

二阶全矩阵代数的二面体群模代数结构

苏冬

(河南科技大学数学与统计学院, 河南 洛阳 471023)

摘要: 利用矩阵弱相似及矩阵对弱相似的相关理论, 在复数域 \mathcal{C} 上, 研究二阶全矩阵代数 $M_2(\mathcal{C})$ 上 m 阶循环群 C_m 的模代数结构, 并且在同构意义下刻画 $M_2(\mathcal{C})$ 上所有的 $2m$ 阶二面体群 D_{2m} -模代数结构。

关键词: 全矩阵代数; 二面体群; 弱相似; 模代数

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A

引用格式: 苏冬. 二阶全矩阵代数的二面体群模代数结构[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(2): 14-21, 31.

The module algebra structures of dihedral groups on the full matrix algebra of 2×2

SU Dong

(School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471023, Henan, China)

Abstract: By using the theories of weak similarity of matrices and weak similarity of matrix pairs, the module algebra structures of cyclic groups of C_m are researched over the full matrix algebra of 2×2 on the complex field \mathcal{C} , and all module algebra structures of dihedral groups D_{2m} are characterized over the full matrix algebra of 2×2 up to isomorphism.

Key words: full matrix algebra; dihedral group; weak similarity; module algebra

0 引言

群和 Hopf 代数的作用理论是代数学的重要的研究内容之一。Beattie^[1]最早提出了有关 Hopf 代数在代数上作用的概念及理论, 之后 Molnar^[2]研究了 Hopf 模代数的对偶定理。至今这方面的研究已取得了丰硕的成果: Caenepeel 等^[3-4]描述了量子 Yang-Baxter 模代数结构以及 Yetter-Drinfeld 模代数的 Brauer 群结构; Duplij 和 Sinelshchikov^[5]完全刻画了量子群 $U_q(sl_2)$ 在量子平面上的模代数结构, 并且对其进行了同构分类; Chen 和 Zhang^[6]给出了 4 维 Sweedler Hopf 代数 H_4 上的 4 维 Yetter-Drinfeld 模代数的结构和分类以及所有 4 维 H_4 -Azumaya 代数, 特别地, 还给出了 $M_2(k)$ 上的所有的 Yetter-Drinfeld H_4 -模代数结构; Zhao 等^[7]、赵士银和周克元^[8]研究了矩阵及矩阵对弱相似的相关理论, 且利用这些理论考虑了全矩阵代数上二、三阶循环群和三阶对称群的模代数结构的分类问题; 高凤霞等^[9-10]讨论了全矩阵代数上 8 维非交换、非余交换半单 Hopf 代数 H_8 的模代数结构。在以上研究的基础之上, 本文利用矩阵弱相似及矩阵对弱相似的相关理论, 在复数域 \mathcal{C} 上, 研究了二阶全矩阵代数 $M_2(\mathcal{C})$ 上 m 阶循环群 C_m 的模代数结构, 并且在同构意义下刻画了 $M_2(\mathcal{C})$ 上所有的 $2m$ 阶二面体群 D_{2m} -模代数结构。

1 $M_2(\mathcal{C})$ 的 $\mathcal{C}[C_m]$ -模代数结构

设 \mathcal{C} 是复数域, $M_n(\mathcal{C})$ 表示复数域 \mathcal{C} 上由 n 阶矩阵构成的全矩阵代数, $GL_n(\mathcal{C})$ 表示 \mathcal{C} 上 n 阶可逆矩

阵构成的乘法群, E_n 表示 n 阶单位矩阵, C^* 表示 \mathcal{E} 中非零元素构成的乘法群. 对任意群 G , 用 $\mathcal{E}[G]$ 表示 G 的群代数. 除特殊说明外, 本文中的线性空间、矩阵、代数、Hopf 代数等均定义在 \mathcal{E} 上. 记虚数单位为 i , 即 $i = \sqrt{-1}$.

设 $m \geq 2$ 是正整数, C_m 表示由 g 生成的 m 阶循环群, 即

$$C_m = \langle g \mid g^m = 1 \rangle.$$

定义 1^[11] 设 $X_1, X_2 \in M_n(\mathcal{E})$, 若存在 $P \in GL_n(\mathcal{E})$, $\alpha \in C^*$, 使得

$$PX_1P^{-1} = \alpha X_2,$$

则称 X_1 与 X_2 是弱相似的.

弱相似作为矩阵相似的一种推广, 也是矩阵之间的一种等价关系.

定义 2^[7] 设 $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in M_n(\mathcal{E})$, 若存在 $P \in GL_n(\mathcal{E})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in C^*$, 使得

$$PX_iP^{-1} = \alpha_i Y_i, \quad i = 1, 2$$

成立, 则称矩阵对 (X_1, X_2) 与 (Y_1, Y_2) 弱相似, 简记为 $(X_1, X_2) \sim (Y_1, Y_2)$.

定义 2 给出的矩阵对之间的弱相似关系“ \sim ”是集合 $M_n(\mathcal{E}) \times M_n(\mathcal{E})$ 上的一种等价关系.

定理 1^[12-13] 设 $X \in M_n(\mathcal{E})$, 存在非负整数 m , 使得 $X^m = \alpha E_n$, $\alpha \in C^*$, 则 X 可对角化.

命题 1^[14] 设 A 是一个代数, G 是一个群, $\text{Aut}(A)$ 是代数 A 的自同构群, 则 A 是一个左 $\mathcal{E}[G]$ -模代数当且仅当存在一个群同态映射 $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(A)$, 其中 A 的左 $\mathcal{E}[G]$ -模作用与群同态 ρ 由关系式

$$g \cdot a = \rho(g)(a), \quad g \in G, \quad a \in A$$

所确定.

注 1 设 G 是一个群, A 是一个代数, 并设 ρ 是 G 到 $\text{Aut}(A)$ 的群同态, 则由命题 1 可知 A 有一个左 $\mathcal{E}[G]$ -模代数结构, 记为 $A(\rho)$. 若 $\rho': G \rightarrow \text{Aut}(A)$ 是另一个群同态, 则 $A(\rho)$ 和 $A(\rho')$ 是同构的 $\mathcal{E}[G]$ -模代数当且仅当存在一个代数自同构 $f: A \rightarrow A$ 使得

$$f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f, \quad g \in G.$$

注 2 设 $G = C_m$ 且 $A = M_n(\mathcal{E})$, 因为 A 是中心单代数, A 的自同构都是内自同构, 所以一个群同态

$$\rho: C_m \rightarrow \text{Aut}(A)$$

由一个 $X \in GL_n(\mathcal{E})$ 确定, 即

$$\rho(Y) = XYX^{-1}, \quad Y \in M_n(\mathcal{E}),$$

其中 X 满足 $X^m \in \mathcal{E}E_n$, 此时记 $A(\rho)$ 为 $A(X)$.

引理 1^[11] 若 $X_1, X_2 \in GL_n(\mathcal{E})$ 且满足 $X_1^m, X_2^m \in \mathcal{E}E_n$, 则 $A(X_1)$ 和 $A(X_2)$ 是同构的 $\mathcal{E}[C_m]$ -模代数当且仅当 X_1 和 X_2 弱相似.

引理 2 矩阵集合 $\{X \in GL_2(\mathcal{E}) \mid X^m \in \mathcal{E}E_2\}$ 按弱相似关系有 m 个等价类, 其代表元为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}$, 其中

$k = 0, 1, \dots, m-1$.

证明 设 $X \in GL_2(\mathcal{E})$ 且满足 $X^m \in \mathcal{E}E_2$, 由定理 1 可知 X 可对角化, 即存在一个 $P \in GL_2(\mathcal{E})$, 使得

$$PXP^{-1} = Q, \quad Q = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},$$

因此

$$PX^mP^{-1} = Q^m = \begin{pmatrix} a_1^m & 0 \\ 0 & a_2^m \end{pmatrix}.$$

由于 $X^m = \alpha E_2$, $\alpha \in C^*$, 所以

$$\begin{pmatrix} a_1^m & 0 \\ 0 & a_2^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

故有 $a_1^m = a_2^m = \alpha$. 因为我们考虑的是关于弱相似关系的等价分类, 所以不妨设 $\alpha = 1$, 即 $a_1^m = a_2^m = 1$, 因而 $a_1 =$

$e^{\frac{2k\pi}{m}i}$, $a_2 = e^{\frac{2k'\pi}{m}i}$, $k, k' = 0, 1, \dots, m-1$, 于是

$$X \sim \begin{pmatrix} e^{\frac{2k\pi}{m}i} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k'\pi}{m}i} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k'\pi}{m}i} \end{pmatrix}.$$

对于 $k, k' = 0, 1, \dots, m-1$, 当 $k \neq k'$ 时

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k'\pi}{m}i} \end{pmatrix}$$

是不弱相似的。证毕。

由引理 2 可得以下定理。

定理 2 在同构意义下, $M_2(\mathcal{C})$ 有 m 个 $\mathcal{C}[C_m]$ -模代数, 其结构如下:

$$g \cdot a = TaT^{-1},$$

其中 $a \in M_2(\mathcal{C})$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ 。

2 $M_2(\mathcal{C})$ 的 $\mathcal{C}[D_{2m}]$ -模代数结构

我们将研究 $M_2(\mathcal{C})$ 上 $\mathcal{C}[D_{2m}]$ 的模代数, 并在同构意义下, 给出它们结构的完整分类。

m 阶二面体群 D_{2m} 可描述为

$$D_{2m} = \langle g_1, g_2 \mid g_1^m = g_2^2 = 1, (g_1 g_2)^2 = 1 \rangle, \quad m > 2.$$

取 $M_n(\mathcal{C}) \times M_n(\mathcal{C})$ 的子集合 Λ_n 如下:

$$\Lambda_n = \{ (X, Y) \mid X, Y \in GL_n(\mathcal{C}), X^m \in \mathcal{C}E_n, Y^2 \in \mathcal{C}E_n, (XY)^2 \in \mathcal{C}E_n \}.$$

引理 3^[7-8] $M_2(\mathcal{C})$ 上的 $\mathcal{C}[D_{2m}]$ -模代数结构由 Λ_2 决定, 且弱相似的矩阵对确定同构的模代数。

引理 4 设 $X \in GL_2(\mathcal{C})$, $(X, E_2) \in \Lambda_2$, 有:

(1) 若 m 为偶数, 则 (X, E_2) 一定弱相似于

$$\rho_1 = (E_2, E_2) \text{ 或 } \rho_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_2 \right);$$

(2) 若 m 为奇数, 则 (X, E_2) 一定弱相似于

$$\rho_1 = (E_2, E_2).$$

证明 令 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 满足

$$\begin{cases} X^m = \alpha_1 E_2, \\ (XY)^2 = X^2 = \alpha_2 E_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in C^*$ 。

(1) 当 m 为偶数时, 由式(1)可得

$$X^2 = \alpha_2 E_2,$$

于是 X 弱相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。

(2) 当 m 为奇数时, 由式(1)可知 X 弱相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。证毕。

令

$$\delta_k = \left(\begin{pmatrix} \frac{1+e^{\frac{2k\pi}{m}i}}{1-e^{\frac{2k\pi}{m}i}}\sqrt{bc} & b \\ c & \frac{1+e^{\frac{2k\pi}{m}i}}{1-e^{\frac{2k\pi}{m}i}}\sqrt{bc} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right),$$

其中 $b, c \in C^*$, $k=1, 2, \dots, m-1$, 于是有以下引理。

引理 5 设 $X \in GL_2(\mathcal{C})$, $\left(X, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \in \Lambda_2$, 令 $k=1, 2, \dots, m-1$, 有

(1) 若 m 为偶数, 则 $\left(X, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ 一定弱相似于

$$\rho_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \text{ 或 } \delta_k。$$

(2) 若 m 为奇数, 则 $\left(X, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ 一定弱相似于 δ_k 。

证明 令 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 满足

$$\begin{cases} X^m = \alpha_1 E_2, \\ (XY)^2 = \alpha_2 E_2, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in C^*$ 。由 $(XY)^2 = \alpha_2 E_2$ 有

$$XY = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} \\ x_{21} & -x_{22} \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^m = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} \\ x_{21} & -x_{22} \end{pmatrix}^2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

进而有

$$\begin{cases} x_{11}^2 - x_{12}x_{21} = \alpha_2, \\ x_{22}^2 - x_{12}x_{21} = \alpha_2, \\ x_{12}(x_{22} - x_{11}) = 0, \\ x_{21}(x_{22} - x_{11}) = 0. \end{cases}$$

那么以上方程组有 2 组解:

$$x_{22} = x_{11} \text{ 和 } \begin{cases} x_{22} = -x_{11}, \\ x_{12} = 0, \\ x_{21} = 0. \end{cases}$$

情形 1 若 $x_{11} = x_{22}$, 令 $x_{11} = x_{22} = a \in \mathcal{C}$, $x_{12} = b \in C^*$, $x_{21} = c \in C^*$, 取

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{b} \\ \sqrt{c} & -\sqrt{c} \end{pmatrix} \text{ 且 } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}} & \frac{1}{\sqrt{c}} \\ \frac{1}{\sqrt{b}} & -\frac{1}{\sqrt{c}} \end{pmatrix},$$

有

$$\begin{aligned} P^{-1}XP &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}} & \frac{1}{\sqrt{c}} \\ \frac{1}{\sqrt{b}} & -\frac{1}{\sqrt{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{b} \\ \sqrt{c} & -\sqrt{c} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + \sqrt{bc} & 0 \\ 0 & a - \sqrt{bc} \end{pmatrix} = (a + \sqrt{bc}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a - \sqrt{bc}}{a + \sqrt{bc}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

又 $\mathbf{X}^m = \alpha_1 \mathbf{E}_2$, 则

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}^m \mathbf{P} = (a + \sqrt{bc})^m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a - \sqrt{bc}}{a + \sqrt{bc}}\right)^m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $\left(\frac{a - \sqrt{bc}}{a + \sqrt{bc}}\right)^m = 1$, 可得 $a = \frac{1 + e^{\frac{2k\pi}{m}i}}{1 - e^{\frac{2k\pi}{m}i}} \sqrt{bc}$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, 因此

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1 + e^{\frac{2k\pi}{m}i}}{1 - e^{\frac{2k\pi}{m}i}} \sqrt{bc} & b \\ c & \frac{1 + e^{\frac{2k\pi}{m}i}}{1 - e^{\frac{2k\pi}{m}i}} \sqrt{bc} \end{pmatrix},$$

所以

$$\left(\mathbf{X}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \sim \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

情形 2 若 $x_{11} = -x_{22}$ 且 $x_{12} = x_{21} = 0$, 令 $x_{11} = a \in C^*$, 有

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

又由 $\mathbf{X}^m = \alpha_1 \mathbf{E}_2$, 则

$$\mathbf{X}^m = a^m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} = \begin{cases} a^m \mathbf{E}_2, & m \text{ 为偶数,} \\ a^m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & m \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

因此 m 为偶数时, 根据弱相似关系

$$\mathbf{X} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

综上所述, 若 m 为偶数, 则 $\left(\mathbf{X}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ 一定弱相似于

$$\rho_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \text{ 或 } \delta_k.$$

若 m 为奇数, 则 $\left(\mathbf{X}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ 一定弱相似于 δ_k .

证毕。

引理 6 作为矩阵对 $\delta_k \sim \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $k = 1, 2, \dots, m-1$.

证明 取

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{b} \\ \sqrt{c} & -\sqrt{c} \end{pmatrix} \text{ 且 } \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}} & \frac{1}{\sqrt{c}} \\ \frac{1}{\sqrt{b}} & -\frac{1}{\sqrt{c}} \end{pmatrix},$$

有

$$\mathbf{P}^{-1} \delta_k \mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}} & \frac{1}{\sqrt{c}} \\ \frac{1}{\sqrt{b}} & -\frac{1}{\sqrt{c}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \frac{1 + e^{\frac{2k\pi}{m}i}}{1 - e^{\frac{2k\pi}{m}i}} \sqrt{bc} & b \\ c & \frac{1 + e^{\frac{2k\pi}{m}i}}{1 - e^{\frac{2k\pi}{m}i}} \sqrt{bc} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{b} \\ \sqrt{c} & -\sqrt{c} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\left(\begin{array}{cc} \frac{2}{1-e^{\frac{2k\pi}{m}i}}\sqrt{bc} & 0 \\ 0 & \frac{2e^{\frac{2k\pi}{m}i}}{1-e^{\frac{2k\pi}{m}i}}\sqrt{bc} \end{array} \right), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \left(\frac{2}{1-e^{\frac{2k\pi}{m}i}}\sqrt{bc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

证毕。

引理 7 设 $Y \in GL_2(\mathcal{C})$, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, Y \right) \in A_2$, $k=0,1,\dots,m-1$, 有:

(1) 若 m 为偶数, 则 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, Y \right)$ 一定弱相似于

$$\delta_k (k=1,2,\dots,m-1) \text{ 或 } \rho_1 \text{ 或 } \rho_2 \text{ 或 } \rho_3 \text{ 或 } \rho_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right);$$

(2) 若 m 为奇数, 则 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, Y \right)$ 一定弱相似于

$$\delta_k, k=1,2,\dots,m-1 \text{ 或 } \rho_1 \text{ 或 } \rho_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

证明 令 $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}$, $k=0,1,\dots,m-1$, 满足

$$\begin{cases} Y^2 = \alpha_1 E_2, \\ (XY)^2 = \alpha_2 E_2. \end{cases} \tag{3}$$

由 $Y^2 = \alpha_1 E_2$ 有

$$Y^2 = \begin{pmatrix} y_{11}^2 + y_{12}y_{21} & y_{11}y_{12} + y_{12}y_{22} \\ y_{11}y_{21} + y_{21}y_{22} & y_{12}y_{21} + y_{22}^2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{cases} y_{11}^2 + y_{12}y_{21} = \alpha_1, \\ y_{22}^2 + y_{12}y_{21} = \alpha_1, \\ y_{12}(y_{22} + y_{11}) = 0, \\ y_{21}(y_{22} + y_{11}) = 0. \end{cases}$$

那么以上方程组有 2 组解:

$$y_{22} = -y_{11} \text{ 和 } \begin{cases} y_{22} = y_{11}, \\ y_{12} = 0, \\ y_{21} = 0. \end{cases}$$

情形 1 若 $y_{22} = -y_{11}$, 令 $y_{11} = a \in \mathcal{C}$, $y_{12} = b \in C^*$, $y_{21} = c \in C^*$, 由 $(XY)^2 = \alpha_2 E_2$ 有

$$(XY)^2 = \begin{pmatrix} a^2 + e^{\frac{2k\pi}{m}i}bc & ab - e^{\frac{2k\pi}{m}i}ab \\ e^{\frac{2k\pi}{m}i}(ac - e^{\frac{2k\pi}{m}i}ac) & e^{\frac{2k\pi}{m}i}(bc + e^{\frac{2k\pi}{m}i}a^2) \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{cases} a^2 + e^{\frac{2k\pi}{m}i}bc = \alpha_2, \\ e^{\frac{2k\pi}{m}i}(bc + e^{\frac{2k\pi}{m}i}a^2) = \alpha_2, \\ ab(1 - e^{\frac{2k\pi}{m}i}) = 0, \\ e^{\frac{2k\pi}{m}i}ac(1 - e^{\frac{2k\pi}{m}i}) = 0. \end{cases}$$

那么以上方程组有3组解:

$$a=0 \text{ 或 } e^{\frac{2k\pi}{m}i}=1 \text{ 或 } \begin{cases} e^{\frac{2k\pi}{m}i}=-1, \\ b=0, \\ c=0. \end{cases}$$

(i) 当 $a=0$ 时, 有 $Y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. 在弱相似关系下, 令 $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$, 那么

$$Y^2 = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (XY)^2 = \lambda e^{\frac{2k\pi}{m}i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda=1$, 则 $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, Y \right)$ 弱相似于 $\delta_k (k=1, 2, \dots, m-1)$ 或 $\rho_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

(ii) 当 $e^{\frac{2k\pi}{m}i}=1$, 即 $k=0$ 时, 有 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 那么 $Y^2 = \alpha E_2$, 在弱相似关系下, 有

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, Y \right)$ 弱相似于 $\rho'_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

(iii) 当 $e^{\frac{2k\pi}{m}i}=-1$, $b=0$, $c=0$ 时, 即 m 为偶数且 $k=\frac{m}{2}$, 在弱相似关系下, 有

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, Y \right)$ 弱相似于 ρ_3 .

情形 2 若 $y_{11}=y_{22}$ 且 $y_{12}=y_{21}=0$, 令 $y_{11}=y_{22}=a \in C^*$, 则

$$Y = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (XY)^2 = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{4k\pi}{m}i} \end{pmatrix} = \alpha_2 E_2,$$

于是 $e^{\frac{4k\pi}{m}i}=1, k=0, 1, \dots, m-1$.

当 m 为偶数时, 有 $k=0$ 或 $k=\frac{m}{2}$, 因此 X 弱相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 故 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, Y \right)$ 弱相似于 ρ_1 或 ρ_2 .

当 m 为奇数时, 有 $k=0$, 因此 X 弱相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 故 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, Y \right)$ 弱相似于 ρ_1 .

容易验证似于 ρ_4 和 ρ'_4 是弱相似的。

综上所述, 若 m 为偶数, 则 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, Y \right)$ 一定弱相似于

$$\delta_k, k=1, 2, \dots, m-1 \text{ 或 } \rho_1 \text{ 或 } \rho_2 \text{ 或 } \rho_3 \text{ 或 } \rho_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

若 m 为奇数, 则 $\left(X, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ 一定弱相似于

$$\delta_k, k=1, 2, \dots, m-1 \text{ 或 } \rho_1 \text{ 或 } \rho_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

证毕。

引理 8^[7-8] 设 $X, Y \in GL_2(\mathcal{C})$, $(X, Y) \in \Lambda_2$, $k=1, 2, \dots, m-1$, 有:

(1) 若 m 为偶数, 按弱相似等价分类 (X, Y) 的代表元为

$$\delta_k, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4,$$

且它们两两不弱相似。

(2) 若 m 为奇数,按弱相似等价分类 (X, Y) 的代表元为

$$\delta_k, \rho_1, \rho_4$$

且它们两两不弱相似。

由引理 4—8 可知:当 $k = 1, 2, \dots, m - 1$ 时, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ 弱相似于 δ_k ; 当 $k = 0$ 时,

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \rho_4$ 。于是可得以下定理。

定理 3 在同构意义下, $M_2(\mathcal{E})$ 上的所有 $\mathcal{E}[D_{2m}]$ -模代数结构如下,对任意 $a \in M_2(\mathcal{E})$, 设 $k = 0, 1, \dots, m - 1$, 有:

(1) 如果 m 为偶数,那么:

① $g_1 \cdot a = a, g_2 \cdot a = a$;

② $g_1 \cdot a = TaT^{-1}, g_2 \cdot a = a$, 其中 $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

③ $g_1 \cdot a = TaT^{-1}, g_2 \cdot a = TaT^{-1}$, 其中 $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

④ $g_1 \cdot a = T_1 a T_1^{-1}, g_2 \cdot a = T_2 a T_2^{-1}$, 其中 $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

(2) 如果 m 为奇数,那么:

① $g_1 \cdot a = a, g_2 \cdot a = a$;

② $g_1 \cdot a = T_1 a T_1^{-1}, g_2 \cdot a = T_2 a T_2^{-1}$, 其中 $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2k\pi}{m}i} \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

参考文献:

[1] BEATTIE M. A direct sum decomposition for the Brauer group of H -module algebras[J]. Journal of Algebra, 1976, 43(2): 686-693.

[2] MOLNAR R K. Semi-direct products of Hopf algebras[J]. Journal of Algebra, 1977, 47(1):29-51.

[3] CAENEPEEL S, VAN OYSTAEYEN F, ZHANG Y H. Quantum Yang-Baxter module algebras[J]. K-Theory, 1994, 8(3): 231-255.

[4] CAENEPEEL S, VAN OYSTAEYEN F, ZHANG Y H. The Brauer group of Yetter-Drinfeld module algebras[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1997, 349(9):3737-3771.

[5] DUPLIJ S, SINELSHCHIKOV S. Classifications of $U_q(sl_2)$ -module algebra structures on the quantum plane[J]. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2010, 6(4):406-430.

[6] CHEN Huixiang, ZHANG Yinhuo. Four-dimensional Yetter-Drinfeld module algebras over H_4 [J]. Journal of Algebra, 2006, 296(2):582-634.

[7] ZHAO Shiyin, WANG Yin, CHEN Xiaojuan, et al. The kS_3 -module algebra structures on $M_3(k)$ [EB/OL]. Beijing: Science-paper Online(2013-06-09)[2022-09-07]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201306-142>.

[8] 赵士银,周克元. 二阶全矩阵代数的模代数结构[J]. 山东大学学报(理学版), 2013, 48(8):24-29.
ZHAO Shiyin, ZHOU Keyuan. The module algebra structures on $M_2(k)$ [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2013, 48(8):24-29.

[9] 高凤霞,高雪琴,杨士林. 二阶全矩阵代数的 H_8 -模代数结构[J]. 吉林大学学报(理学版), 2015, 53(5):887-892.
GAO Fengxia, GAO Xueqin, YANG Shilin. H_8 -module algebra structures on $M_2(k)$ [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2015, 53(5):887-892.