山东大学学报(理学版)2024 年 2 月 第 59 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.59, No.2, 2024

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2024)02-0032-06　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.665

微分 Lie-Yamaguti 超代数的上同调与形变

腾文,龙凤山
(贵州财经大学数学与统计学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要:给出微分 Lie-Yamaguti 超代数的表示和上同调,并根据上同调考虑微分 Lie-Yamaguti 超代数的线性形变。
关键词:微分 Lie-Yamaguti 超代数;上同调;线性形变
中图分类号:O152.5　　**文献标志码**:A
引用格式:腾文,龙凤山.微分 Lie-Yamaguti 超代数的上同调与形变[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(2):32-37,46.

Cohomology and deformation of differential Lie-Yamaguti superalgebras

TENG Wen, LONG Fengshan
(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, Guizhou, China)

Abstract: Firstly, the representation and cohomology of differential Lie-Yamaguti superalgebras are introduced. Then, the linear deformation of differential Lie-Yamaguti superalgebras is considered according to cohomology.
Key words: differential Lie-Yamaguti superalgebra; cohomology; linear deformation

1　引言与预备知识

Lie-Yamaguti 代数的概念由 Kinyon 和 Weinstein[1] 首先提出,这种代数结构可追溯到 Nomizu[2] 和 Yamaguti[3-4] 的相关工作。作为 Lie-Yamaguti 代数的推广,文献[5-6]引入 Lie-Yamaguti 超代数的概念。其后,文献[7-8]研究了 Lie-Yamaguti 超代数的交换扩张和构造方法。另外,导子(或称为微分)在研究代数结构时非常有用[9-12]。近年来,各种代数对象导子的研究见文献[13-19]。受最近文献[15-18]的启发,本文研究微分 Lie-Yamaguti 超代数的表示、上同调和线性形变,所得结论可认为是具有导子的李三系[15-16]、具有超导子的李超代数[17]和具有导子的 Lie-Yamaguti 代数[18]相应结论的推广。

本文中所有向量空间和线性算子均在特征为 0 的域 K 上。

接下来回顾 Lie-Yamaguti 超代数[5,19]的相关概念。设 $L=L_{\bar 0}\oplus L_{\bar 1}$ 为 $\mathbf{Z}_2$-分次向量空间,如果 $x\in L_{\bar i}$, $i=0,1$,则称 x 是次数为 $\bar i$ 的齐次元,记为 $\bar x:=\bar i$。设 $L'=L'_{\bar 0}\oplus L'_{\bar 1}$ 为另一个 $\mathbf{Z}_2$-分次向量空间,则 $\mathrm{Hom}(L,L')$ 自然成为 $\mathbf{Z}_2$-分次向量空间,如果 $f\in\mathrm{Hom}(L,L')$, $x\in L$, $\overline{f(x)}=\bar x+\bar i$,则称 f 是次数为 $\bar i$ 的齐次元,记为 $\bar f:=\bar i$。进而,如果 $\bar f=\bar 0$(或者 $\bar f=\bar 1$),则称 f 是偶(或者奇)线性映射。

定义 1[5]　设 $L=L_{\bar 0}\oplus L_{\bar 1}$ 为 $\mathbf{Z}_2$-分次向量空间,如果偶双线性映射 $[\cdot,\cdot]:L\times L\to L$ 和偶三线性映射 $\{\cdot,\cdot,\cdot\}:L\times L\times L\to L$,对任意齐次元 $x,y,z,u,v,w\in L$,使得下列条件成立:

(LYs1) $[L_{\bar i},L_{\bar j}]\subseteq L_{\bar i+\bar j}$, $\{L_{\bar i},L_{\bar j},L_{\bar k}\}\subseteq L_{\bar i+\bar j+\bar k}$, $\bar i,\bar j,\bar k\in\mathbf{Z}_2$,即映射 $[\cdot,\cdot]$ 和 $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$ 为偶;

(LYs2) $[x,y]=-(-1)^{\bar x\bar y}[y,x]$;

收稿日期:2022-12-16; **网络出版时间**:2023-12-13 08:42:56
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20231212.0810.004
基金项目:贵州省科技计划项目(黔科合基础[2018]1020);贵州省高等学校系统建模与数据挖掘重点实验室项目(2023013);贵州省科技厅基金项目(黔科合基础-ZK[2023]一般 025)
第一作者简介:腾文(1986—),男,讲师,博士,研究方向为代数学及其应用. E-mail:tengwen@mail.gufe.edu.cn

(LYs3) $\{x,y,z\}=-(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\{y,x,z\}$;

(LYs4) $\circlearrowleft_{x,y,z}(-1)^{\bar{x}\bar{z}}[[x,y],z]+\circlearrowleft_{x,y,z}(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\{x,y,z\}=0$;

(LYs5) $\circlearrowleft_{x,y,z}(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\{[x,y],z,u\}=0$;

(LYs6) $\{x,y,[u,v]\}=[\{x,y,u\},v]+(-1)^{\bar{u}(\bar{x}+\bar{y})}[u,\{x,y,v\}]$;

(LYs7) $\{x,y,\{u,v,w\}\}=\{\{x,y,u\},v,w\}+(-1)^{\bar{u}(\bar{x}+\bar{y})}\{u,\{x,y,v\},w\}+(-1)^{(\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}\{u,v,\{x,y,w\}\}$,

其中$\circlearrowleft_{x,y,z}$表示 x、y、z 循环排列求和,即$\circlearrowleft_{x,y,z}(-1)^{\bar{x}\bar{z}}[[x,y],z]=(-1)^{\bar{x}\bar{z}}[[x,y],z]+(-1)^{\bar{z}\bar{y}}[[z,x],y]+(-1)^{\bar{y}\bar{x}}[[y,z],x]$,则称$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$是 Lie-Yamaguti 超代数。

定义 2[19]　设 L 为 Lie-Yamaguti 超代数,M 为 $\mathbf{Z}_2$-分次向量空间,$\rho:L\to\mathrm{End}(M)$为偶线性映射,$D,\ \theta:L\times L\to\mathrm{End}(M)$为偶双线性映射,对任意齐次元 $x,y,z,u,v\in L$,使得下列条件成立:

(SR1) $D(x,y)-(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\theta(y,x)+\theta(x,y)+\rho([x,y])-\rho(x)\rho(y)+(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho(y)\rho(x)=0$;

(SR2) $(-1)^{\bar{x}\bar{z}}D([x,y],z)+(-1)^{\bar{x}\bar{y}}D([y,z],x)+(-1)^{\bar{y}\bar{z}}D([z,x],y)=0$;

(SR3) $\theta([x,y],z)=(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\theta(x,z)\rho(y)-(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\theta(y,z)\rho(x)$;

(SR4) $D(x,y)\rho(z)=(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\rho(z)D(x,y)+\rho(\{x,y,z\})$;

(SR5) $\theta(x,[y,z])=(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho(y)\theta(x,z)-(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{z}}\rho(z)\theta(x,y)$;

(SR6) $D(x,y)\theta(u,v)=(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{u}+\bar{v})}\theta(u,v)D(x,y)+\theta(\{x,y,u\},v)+(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})\bar{u}}\theta(u,\{x,y,v\})$;

(SR7) $\theta(x,\{y,z,u\})=(-1)^{(\bar{x}+\bar{y})(\bar{z}+\bar{u})}\theta(z,u)\theta(x,y)-(-1)^{\bar{x}\bar{y}+\bar{z}\bar{u}+\bar{x}\bar{u}}\theta(y,u)\theta(x,z)+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}D(y,z)\theta(x,u)$,

则称$(M;\rho,D,\theta)$是 L 的表示。

设 L 为 Lie-Yamaguti 超代数,给定齐次元 $x_1,x_2\in L$,偶线性映射 $\rho:L\to\mathrm{End}(L)$和偶双线性映射 $\mathscr{L},\mathscr{R}:L\otimes L\to\mathrm{End}(L)$为

$$\rho(x_1)(x_3):=[x_1,x_3],\quad \mathscr{L}(x_1,x_2)(x_3):=\{x_1,x_2,x_3\},$$
$$\mathscr{R}(x_1,x_2)(x_3):=(-1)^{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)\bar{x}_3}\{x_3,x_1,x_2\},\quad \forall x_3\in L_{\bar{0}}\cup L_{\bar{1}},$$

则$(L;\rho,\mathscr{L},\mathscr{R})$为 L 的一个表示,称其为伴随表示。

回顾文献[19],设 M 为 Lie-Yamaguti 超代数 L 的表示,对于 $n\geqslant 1$,定义 $C^n_{\mathrm{LYs}}(L,M)$为 $C^n_{\mathrm{LYs}}(L,M)=\{f\in\mathrm{Hom}(\wedge^n L,M)\mid f(x_1,x_2,\cdots,x_{2i-1},x_{2i},\cdots,x_n)=0$,如果 $x_{2i-1}=x_{2i}\}$。

对任意的$(f,g)\in C^{2n}_{\mathrm{LYs}}(L,M)\times C^{2n+1}_{\mathrm{LYs}}(L,M)$,上边缘算子 $\delta=(\delta_{\mathrm{I}},\delta_{\mathrm{II}}):C^{2n}_{\mathrm{LYs}}(L,M)\times C^{2n+1}_{\mathrm{LYs}}(L,M)\to C^{2n+2}_{\mathrm{LYs}}(L,M)\times C^{2n+3}_{\mathrm{LYs}}(L,M)$, $(f,g)\mapsto(\delta_{\mathrm{I}}(f,g),\delta_{\mathrm{II}}(f,g))$为

$$\begin{aligned}
&(\delta_I(f,g))(x_1,x_2,\cdots,x_{2n+2})\\
=&(-1)^{(\bar{g}+\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_{2n})\bar{x}_{2n+1}}\rho(x_{2n+1})g(x_1,x_2,\cdots,x_{2n},x_{2n+2})\\
&-(-1)^{(\bar{g}+\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_{2n+1})\bar{x}_{2n+2}}\rho(x_{2n+2})g(x_1,x_2,\cdots,x_{2n},x_{2n+1})-g(x_1,x_2,\cdots,x_{2n},[x_{2n+1},x_{2n+2}])\\
&+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k+1+(\bar{f}+\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_{2k-2})(\bar{x}_{2k-1}+\bar{x}_{2k})}D(x_{2k-1},x_{2k})f(x_1,x_2,\cdots,\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\cdots,x_{2n+2})\\
&+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+2}(-1)^{n+k+(\bar{x}_{2k-1}+\bar{x}_{2k})(\bar{x}_{2k+1}+\bar{x}_{2k+2}+\cdots+\bar{x}_{j-1})}f(x_1,x_2,\cdots,\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\cdots,\{x_{2k-1},x_{2k},x_j\},\cdots,x_{2n+2}),\\
&(\delta_{\mathrm{II}}(f,g))(x_1,x_2,\cdots,x_{2n+3})\\
=&(-1)^{(\bar{g}+\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_{2n+1})(\bar{x}_{2n+2}+\bar{x}_{2n+3})}\theta(x_{2n+2},x_{2n+3})g(x_1,x_2,\cdots,x_{2n+1})\\
&-(-1)^{(\bar{g}+\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_{2n})(\bar{x}_{2n+1}+\bar{x}_{2n+3})+\bar{x}_{2n+2}\bar{x}_{2n+3}}\theta(x_{2n+1},x_{2n+3})g(x_1,x_2,\cdots,x_{2n},x_{2n+2})\\
&+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+k+1+(\bar{g}+\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_{2k-2})(\bar{x}_{2k-1}+\bar{x}_{2k})}D(x_{2k-1},x_{2k})g(x_1,x_2,\cdots,\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\cdots,x_{2n+3})\\
&+\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=2k+1}^{2n+3}(-1)^{n+k+(\bar{x}_{2k-1}+\bar{x}_{2k})(\bar{x}_{2k+1}+\bar{x}_{2k+2}+\cdots+\bar{x}_{j-1})}g(x_1,x_2,\cdots,\hat{x}_{2k-1},\hat{x}_{2k},\cdots,\{x_{2k-1},x_{2k},x_j\},\cdots,x_{2n+3}),
\end{aligned}$$

其中$\bar{\delta}_{\mathrm{I}}=\bar{\delta}_{\mathrm{II}}=\bar{0}$,符号 ^ 表示下面的字母被删掉。

特别地,对于 $f\in C^1_{\mathrm{LYs}}(L,M)$,上边缘算子 $\delta=(\delta_{\mathrm{I}},\delta_{\mathrm{II}}):C^1_{\mathrm{LYs}}(L,M)\to C^2_{\mathrm{LYs}}(L,M)\times C^3_{\mathrm{LYs}}(L,M)$, $f\mapsto(\delta_{\mathrm{I}}(f),\delta_{\mathrm{II}}(f))$为

$$\delta_{\mathrm{I}}(f)(x,y)=\rho(x)f(y)-(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho(y)f(x)-f([x,y]),$$

$$\delta_{\mathrm{II}}(f)(x,y,z)=D(x,y)f(z)+(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\theta(y,z)f(x)-(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\theta(x,z)f(y)-f(\{x,y,z\})。$$

则 $\delta\circ\delta=0$,即 $\delta_{\mathrm{I}}\circ\delta=0$, $\delta_{\mathrm{II}}\circ\delta=0$。记 $\mathscr{C}_{\mathrm{LYs}}^{n+1}(L,M):=C_{\mathrm{LYs}}^{2n}(L,M)\times C_{\mathrm{LYs}}^{2n+1}(L,M)$,称为 Lie-Yamaguti 超代数 L 的 $(n+1)$-上链空间,其系数取自表示 M,则 $(\oplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{C}_{\mathrm{LYs}}^{n+1}(L,M),\delta)$ 为上链复形。对于 $p\geqslant 1$,相应的 p-上同调群记成 $\mathscr{H}_{\mathrm{LYs}}^{p}(L,M)$,显然 $\mathscr{H}_{\mathrm{LYs}}^{p}(L,M)$ 是 $\mathbf{Z}_2$-分次的。

2 主要结论

首先引入微分 Lie-Yamaguti 超代数和罗巴 Lie-Yamaguti 超代数的概念。

定义 3 设 L 为 Lie-Yamaguti 超代数。

(ⅰ) 如果线性算子 $d:L\to L$,对任意齐次元 $x,y,z\in L$ 满足下列等式:

$$d([x,y])=[d(x),y]+(-1)^{\bar{d}\bar{x}}[x,d(y)], \tag{1}$$

$$d(\{x,y,z\})=\{d(x),y,z\}+(-1)^{\bar{d}\bar{x}}\{x,d(y),z\}+(-1)^{\bar{d}(\bar{x}+\bar{y})}\{x,y,d(z)\}, \tag{2}$$

则称 d 为 L 上的微分超算子。所有微分超算子构成的集合记为 $\mathrm{Der}(L)$,显然 $\mathrm{Der}(L)$ 是 $\mathbf{Z}_2$-分次向量空间。进一步地,称 (L,d) 为微分 Lie-Yamaguti 超代数。

(ⅱ) 如果线性算子 $T:L\to L$,对任意齐次元 $x,y,z\in L$ 满足下列等式:

$$[Tx,Ty]=T((-1)^{\bar{T}\bar{x}}[Tx,y]+[x,Ty]),$$

$$\{Tx,Ty,Tz\}=T(\{x,Ty,Tz\}+(-1)^{\bar{T}(\bar{x}+\bar{y})}\{Tx,Ty,z\}+(-1)^{\bar{T}\bar{x}}\{Tx,y,Tz\}),$$

则称 T 是 L 上罗巴超算子。所有罗巴超算子构成的集合记为 $\mathrm{RB}(L)$,显然 $\mathrm{RB}(L)$ 是 $\mathbf{Z}_2$-分次向量空间。进一步地,称 (L,T) 为罗巴 Lie-Yamaguti 超代数。

注 1 (ⅰ) 当 $L_{\bar{1}}$ 为零空间,即 $L=L_{\bar{0}}$,则微分 Lie-Yamaguti 超代数 (L,d) 自然成为具有导子的 Lie-Yamaguti 代数[18];罗巴 Lie-Yamaguti 超代数 (L,T) 自然成为罗巴 Lie-Yamaguti 代数。

(ⅱ) 当 Lie 括积平凡时,即 $[\cdot,\cdot]=0$,则微分 Lie-Yamaguti 超代数 (L,d) 自然成为具有超导子的李超三系;当 $\{\cdot,\cdot,\cdot\}=0$,则微分 Lie-Yamaguti 超代数 (L,d) 自然成为具有超导子的李超代数[17]。

(ⅲ) 当 $\mathbf{Z}_2$ 为更一般的阿贝尔群 Γ 时,则微分 Lie-Yamaguti 超代数为微分 Lie-Yamaguti Color 代数,更多有关 Lie-Yamaguti Color 代数的细节见文献[19]。

例 1 设 $L=L_{\bar{0}}\oplus L_{\bar{1}}$ 为 3-维 $\mathbf{Z}_2$-分次空间,其中,$L_{\bar{0}}$ 由基元 ε_1、ε_3 生成,$L_{\bar{1}}$ 由基元 ε_2 生成。L 关于基元 ε_1、ε_2、ε_3 的非零积运算 $[\cdot,\cdot]$ 和 $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$ 定义如下:

$$[\varepsilon_2,\varepsilon_3]=2\varepsilon_2=-[\varepsilon_3,\varepsilon_2],\quad [\varepsilon_3,\varepsilon_1]=\varepsilon_1=-[\varepsilon_1,\varepsilon_3],\quad \{\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_3\}=-\varepsilon_2=-\{\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_3\},$$

则 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 是 Lie-Yamaguti 超代数[8]。进一步地,通过直接计算,对任意 $a,b,c_1,c_2\in K$,线性算子 $d=\begin{pmatrix} a & 0 & c_1 \\ 0 & b & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 L 上的一个微分超算子。

命题 1 设 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 为 Lie-Yamaguti 超代数,一个可逆齐次超算子 $d\in\mathrm{Der}(L)$ 当且仅当 $d^{-1}\in\mathrm{RB}(L)$。换言之,(L,d) 为微分 Lie-Yamaguti 超代数等价于 (L,d^{-1}) 为罗巴 Lie-Yamaguti 超代数。

证明 设 d 是 L 上的可逆微分超算子,则对任意齐次元 $x,y,z\in L$,记 $a=d^{-1}(x)$, $b=d^{-1}(y)$, $c=d^{-1}(z)$。由式(1)、(2)有

$$d([a,b])=[d(a),b]+(-1)^{\bar{d}\bar{a}}[a,d(b)]=[x,d^{-1}(y)]+(-1)^{\overline{d^{-1}}\bar{x}}[d^{-1}(x),y],$$

$$\begin{aligned} d(\{a,b,c\})&=\{d(a),b,c\}+(-1)^{\bar{d}\bar{a}}\{a,d(b),c\}+(-1)^{\bar{d}(\bar{a}+\bar{b})}\{a,b,d(c)\}\\ &=\{x,d^{-1}(y),d^{-1}(z)\}+(-1)^{\overline{d^{-1}}\bar{x}}\{d^{-1}(x),y,d^{-1}(z)\}+(-1)^{\overline{d^{-1}}(\bar{x}+\bar{y})}\{d^{-1}(x),d^{-1}(y),z\}, \end{aligned}$$

所以,$[d^{-1}(x),d^{-1}(y)]=d^{-1}([x,d^{-1}(y)]+(-1)^{\overline{d^{-1}}\bar{x}}[d^{-1}(x),y])$, $\{d^{-1}(x),d^{-1}(y),d^{-1}(y)\}=d^{-1}(\{x,d^{-1}(y),d^{-1}(z)\}+(-1)^{\overline{d^{-1}}\bar{x}}\{d^{-1}(x),y,d^{-1}(z)\}+(-1)^{\overline{d^{-1}}(\bar{x}+\bar{y})}\{d^{-1}(x),d^{-1}(y),z\})$,

因此,d^{-1} 是 L 上的罗巴超算子。反之,类似可得。证毕。

定义 4 设 (L,d) 为微分 Lie-Yamaguti 超代数,$(M;\rho,D,\theta)$ 为 Lie-Yamaguti 代数 L 的表示,线性映射

$d_M:M\to M$，对任意齐次元 $x,y\in L$，$m\in M$，满足

$$d_M(\rho(x)(m))=\rho(d(x))(m)-(-1)^{\bar{d}\bar{x}}\rho(x)(d_M(m)),$$

$$d_M(\theta(x,y)(m))=\theta(d(x),y)(m)+(-1)^{\bar{d}\bar{x}}\theta(x,d(y))(m)+(-1)^{\bar{d}(\bar{x}+\bar{y})}\theta(x,y)(d_M(m)),$$

$$d_M(D(x,y)(m))=D(d(x),y)(m)+(-1)^{\bar{d}\bar{x}}D(x,d(y))(m)+(-1)^{\bar{d}(\bar{x}+\bar{y})}D(x,y)(d_M(m)),$$

则称 $(M;d_M)$ 为微分 Lie-Yamaguti 超代数 (L,d) 的表示。

特别地，$(L;\rho,\mathscr{L},\mathscr{R},d)$ 为 (L,d) 的一个表示，称其为伴随表示。

直接计算有以下命题 2。

命题 2　设 $(M;d_M)$ 为微分 Lie-Yamaguti 超代数 (L,d) 的一个表示，对任意齐次元 $x,y,z\in L$，$m,n,p\in M$，定义 $L\oplus M$ 上的运算为

$$[(x,m),(y,n)]_{\ltimes}=([x,y],\rho(x)(m)-(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\rho(y)(n)),$$

$$\{(x,m),(y,n),(z,p)\}_{\ltimes}=(\{x,y,z\},(-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})}\theta(y,z)(m)-(-1)^{\bar{y}\bar{z}}\theta(x,z)(n)+D(x,y)(p)),$$

$$d\oplus d_M(x,m)=(d(x),d_M(m)),$$

其中 $\overline{(x,m)}=\bar{x}$，$\overline{(y,n)}=\bar{y}$，$\overline{(z,p)}=\bar{z}$，$\overline{d\oplus d_M}=\bar{d}$，则 $(L\oplus M,d\oplus d_M)$ 为微分 Lie-Yamaguti 超代数，称为 L 与 M 的半直积微分 Lie-Yamaguti 超代数。

接下来，引入微分 Lie-Yamaguti 超代数的上同调。

设 $(M;d_M)$ 为微分 Lie-Yamaguti 超代数 (L,d) 的一个表示，对任意的 $n\geqslant 1$，偶线性映射 $\Phi:C^n_{\mathrm{LYs}}(L,M)\to C^n_{\mathrm{LYs}}(L,M)$ 为

$$\Phi(f)(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\bar{d}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_{i-1})}f(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},d(x_i),x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_n)$$
$$-(-1)^{\bar{d}\bar{f}}d_M\circ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)。$$

特别地，对于 $f\in C^1_{\mathrm{LYs}}(L,M)$，$\Phi(f)(x_1)=f\circ d(x_1)-(-1)^{\bar{d}\bar{f}}d_M\circ f(x_1)$。

引理 1　映射 Φ 为上链映射，即 $\Phi\circ\delta=\delta\circ\Phi$，等价于 $\Phi\circ\delta_{\mathrm{I}}=\delta_{\mathrm{I}}\circ\Phi$ 与 $\Phi\circ\delta_{\mathrm{II}}=\delta_{\mathrm{II}}\circ\Phi$。

在 $C^{2n}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)\times C^{2n+1}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$ 上定义线性算子 ∂ 如下：

当 $n=0$ 时，$\partial=(\partial_{\mathrm{I}},\partial_{\mathrm{II}}):C^1_{\mathrm{LYsD}}(L,M)\to C^2_{\mathrm{LYsD}}(L,M)\times C^3_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$，$f\in C^1_{\mathrm{LYsD}}(L,M):=C^1_{\mathrm{LYs}}(L,M)$，$\partial(f)=(\partial_{\mathrm{I}}(f),\ \partial_{\mathrm{II}}(f))=(\delta_{\mathrm{I}}(f),(\delta_{\mathrm{II}}(f),-\Phi(f)))$。

当 $n=1$ 时，$\partial=(\partial_{\mathrm{I}},\partial_{\mathrm{II}}):C^2_{\mathrm{LYsD}}(L,M)\times C^3_{\mathrm{LYsD}}(L,M)\to C^4_{\mathrm{LYsD}}(L,M)\times C^5_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$，对任意 $f_1\in C^2_{\mathrm{LYsD}}(L,M):=C^2_{\mathrm{LYs}}(L,M)$，$(f_2,g_2)\in C^3_{\mathrm{LYsD}}(L,M):=C^3_{\mathrm{LYs}}(L,M)\oplus C^1_{\mathrm{LYs}}(L,M)$，$\partial(f_1,(f_2,g_2))=(\partial_{\mathrm{I}}(f_1,(f_2,g_2)),\partial_{\mathrm{II}}(f_1,(f_2,g_2)))$，其中，

$$\partial_{\mathrm{I}}(f_1,(f_2,g_2))=(\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{I}}(g_2)+\Phi(f_1)),\quad \partial_{\mathrm{II}}(f_1,(f_2,g_2))=(\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{II}}(g_2)+\Phi(f_2))。$$

当 $n\geqslant 2$ 时，$\partial=(\partial_{\mathrm{I}},\partial_{\mathrm{II}}):C^{2n}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)\times C^{2n+1}_{\mathrm{LYD}}(L,M)\to C^{2n+2}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)\times C^{2n+3}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$，对任意 $(f_1,g_1)\in C^{2n}_{\mathrm{LYsD}}(L,M):=C^{2n}_{\mathrm{LYs}}(L,M)\oplus C^{2n-2}_{\mathrm{LYs}}(L,M)$，$(f_2,g_2)\in C^{2n+1}_{\mathrm{LYsD}}(L,M):=C^{2n+1}_{\mathrm{LYs}}(L,M)\oplus C^{2n-1}_{\mathrm{LYs}}(L,M)$，$\partial((f_1,g_1),(f_2,g_2))=(\partial_{\mathrm{I}}((f_1,g_1),(f_2,g_2)),\partial_{\mathrm{II}}((f_1,g_1),(f_2,g_2)))$，其中

$$\partial_{\mathrm{I}}((f_1,g_1),(f_2,g_2))=(\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{I}}(g_1,g_2)+(-1)^{n+1}\Phi(f_1)),$$

$$\partial_{\mathrm{II}}((f_1,g_1),(f_2,g_2))=(\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{II}}(g_1,g_2)+(-1)^{n+1}\Phi(f_2))。$$

命题 3　上述定义的线性算子 ∂ 为上边缘算子，即满足 $\partial\circ\partial=0$。

证明　由引理 1 和 $\delta\circ\delta=0$，对任意的 $f\in C^1_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$，有

$$\begin{aligned}&\partial\circ\partial(f)\\&=\partial((\delta_{\mathrm{I}}(f),(\delta_{\mathrm{II}}(f),-\Phi(f)))\\&=((\delta_{\mathrm{I}}(\delta_{\mathrm{I}}(f),\delta_{\mathrm{II}}(f)),\delta_{\mathrm{I}}(-\Phi(f))+\Phi(\delta_{\mathrm{I}}(f))),(\delta_{\mathrm{II}}(\delta_{I}(f),\delta_{\mathrm{II}}(f)),\delta_{\mathrm{II}}(-\Phi(f))+\Phi(\delta_{\mathrm{II}}(f))))\\&=0。\end{aligned}$$

对任意 $f_1\in C^2_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$，$(f_2,g_2)\in C^3_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$，有

$$
\begin{aligned}
&\partial\circ\partial(f_1,(f_2,g_2))\\
&=\partial((\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{I}}(g_2)+\Phi(f_1)),(\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{II}}(g_2)+\Phi(f_2)))\\
&=(\delta_{\mathrm{I}}(\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2)),\delta_{\mathrm{I}}(\delta_{\mathrm{I}}(g_2)+\Phi(f_1),\delta_{\mathrm{II}}(g_2)+\Phi(f_2))-\Phi(\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2)),\\
&\quad(\delta_{\mathrm{II}}(\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2)),\delta_{\mathrm{II}}(\delta_{\mathrm{I}}(g_2)+\Phi(f_1),\delta_{\mathrm{II}}(g_2)+\Phi(f_2))-\Phi(\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2))))\\
&=(0,\delta_{\mathrm{I}}(\Phi(f_1),\Phi(f_2))-\Phi(\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2)),(0,\delta_{\mathrm{II}}(\Phi(f_1),\Phi(f_2))-\Phi(\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2))))\\
&=0。
\end{aligned}
$$

当 $n\geqslant 2$ 时,同理,对任意$(f_1,g_1)\in C^{2n}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$, $(f_2,g_2)\in C^{2n+1}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$,有

$$
\begin{aligned}
&\partial\circ\partial((f_1,g_1),(f_2,g_2))\\
&=\partial((\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{I}}(g_1,g_2)+(-1)^{n+1}\Phi(f_1)),(\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{II}}(g_1,g_2)+(-1)^{n+1}\Phi(f_2)))\\
&=(\delta_{\mathrm{I}}(\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2)),\delta_{\mathrm{I}}(\delta_{\mathrm{I}}(g_1,g_2)+(-1)^{n+1}\Phi(f_1),\delta_{\mathrm{II}}(g_1,g_2)+(-1)^{n+1}\Phi(f_2))\\
&\quad+(-1)^{n+2}\Phi(\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2)),(\delta_{\mathrm{II}}(\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2),\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2)),\delta_{\mathrm{II}}(\delta_{\mathrm{I}}(g_1,g_2)+(-1)^{n+1}\Phi(f_1),\\
&\quad\delta_{\mathrm{II}}(g_1,g_2)+(-1)^{n+1}\Phi(f_2))+(-1)^{n+2}\Phi(\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2))))\\
&=(0,\delta_{\mathrm{I}}((-1)^{n+1}\Phi(f_1),(-1)^{n+1}\Phi(f_2))+(-1)^{n+2}\Phi(\delta_{\mathrm{I}}(f_1,f_2)),\\
&\quad(0,\delta_{\mathrm{II}}((-1)^{n+1}\Phi(f_1),(-1)^{n+1}\Phi(f_2))+(-1)^{n+2}\Phi(\delta_{\mathrm{II}}(f_1,f_2))))\\
&=0。
\end{aligned}
$$

证毕。

记 $\mathscr{C}^{n+1}_{\mathrm{LYsD}}(L,M):=C^{2n}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)\times C^{2n+1}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$,称为微分 Lie-Yamaguti 超代数$(L,d)$的$(n+1)$-上链空间,其系数取自表示 M。由命题3,$(\oplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{C}^{n+1}_{\mathrm{LYsD}}(L,M),\partial)$为上链复形。当 $p\geqslant 2$ 时,对应(L,d)的 p-上闭链群与 p-上边缘链群分别记成 $\mathscr{Z}^{p}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$与 $\mathscr{B}^{p}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)$。其系数取自表示 M 的 p-上同调群为 $\mathscr{H}^{p}_{\mathrm{LYsD}}(L,M):=\dfrac{\mathscr{Z}^{p}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)}{\mathscr{B}^{p}_{\mathrm{LYsD}}(L,M)}$。

最后,利用上同调讨论微分 Lie-Yamaguti 超代数的线性形变。

定义 5 设(L,d)为微分 Lie-Yamaguti 超代数,L 上 Lie-Yamaguti 超代数的运算为 ν、μ,即 $\nu(x,y)=[x,y]$与 $\mu(x,y,z)=\{x,y,z\}$。如果

$$\nu_t=\nu+\nu_1 t,\quad \mu_t=\mu+\mu_1 t,\quad d_t=d+d_1 t,$$

其中$(\nu_1,\mu_1)\in\mathscr{C}^{2}_{\mathrm{LYs}}(L,L)_{\bar{0}}$, $d_1\in\mathrm{End}(L)$,使得(L,ν_t,μ_t,d_t)为微分 Lie-Yamaguti 代数,则称(ν_1,μ_1,d_1)生成微分 Lie-Yamaguti 超代数(L,d)的一个线性形变。

命题 4 设(ν_t,μ_t,d_t)为微分 Lie-Yamaguti 超代数(L,d)的线性形变,则$(\nu_1,(\mu_1,d_1))\in\mathscr{C}^{2}_{\mathrm{LYsD}}(L,L)$为2-上闭链,其系数取自伴随表示。

证明 设(ν_1,μ_1,d_1)生成微分 Lie-Yamaguti 超代数(L,d)的线性形变,对任意齐次元 $x,y,z,u,v,w\in L$,则有下列等式:

$$\nu_1(x,y)+(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\nu_1(y,x)=0;\tag{3}$$

$$\mu_1(x,y,z)+(-1)^{\bar{x}\bar{y}}\mu_1(y,x,z)=0;\tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\bar{x}\bar{z}}(\nu(\nu_1(x,y),z)+\nu_1(\nu(x,y),z))+(-1)^{\bar{y}\bar{x}}(\nu(\nu_1(y,z),x)+\nu_1(\nu(y,z),x))\\
&\quad+(-1)^{\bar{z}\bar{y}}(\nu(\nu_1(z,x),y)+\nu_1(\nu(z,x),y))+(-1)^{\bar{x}\bar{z}}\mu_1(x,y,z)+(-1)^{\bar{y}\bar{x}}\mu_1(y,z,x)\\
&\quad+(-1)^{\bar{z}\bar{y}}\mu_1(z,x,y)=0;
\end{aligned}\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\bar{x}\bar{z}}(\mu(\nu_1(x,y),z,u)+\mu_1(\nu(x,y),z,u))+(-1)^{\bar{y}\bar{x}}(\mu(\nu_1(y,z),x,u)+\mu_1(\nu(y,z),x,u))\\
&\quad+(-1)^{\bar{z}\bar{y}}(\mu(\nu_1(z,x),y,u)+\mu_1(\nu(z,x),y,u))=0;
\end{aligned}\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_1(x,y,[z,v])+\{x,y,\nu_1(z,v)\}\\
&=\nu_1(\{x,y,z\},v)+[\mu_1(x,y,z),v]+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}([z,\mu_1(x,y,v)]+\nu_1(z,\{x,y,v\}));
\end{aligned}\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_1(x,y,\{z,v,w\})+\{x,y,\mu_1(z,v,w)\}\\
&=\mu_1(\{x,y,z\},v,w)+\{\mu_1(x,y,z),v,w\}+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\{z,\mu_1(x,y,v),w\}
\end{aligned}
$$

$$+(-1)^{\bar{z}(\bar{x}+\bar{y})}\mu_1(z,\{x,y,v\},w)+(-1)^{(\bar{z}+\bar{v})(\bar{x}+\bar{y})}(\{z,v,\mu_1(x,y,w)\}+\mu_1(z,v,\{x,y,w\}));\quad(8)$$

$$d_1([x,y])+d(\nu_1(x,y))$$
$$=\nu_1(d(x),y)+[d_1(x),y]+(-1)^{\bar{d}\bar{x}}\nu_1(x,d(y))+(-1)^{\bar{d}_1\bar{x}}[x,d_1(y)];\quad(9)$$

$$d_1(\{x,y,z\})+d(\mu_1(x,y,z))$$
$$=\mu_1(d(x),y,z)+\{d_1(x),y,z\}+(-1)^{\bar{d}\bar{x}}\mu_1(x,d(y),z)+(-1)^{\bar{d}_1\bar{x}}\{x,d_1(y),z\}$$
$$+(-1)^{\bar{d}(\bar{x}+\bar{y})}\mu_1(x,y,d(z))+(-1)^{\bar{d}_1(\bar{x}+\bar{y})}\{x,y,d_1(z)\}。\quad(10)$$

由式(3)—(8)可知,$\delta(\nu_1,\mu_1)=0$。由式(9)—(10)可知,$\delta(d_1)+\Phi(\nu_1,\mu_1)=0$,所以$\partial(\nu_1,(\mu_1,d_1))=0$,即$(\nu_1,(\mu_1,d_1))\in\mathscr{Z}^2_{\mathrm{LYsD}}(L,L)$。证毕。

定义 6　如果存在线性同构映射 $\phi_t=\mathrm{Id}_L+t\phi_1:(L,\nu_t,\mu_t,d_t)\to(L,\nu'_t,\mu'_t,d'_t)$,其中$\mathrm{Id}_L$ 为 L 上的恒等映射,$\phi_1\in\mathrm{End}(L)_{\bar{0}}$,对任意齐次元 $x,y,z\in L$,使得下列等式成立:

$$\phi_t(\nu_t(x,y))=\nu'_t(\phi_t(x),\phi_t(y));\quad(11)$$
$$\phi_t(\mu_t(x,y,z))=\mu'_t(\phi_t(x),\phi_t(y),\phi_t(z));\quad(12)$$
$$\phi_t(d_t(x))=d'_t(\phi_t(x))。\quad(13)$$

则称微分 Lie-Yamaguti 超代数(L,d)的 2 个线性形变(ν_t,μ_t,d_t)与(ν'_t,μ'_t,d'_t)为等价的。

命题 5　设(ν_1,μ_1,d_1)与(ν'_1,μ'_1,d'_1)分别生成(ν_t,μ_t,d_t)与(ν'_t,μ'_t,d'_t)2 个等价的线性形变,则$(\nu_1,(\mu_1,d_1))$与$(\nu'_1,(\mu'_1,d'_1))$在$\mathscr{H}^2_{\mathrm{LYsD}}(L,L)$中属于同一个上同调类。

证明　由式(11)—(13),比较 t^1 的系数,有

$$\nu_1(x,y)-\nu'_1(x,y)=[\phi_1(x),y]+[x,\phi_1(y)]-\phi_1(x,y),$$
$$\mu_1(x,y,z)-\mu'_1(x,y,z)=\{\phi_1(x),y,z\}+\{x,\phi_1(y),z\}+\{x,y,\phi_1(z)\}-\phi_1\{x,y,z\},$$
$$d_1(x)-d'_1(x)=d(\phi_1(x))-\phi_1(d(x))。$$

上述等式意味着

$$(\nu_1,(\mu_1,d_1))-(\nu'_1,(\mu'_1,d'_1))=(\delta_{\mathrm{I}}(\phi_1),(\delta_{\mathrm{II}}(\phi_1),-\phi(\phi_1)))=\partial(\phi_1)\in\mathscr{B}^2_{\mathrm{LYsD}}(L,L),$$

即$(\nu_1,(\mu_1,d_1))$与$(\nu'_1,(\mu'_1,d'_1))$在$\mathscr{H}^2_{\mathrm{LYsD}}(L,L)$中属于同一个上同调类。证毕。

参考文献:

[1] KINYON M K, WEINSTEIN A. Leibniz algebras, Courant algebroids, and multiplications on reductive homogeneous spaces[J]. American Journal of Mathematics, 2001, 123(3):525-550.

[2] NOMIZU K. Invariant affine connections on homogeneous spaces[J]. American Journal of Mathematics, 1954, 76(1):33-65.

[3] YAMAGUTI K. On the Lie triple system and its generalization[J]. Journal of Science of the Hiroshima University, Series A, 1958, 21(3):155-160.

[4] YAMAGUTI K. On cohmology groups of general Lie triple systems[J]. Kumamoto Journal of Science, Series A, 1969, 8(4):135-146.

[5] ZOUNGRANA P L. A note on Lie-Yamaguti superalgebras[J]. Far East Journal of Mathematical Sciences, 2016, 100(1):1-18.

[6] ZOUNGRANA P L, ISSA A N. On Killing forms and invariant forms of Lie-Yamaguti superalgebras[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2017, 2017(1):1-9.

[7] 唐鑫鑫,胡梦如,徐建国,等. Lie-Yamaguti 超代数的交换扩张[J]. 东北师大学报(自然科学版),2018,50(4):1-5.
TANG Xinxin, HU Mengru, XU Jianguo, et al. Abelian extensions of Lie-Yamaguti superalgebras[J]. Journal of Northeast Normal University(Natural Science Edition), 2018, 50(4):1-5.

[8] TANG Xinxin, ZHANG Qingcheng, WANG Chunyue. From Leibniz superalgebras to Lie-Yamaguti superalgebras[J]. Journal of Mathematics, 2018, 38(4):589-601.

[9] VORONOV T. Higher derived brackets and homotopy algebras[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2005, 202(1/2/3):133-153.

[10] COLL V, GERSTENHABER M, GIAQUINTO A. An explicit deformation formula with noncommuting derivations[M]. Weizmann: Jerusalem, 1989.

(下转第 46 页)