^* = 0$ . 因为  $2^{-1} \in R$ , 所以有  $a \in r_{(R, *)}(X) = 0$ , 推出  $r_{(D, \bar{*})}(Y) = 0$ . 又因为  $D$  是  $\bar{*}$ -zip 环, 所以存在  $Y$  的有限子集  $Y_0 = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), \dots, (x_m, x_m)\}$  使得  $r_{(D, \bar{*})}(Y_0) = 0$ . 取  $X$  的有限子集  $X_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , 若  $c \in r_{(R, *)}(X_0)$ , 则有  $(x_i, x_i)(c, 0) = (2x_i c, 0) = 0, (x_i, x_i)(c, 0)^{\bar{*}} = (2x_i c^*, 0) = 0$ , 从而有  $(c, 0) \in r_{(D, \bar{*})}(Y_0) = 0$ ,  $c = 0$  和  $r_{(R, *)}(X_0) = 0$ , 从而推出  $r_{(R, *)}(X_0) = 0$ , 故  $R$  是 \* -zip 环.

对于一个 \* -环  $R$ , 设  $\Delta$  是环  $R$  中所有中心正则元组成的乘法封闭子集, 则可以在环  $\Delta^{-1}R = \{u^{-1}a \mid u \in \Delta, a \in R\}$  上定义一个映射  $\bar{*}: \Delta^{-1}R \rightarrow \Delta^{-1}R, (u^{-1}a)^{\bar{*}} = u^{-1}a^*$ , 易见  $\bar{*}$  是环  $\Delta^{-1}R$  上的一个对合映射.

**命题 1.7** 设  $*$  是环  $R$  上的一个对合, 则  $R$  是 \* -zip 环当且仅当  $\Delta^{-1}R$  是  $\bar{*}$ -zip 环.

**证明** 必要性. 设  $R$  是 \* -zip 环,  $0 \neq X \subseteq \Delta^{-1}R$  使得  $r_{(\Delta^{-1}R, \bar{*})}(X) = 0$ . 取  $Y = \{a \in R \mid u^{-1}a \in X\}$ , 如果  $b \in r_{(R, *)}(Y)$ , 则有  $Yb = Yb^* = 0$ , 故  $Xb = Xb^* = 0$ . 任取  $u \in \Delta$ , 则有  $X(u^{-1}b) = X(u^{-1}b)^{\bar{*}} = 0$ , 因此  $u^{-1}b \in r_{(\Delta^{-1}R, \bar{*})}(X) = 0$ . 因为  $u$  是正则元, 所以  $b = 0$ , 从而推出  $r_{(R, *)}(Y) = 0$ . 又由于  $R$  是 \* -zip 环, 因此存在有限子集  $Y_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq Y$  使得  $r_{(R, *)}(Y_0) = 0$ , 且存在  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in X$  使得  $\alpha_i = u_i^{-1}a_i$ , 其中  $u_i \in \Delta$ , 对任意的  $1 \leq i \leq m$ . 取  $X$  的非空有限子集  $X_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ , 任取  $\beta = v^{-1}c \in r_{(\Delta^{-1}R, \bar{*})}(X_0)$ , 对任意的  $1 \leq i \leq m$ , 有  $\alpha_i \beta = u_i^{-1}a_i v^{-1}c = 0, \alpha_i \beta^{\bar{*}} = u_i^{-1}a_i v^{-1}c^* = 0$ , 从而推出  $a_i c = a_i c^* = 0$ , 故  $c \in r_{(R, *)}(Y_0) = 0, \beta = 0$ . 由此可知  $r_{(\Delta^{-1}R, \bar{*})}(X_0) = 0$ , 这证明了  $\Delta^{-1}R$  是  $\bar{*}$ -zip 环.

充分性。设  $\Delta^{-1}R$  是  $\overline{*}$ -zip 环,  $0 \neq X \subseteq R$  使得  $r_{(R,*)}(X) = 0$ 。令  $Y = \{u^{-1}a \in \Delta^{-1}R \mid a \in X, u \in \Delta\}$ , 若  $\beta = v^{-1}b \in r_{(\Delta^{-1}R, \overline{*})}(Y)$ , 则对任意  $u^{-1}a \in Y$  有  $u^{-1}a\beta = u^{-1}av^{-1}b = 0, u^{-1}a\beta^{\overline{*}} = u^{-1}av^{-1}b^{\overline{*}} = 0$ , 从而有  $ab = ab^{\overline{*}} = 0, b \in r_{(R,*)}(X) = 0$ 。由此知  $\beta = 0, r_{(\Delta^{-1}R, \overline{*})}(Y) = 0$ 。又因为  $\Delta^{-1}R$  是  $\overline{*}$ -zip 环, 所以存在  $Y$  的有限子集  $Y_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$  使得  $r_{(\Delta^{-1}R, \overline{*})}(Y_0) = 0$ 。令  $X_0 = \{a_i \mid \alpha_i = u^{-1}a_i \in Y_0, 1 \leq i \leq m\}$ , 如果  $c \in r_{(R,*)}(X_0)$ , 则  $X_0c = X_0c^{\overline{*}} = 0, Y_0c = Y_0c^{\overline{*}} = 0$ 。于是对任意  $w \in \Delta$  有  $Y_0(w^{-1}c) = Y_0(w^{-1}c)^{\overline{*}} = 0$ , 从而  $w^{-1}c \in r_{(\Delta^{-1}R, \overline{*})}(Y_0) = 0$ 。由于  $w$  是正则元, 所以  $c = 0$ , 这推出  $r_{(R,*)}(X_0) = 0$ , 故  $R$  是  $*$ -zip 环。

## 2 $*$ -zip 环的扩张

设  $R$  是一个环, 令  $M_n(R)$  表示  $R$  上的  $n \times n$  阶全矩阵环,  $T_n(R)$  表示  $R$  上的  $n$  阶上三角矩阵环, 记

$$D_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in R, 1 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq n \right\},$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix},$$

而  $V_n(R) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in R, 1 \leq i \leq n\}$ 。

对于环  $R$  上的任意对合  $*$ , 我们可以将其扩展到环  $V_n(R)$  上的映射  $\overline{*}: V_n(R) \rightarrow V_n(R), (a_{ij})^{\overline{*}} = (a_{ij}^{\overline{*}})$ , 显然  $\overline{*}$  是环  $V_n(R)$  上的一个对合。

**定理 2.1** 设  $*$  是环  $R$  上的一个对合,  $n \in \mathbf{N}$  且  $n \geq 2$ , 则  $R$  是  $*$ -zip 环当且仅当  $V_n(R)$  是  $\overline{*}$ -zip 环。

**证明** 充分性。设  $V_n(R)$  是  $\overline{*}$ -zip 环, 任取  $0 \neq X \subseteq R$  使得  $r_{(R,*)}(X) = 0$ 。对于  $Y = \{(a, a, \dots, a) \mid a \in R\} \subseteq V_n(R)$ , 任取  $B = \{(b_1, b_2, \dots, b_n) \mid b_i \in R, 1 \leq i \leq n\} \in r_{(V_n(R), \overline{*})}(Y)$ , 有  $YB = YB^{\overline{*}} = 0$ 。于是对任意  $a \in X$ , 有  $(a, a, \dots, a)(b_1, b_2, \dots, b_n) = 0$ , 故对任意的  $1 \leq j \leq n$ , 有  $ab_j = ab_j^{\overline{*}} = 0, b_j \in r_{(R,*)}(X) = 0$ , 因而  $r_{(V_n(R), \overline{*})}(Y) = 0$ 。又因为  $V_n(R)$  是  $\overline{*}$ -zip 环, 所以存在有限子集  $Y_0 = \{(a_1, a_1, \dots, a_1), (a_2, a_2, \dots, a_2), \dots, (a_m, a_m, \dots, a_m)\}$  使得  $r_{(V_n(R), \overline{*})}(Y_0) = 0$ 。令  $X_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq X$ , 任取  $b \in r_{(R,*)}(X_0)$ , 则有  $(a_i, a_i, \dots, a_i)(0, 0, \dots, b) = (0, 0, \dots, a_i b) = 0, (a_i, a_i, \dots, a_i)(0, 0, \dots, b)^{\overline{*}} = (0, 0, \dots, a_i b^{\overline{*}}) = 0$ 。于是有  $(0, 0, \dots, b) \in r_{(V_n(R), \overline{*})}(Y_0) = 0$ , 从而  $b = 0$ , 故  $r_{(R,*)}(X_0) = 0, R$  是  $*$ -zip 环。

必要性。设  $R$  是一个  $*$ -zip 环, 任取  $0 \neq X \subseteq V_n(R)$  使得  $r_{(V_n(R), \overline{*})}(X) = 0$ , 令

$$Y = \left\{ a_i \in R \left[ \begin{pmatrix} a_i & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_i & \cdots & a_{i(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_i \end{pmatrix} \in X \right. \right\},$$

显然  $Y \subseteq R$ 。如果  $b \in r_{(R,*)}(Y)$ , 则对任意  $(a_i, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in X$ , 有  $(a_i, a_{i2}, \dots, a_{in})(0, 0, \dots, b) = (0, 0, \dots, a_i b) = 0, (a_i, a_{i2}, \dots, a_{in})(0, 0, \dots, b)^{\overline{*}} = (0, 0, \dots, a_i b^{\overline{*}}) = 0$ , 因此有  $(0, 0, \dots, b) \in r_{(V_n(R), \overline{*})}(X) = 0, b = 0$ , 于是有  $r_{(R,*)}(Y) = 0$ 。由于  $R$  是  $*$ -zip 环, 因此存在有限子集  $Y_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq Y$  使得  $r_{(R,*)}(Y_0) = 0$ 。令  $A_k = (a_k, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \in X$ , 其中  $1 \leq k \leq m$ , 取  $X_0 = \{A_k \mid 1 \leq k \leq m\} \subseteq X$ , 若  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in r_{(V_n(R), \overline{*})}(X_0)$ , 则对任意的  $1 \leq k \leq m$ , 有  $A_k B = A_k B^{\overline{*}} = 0$ , 即

$$a_k b_1 = 0, \tag{1}$$

$$a_k b_2 + a_{k2} b_1 = 0, \tag{2}$$

$$a_k b_3 + a_{k2} b_2 + a_{k3} b_1 = 0, \tag{3}$$

⋮

$$a_k b_{n-1} + a_{k2} b_{n-2} + \dots + a_{k(n-1)} b_1 = 0, \tag{(n-1)}$$

$$a_k b_n + a_{k2} b_{n-1} + \dots + a_{kn} b_1 = 0, \tag{(n)}$$

$$a_k b_1^* = 0, \tag{1'}$$

$$a_k b_2^* + a_{k2} b_1^* = 0, \tag{2'}$$

$$a_k b_3^* + a_{k2} b_2^* + a_{k3} b_1^* = 0, \tag{3'}$$

⋮

$$a_k b_{n-1}^* + a_{k2} b_{n-2}^* + \dots + a_{k(n-1)} b_1^* = 0, \tag{((n-1)')}$$

$$a_k b_n^* + a_{k2} b_{n-1}^* + \dots + a_{kn} b_1^* = 0. \tag{(n')}$$

因为对任意  $1 \leq k \leq m$ , 有  $a_k b_1 = a_k b_1^* = 0$ , 所以  $b_1, b_1^* \in r_{(R, *)}(Y_0) = 0$ . 这样式(2)和式(2')可以分别化简为  $a_k b_2 = 0, a_k b_2^* = 0$ , 故  $b_2, b_2^* \in r_{(R, *)}(Y_0) = 0$ , 因此由式(3)和式(3')知对任意  $1 \leq k \leq m$ , 有  $a_k b_3 = a_k b_3^* = 0$ , 所以  $b_3, b_3^* \in r_{(R, *)}(Y_0) = 0$ . 重复上述过程, 对所有  $1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n$  有  $a_k b_j = a_k b_j^* = 0$ . 于是可得  $B = 0$ , 因而有  $r_{(V_n(R), \overline{*})}(X_0) = 0, V_n(R)$  是  $\overline{*}$ -zip 环.

给定环  $R$  和一个双模  ${}_R M_R$ , 称环  $T(R, M) = R \oplus M$  是  $R$  通过  $M$  的平凡扩张, 其中加法定义为  $(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$ , 乘法定义为  $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$ .  $T(R, M)$  与所有形如

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

的矩阵构成的环同构, 其中  $r \in R, m \in M$ . 对于环  $R$  的任意对合  $*$ , 定义  $\overline{*} : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^{\overline{*}} = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ 0 & a^* \end{pmatrix}$ , 则

$\overline{*}$  是  $T(R, R)$  上的一个对合.

**推论 2.1** 设  $*$  是环  $R$  上的一个对合, 则  $R$  是  $*$ -zip 环当且仅当平凡扩张  $T(R, R)$  是  $\overline{*}$ -zip 环.

**证明** 因为  $T(R, R) \cong V_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$ , 故由定理 2.1 知  $R$  是  $*$ -zip 环当且仅当  $T(R, R)$  是  $\overline{*}$ -zip 环.

**推论 2.2** 设  $*$  是环  $R$  上的一个对合映射,  $n$  是自然数且  $n \geq 2$ , 则  $R[x] / \langle x^n \rangle$  是  $\overline{*}$ -zip 环当且仅当  $R$  是  $*$ -zip 环, 其中  $\langle x^n \rangle$  是由  $x^n$  生成的  $R[x]$  的理想.

**证明** 因为  $R[x] / \langle x^n \rangle \cong V_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in R \right\}$ , 所以由定理 2.1 即知

$R[x] / \langle x^n \rangle$  是  $\overline{*}$ -zip 环当且仅当  $R$  是  $*$ -zip 环.

设  $*$  是环  $R$  上的一个对合, 做  $M_n(R)$  上的一个映射  $\overline{*} : M_n(R) \rightarrow M_n(R), (a_{ij})^{\overline{*}} = (a_{ij}^*)^T$ , 显然  $\overline{*}$  是  $M_n(R)$  上的一个对合.

**命题 2.1** 设  $*$  是环  $R$  上的一个对合, 若  $M_n(R)$  是  $\overline{*}$ -zip 环, 则  $R$  是  $*$ -zip 环.

**证明** 类似地, 定理 2.1 充分性可证.

称一个环  $R$  是 Armendariz 环<sup>[11]</sup>, 如果对任意的  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j \in R[x]$ , 由  $f(x)g(x) = 0$  可以推出  $a_i b_j = 0$ , 其中  $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ .

设  $R$  是一个环,  $*$  是环  $R$  的一个对合,  $R[x]$  是环  $R$  上的多项式环, 做  $R[x]$  上的诱导映射  $\overline{*} :$  对任意  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, (f(x))^{\overline{*}} = \sum_{i=0}^m a_i^* x^i$ , 显然  $\overline{*}$  是  $R[x]$  上的一个对合映射, 仍把  $\overline{*}$  记为  $*$ . 我们用  $R[x, x^{-1}]$  来表示系数环为  $R$  的 Laurent 多项式环, 其中元素是形如  $f(x) = \sum_{i=k}^m a_i x^i$  的多项式,  $a_i \in R, k, m \in \mathbf{Z}$  (未必是正整

数),加法和乘法运算为普通多项式加法与乘法,显然多项式环是 Laurent 多项式环的子环。类似地,可以定义  $R[x, x^{-1}]$  上的相应诱导对合映射。

对于任意  $f(x) \in R[x]$ , 用  $C_f$  表示  $f(x)$  的所有系数的集合。

**定理 2.2** 设环  $R$  是一个 Armendariz 环, 则环  $R$  是  $*$ -zip 环当且仅当环  $R[x]$  是  $*$ -zip 环。

**证明** 必要性。设环  $R$  是  $*$ -zip 环, 若  $0 \neq X \subseteq R[x]$  使得  $r_{(R[x], *)}(X) = 0$ , 我们令  $Y = \{a \mid a \in C_f, f(x) \in X\} \subseteq R$ 。如果  $a \in r_{(R, *)}(Y)$ , 则对任意  $b \in Y$  有  $ba = ba^* = 0$ , 因此对任意  $f(x) \in X$  有  $f(x)a = f(x)a^* = 0$ , 故  $a \in r_{(R[x], *)}(X) = 0$ , 从而有  $r_{(R, *)}(Y) = 0$ 。因为  $R$  是  $*$ -zip 环, 所以存在有限子集  $Y_0 \subseteq Y$  使得  $r_{(R, *)}(Y_0) = 0$ 。对任意  $a \in Y_0$ , 取定一个多项式  $g_a(x) \in X$  (存在, 可能不止一个) 使得  $a \in C_{g_a}$ 。令  $X_0$  是这些取定的  $g_a \in X$  的集合, 则  $X_0$  是  $X$  的有限非空子集。再令  $Y_1 = \{b \mid b \in C_{g_a} \mid g_a(x) \in X_0\}$ , 由于  $Y_0 \subseteq Y_1$ , 因此  $r_{(R, *)}(Y_1) \subseteq r_{(R, *)}(Y_0) = 0$ 。若  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in r_{(R[x], *)}(X_0)$ , 则对任意  $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j \in X_0$ , 有  $g(x)f(x) = 0$ 。又因为  $R$  是 Armendariz 环, 故有  $b_j a_i = b_j a_i^* = 0$ , 对任意的  $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ , 于是有  $a_i \in r_{(R, *)}(Y_1) = 0, f(x) = 0, r_{(R[x], *)}(X_0) = 0$ 。这证明了  $R[x]$  是  $*$ -zip 环。

充分性。设环  $R[x]$  是  $*$ -zip 环, 若  $0 \neq X \subseteq R$  使得  $r_{(R, *)}(X) = 0$ 。因为  $X \subseteq R[x]$ , 若  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in r_{(R[x], *)}(X)$ , 则对任意  $b \in X$ , 有  $bf(x) = ba_0 + ba_1 x + \dots + ba_m x^m = 0, bf^*(x) = ba_0^* + ba_1^* x + \dots + ba_m^* x^m = 0$ , 从而对任意的  $0 \leq i \leq m$  有  $ba_i = ba_i^* = 0$ , 所以也有  $a_i \in r_{(R, *)}(X) = 0$ , 因此可得  $f(x) = 0$  和  $r_{(R[x], *)}(X) = 0$ 。因为  $R[x]$  是  $*$ -zip 环, 所以存在有限子集  $X_0 \subseteq X$  使得  $r_{(R[x], *)}(X_0) = 0$ , 推出  $r_{(R, *)}(X_0) = r_{(R[x], *)}(X_0) \cap R = 0$ , 故  $R$  是  $*$ -zip 环。

**推论 2.3** 设环  $R$  是一个约化环, 则环  $R$  是  $*$ -zip 环当且仅当环  $R[x]$  是  $*$ -zip 环。

**推论 2.4** 设环  $R$  是一个 Armendariz 环, 则下列命题等价:

- (1) 环  $R$  是  $*$ -zip 环;
- (2) 环  $R[x]$  是  $*$ -zip 环;
- (3) 环  $R[x, x^{-1}]$  是  $*$ -zip 环。

**证明** (1)  $\Leftrightarrow$  (2) 由定理 2.2 得证。

(2)  $\Leftrightarrow$  (3)。设环  $R[x]$  是  $*$ -zip 环, 令  $\Delta = \{1, x, x^2, \dots\}$ , 则  $\Delta$  是  $R[x]$  的中心正则封闭子集。又因为  $R[x; x^{-1}] = \Delta^{-1}R[x]$ , 由命题 1.7 知  $R[x, x^{-1}]$  是  $*$ -zip 环。

设  $R$  是一个环,  $*$  是环  $R$  上的对合映射, 我们称  $R[x; *]$  是系数环为  $R$  的  $*$ -斜多项式环, 其中元素是形如  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$  的多项式, 加法为普通多项式加法, 但乘法服从  $xa = a^* x$ 。对于上述环  $R$ , 可以发现对于任意  $a, b \in R$ , 有  $x(ab) = (ab)^* x = (b^* a^*) x = b^* (a^* x) = b^* (xa) = (b^* x) a = (xb) a = x(ba)$ , 这意味着环  $R$  必须是交换的。

称环  $R$  是  $*$ -斜 Armendariz 环<sup>[12]</sup>, 如果对任意的  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j \in R[x; *]$ , 由  $f(x)g(x) = 0$  可以推出  $a_i b_j = 0, i=0, 2, 4, \dots, a_i b_j^* = 0, i=1, 3, 5, \dots$ , 其中  $0 \leq j \leq n$ 。

设  $*$  是环  $R$  上的对合, 取  $a \in R$ , 用  $d_m(a)$  来表示元素  $a$  做  $m$  次对合映射, 例如  $d_2(a) = (a^*)^* = a, d_3(a) = ((a^*)^*)^* = a^*$ 。

**定理 2.3** 设  $R$  是一个  $*$ -斜 Armendariz 环, 则  $R$  是  $*$ -zip 环当且仅当  $R[x; *]$  是  $*$ -zip 环。

**证明** 必要性。设环  $R$  是  $*$ -zip 环,  $0 \neq X \subseteq R[x; *]$  使得  $r_{(R[x; *], *)}(X) = 0$ 。令  $Y = \{a \mid a \in C_f, f(x) \in X\} \subseteq R$ , 如果  $a \in r_{(R, *)}(Y)$ , 则对任意  $b \in Y$ , 有  $ba = ba^* = 0$ , 因此对任意  $f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n \in X$ , 有  $f(x)a = b_0 a + b_1 a^* x + b_2 a x^2 + \dots + b_n d_n(a) x^n = 0, f(x)a^* = b_0 a^* + b_1 a x + b_2 a^* x^2 + \dots + b_n d_{n+1}(a) x^n = 0$  和  $a \in r_{(R[x], *)}(X) = 0$ , 从而有  $r_{(R, *)}(Y) = 0$ 。因为  $R$  是  $*$ -zip 环, 所以存在有限子集  $Y_0 \subseteq Y$  使得  $r_{(R, *)}(Y_0) = 0$ 。令  $X_0 = \{g_a(x) \mid \text{对任意的 } a \in Y_0, \text{ 取定一个 } g_a(x) \in X \text{ 使得 } a \in C_{g_a}\}$ ,  $X_0$  是  $X$  的一个有限非空子集。再令  $Y_1 = \{b \mid b \in C_{g_a}, g_a(x) \in X_0\}$ , 由于  $Y_0 \subseteq Y_1$ , 因此  $r_{(R, *)}(Y_1) \subseteq r_{(R, *)}(Y_0) = 0$ 。若  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in r_{(R[x], *)}(X_0)$ , 则

对任意  $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j \in X_0$ , 有  $g(x)f(x) = g(x)f^*(x) = 0$ . 又因为  $R$  是一个 \* -斜 Armendariz 环, 由  $g(x)f(x) = 0$  知  $b_j a_i = 0, i = 0, 2, 4, \dots, b_j a_i^* = 0, i = 1, 3, 5, \dots$ . 由  $g(x)f(x)^* = 0$  知  $b_j a_i^* = 0, i = 0, 2, 4, \dots, b_j a_i = 0, i = 1, 3, 5, \dots$ . 综上有  $b_j a_i = b_j a_i^* = 0$ , 对任意的  $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ , 于是有  $a_i \in r_{(R, *)}(Y_1) = 0$ , 故  $f(x) = 0, r_{(R[x], *)}(X_0) = 0$ , 证明了  $R[x; *]$  是 \* -zip 环。

充分性。类似定理 2.2 的充分性证明可证。

**推论 2.5** 设环  $R$  是一个 \* -rigid 环, 则  $R$  是 \* -zip 环当且仅当环  $R[x; *]$  是 \* -zip 环。

最后给出例子说明:一般地, \* -zip 环的直积和直和未必是 \* -zip 环。

**例 2.1** 设  $Z$  是整数环,  $* : Z \rightarrow Z, a^* = -a$ . 显然 \* 是环  $Z$  上的对合映射,  $Z$  是 \* -zip 环。设  $R = \prod_{i=1}^{\infty} Z$ ,

定义  $\bar{*} : \prod_{i=1}^{\infty} Z \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} Z, (a_1, a_2, a_3, \dots)^{\bar{*}} = (a_1^*, a_2^*, a_3^*, \dots) = (-a_1, -a_2, -a_3, \dots)$ , 则  $\bar{*}$  是  $R$  上的一个对合。

再令  $e = (1, 0, 0, \dots)$ , 则有  $R = eR \oplus (1-e)R$ , 且  $eR$  和  $(1-e)R$  是 \* -zip 环, 然而环  $R$  并不是  $\bar{*}$ -zip 环。这是因为, 对于子集  $X = \{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots\} \subseteq R$ , 显然  $r_{(R, \bar{*})}(X) = 0$ ; 但对于  $X$  的任意有限子集  $X_0$ , 有  $r_{(R, \bar{*})}(X) \neq 0$ , 因而  $R$  不是  $\bar{*}$ -zip 环。

参考文献:

[1] ZELMANOWITZ J M. The finite intersection property on annihilator right ideals[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1976, 57(2):213-216.

[2] FAITH C. Rings with zero intersection property on annihilators: zip rings[J]. Publicacions Matemàtiques, 1989, 33(2):329-338.

[3] FAITH C. Annihilator ideals, associated primes and Kasch-McCoy commutative rings[J]. Communications in Algebra, 1991, 19(7):1967-1982.

[4] HONG C Y, KIM N K, KWAK T K, et al. Extensions of zip rings[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2005, 195:231-242.

[5] ZIEMBOWSKI M. A note on zip rings[J]. Acta Mathematica Hungarica, 2013, 141:127-131.

[6] CEDÓ F. Zip rings and Mal'cev domains[J]. Communications in Algebra, 1991, 19(7):1983-1991.

[7] LEROY A, MATCZUK J. Zip property of certain ring extensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2016, 220:335-345.

[8] BERBERIAN S K. Baer \*-rings[M]. Berlin: Springer, 1972.

[9] HERSTEIN I N. Rings with involution[M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1976.

[10] FAKIEH W M, NAUMAN S K. Reversible rings with involutions and some minimalities[J]. The Scientific World Journal, 2013, 8:1-8.

[11] REGE M B, CHHAWCHHARIA S. Armendariz rings[J]. Proceedings of the Japan Academy Series A Mathematical Sciences, 1997, 73(1):14-17.

[12] FAKIEH W M. \*-skew polynomial rings[J]. British Journal of Mathematics & Computer Science, 2015, 10(4):1-12.

(编辑:李艺)