山东大学学报(理学版)2025 年 2 月 第 60 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.2, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0078-07 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.155

上同调 $H^{1,*}(A)$ 中基元的注记

齐鑫[1],孟蕊[2],王玉玉[1*]
(1.天津师范大学数学科学学院, 天津 300387; 2.华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

摘要:利用 May 谱序列以及对相应次数和微分的分析证明了乘积元素 $h_1h_n\tilde{\delta}_p\in H^{p+2,t}(A)$ 的非平凡性,其中 $n\geqslant 6$,奇素数 $p\geqslant 11$,$t=q[p^n+p^4+(p-1)p^2+(p-1)p+(p-3)]+p-4$,$q=2(p-1)$。
关键词:Adams 谱序列;May 谱序列;上同调;May 微分;非平凡性
中图分类号:O189.23 **文献标志码**:A
引用格式:齐鑫,孟蕊,王玉玉.上同调 $H^{1,*}(A)$ 中基元的注记[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):78-84.

A note on the basis in cohomology $H^{1,*}(A)$

QI Xin[1], MENG Rui[2], WANG Yuyu[1*]
(1. College of Mathematical Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China; 2. School of Mathematical Sciences, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

Abstract: The non-triviality of the product element $h_1h_n\tilde{\delta}_p\in H^{p+2,t}(A)$ is proved by using May spectral sequence and the analysis of degree and differential, where $n\geqslant 6$, the odd prime $p\geqslant 11$, $t=q[p^n+p^4+(p-1)p^2+(p-1)p+(p-3)]+p-4$, $q=2(p-1)$.
Key words: Adams spectral sequence; May spectral sequence; cohomology; May differential; non-triviality

0 引言

决定球面稳定同伦群是同伦论的核心问题之一。本文中,A 是模 p Steenrod 代数,S 为奇素数 p 上的局部化球谱,记 $q=2(p-1)$。运用经典的 Adams 谱序列,其 E_2 项:

$$E_2\cong H^{s,t}(A)=\mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p,Z_p)\Rightarrow\pi_{t-s}(S)_p,$$

微分:$d_r:E_r^{s,t}\to E_r^{s+r,t+r-1}(r\geqslant 2)$ 去研究球面稳定同伦群,其中 $E_2^{s,t}$ 是模 p Steenrod 代数 A 的上同调,详见文献[1]。

由文献[2]可知关于 $H^{s,t}(A)=\mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p,Z_p)(s=1,2)$ 的 Z_p 基的一些结果,本文涉及的上同调 Z_p 基元有 $h_i\in H^{1,p^iq}(A)=\mathrm{Ext}_A^{1,p^iq}(Z_p,Z_p)(i\geqslant 0)$。

文献[3]证明了当奇素数 $p\geqslant 11$, $4\leqslant s\leqslant p$, $t=q[sp^3+(s-1)p^2+(s-2)p+(s-3)]+(s-4)$ 时,上同调 $H^{s,t}(A)$ 中元素 $\tilde{\alpha}_s^{(4)}=\tilde{\delta}_s$ 是非平凡的,其被称作第四希腊字母类元素。

对球面稳定同伦群的研究,还有很多问题尚待解决。近年来,学者们更多地讨论了球面稳定同伦群中与第二希腊字母类和第三希腊字母类相关的乘积元素的非平凡性,且得到了很多有意义的结果[4-7]。对于第四希腊字母类的乘积元素的相关结论不多,并且值得注意的是,h_1h_n 在 Adams 谱序列中的收敛性是稳定同伦论中的一个重要问题。其中 h_n 在 Adams-Novikov 谱序列中的收敛性已经在文献[8]中给出,那么结合 $h_n=c_2(p^{n-2})+v_2^{p^{n-2}}h_{n-2}$ 以及 $\delta:\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*(K),BP_*(Y))\to\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s+1,t}(BP_*K,BP_*Y)$ 与 Adams 谱序列的微分

收稿日期:2023-04-17; **网络出版时间**:2023-11-30 14:36:33
基金项目:天津市自然科学基金资助项目(19JCYBJC30300);研究生科研创新资助项目(2022KYCX107Y)
第一作者:齐鑫(1999—),女,硕士研究生,研究方向为稳定同伦论. E-mail:951569277@qq.com
*通信作者:王玉玉(1979—),女,博士,教授,硕士生导师,研究方向为稳定同伦论. E-mail:wdoubleyu@aliyun.com

算子可交换,有望给出第三周期性元素族 $\gamma_{p^n/s}(p\geqslant5,n\geqslant1,1\leqslant s\leqslant p^n-1)$ 的收敛性。本文证明的主要定理如下:

定理 1　当奇素数 $p\geqslant11,n\geqslant6$ 时,在模 p Steenrod 代数 A 的上同调 $H^{p+2,t}(A)$ 中存在一个非平凡元素 $h_1h_n\tilde{\delta}_p$,其中 $t=q[p^n+p^4+(p-1)p^2+(p-1)p+(p-3)]+p-4$。

接下来给出一些关于 May 谱序列的知识,再证明主要定理。

1　May 谱序列

利用 Adams 谱序列计算球面稳定同伦群有 2 个方法,May 谱序列以及 λ-代数,前者是目前为止最有效的。

由文献[9]定理 3.2.5 知,存在 May 谱序列 $\{E_r^{s,t,M},d_r\}$ 收敛到 $H^{s,t}(A)=\mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_P,Z_P)$,其 E_1 项:

$$E_1^{s,t,M}=E(h_{i,j}\mid i>0,j\geqslant0)\otimes P(b_{i,j}\mid i>0,j\geqslant0)\otimes P(a_i\mid i\geqslant0),$$

其中 $E(\ )$ 是外代数,$P(\ )$ 是多项式代数,并有

$$h_{i,j}\in E_1^{1,2(p^i-1)p^j,2i-1},\quad b_{i,j}\in E_1^{2,2(p^i-1)p^{j+1},p(2i-1)},\quad a_i\in E_1^{1,2p^i-1,2i+1}。$$

May 谱序列的微分为 $d_r:E_r^{s,t,M}\to E_r^{s+1,t,M-r}(r\geqslant1)$。若 $x\in E_r^{s,t,M}$, $y\in E_r^{s',t',M}$,那么

$$d_r(xy)=d_r(x)y+(-1)^sxd_r(y)\ (r\geqslant1),$$

且有分次交换性 $xy=(-1)^{ss'+tt'}yx$。

特别地,d_1 微分有如下公式:

$$\begin{cases}d_1(h_{i,j})=-\sum\limits_{0<k<i}h_{i-k,k+j}h_{k,j},\\ d_1(a_i)=-\sum\limits_{0\leqslant k<i}h_{i-k,k}a_k,\\ d_1(b_{i,j})=0。\end{cases}\qquad(*)$$

对任意 $x\in E_1^{s,t,M}$,定义 $\dim x=s$, $\deg x=t$, $M(x)=M$,有

$$\begin{cases}\dim h_{i,j}=\dim a_i=1,\ \dim b_{i,j}=2,\\ \deg h_{i,j}=2(p^i-1)p^j=(p^{i+j-1}+p^{i+j-2}+\cdots+p^j)q,\\ \deg b_{i,j}=2(p^i-1)p^{j+1}=(p^{i+j}+p^{i+j-1}+\cdots+p^{j+1})q,\\ \deg a_i=2p^i-1=(p^{i-1}+p^{i-2}+\cdots+1)q+1,\ \deg a_0=1,\\ M(h_{i,j})=2i-1,\ M(a_i)=2i+1,\ M(b_{i,j})=p(2i-1),\end{cases}$$

其中 $i\geqslant1$, $j\geqslant0$。

文献[10]给出了具体决定 $E_1^{s,t,M}$ 的元素的详细步骤及示例。

2　主要定理的证明

引理 1　设奇素数 $p\geqslant11$,则元素 $\tilde{\delta}_p\in H^{p,t}(A)$ 可以被 May 谱序列中的元素 $a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}$ 表示,其中 $t=q[p^4+(p-1)p^2+(p-2)p+(p-3)]+p-4$。

证明　设 $g=x_1x_2\cdots x_by_1\cdots y_m\in F_1^{p,t,*}$,其中 $x_i=a_{k_i}$, $y_i=h_{i_m,j_m}$,由于 $b=p-4$,并根据文献[10]中方法,因此满足的次数方程组为

$$\begin{cases}x_{1,0}+x_{2,0}+\cdots+x_{p-4,0}+y_{1,0}+\cdots+y_{m,0}=p-3+k_0p=c_0,\\ x_{1,1}+x_{2,1}+\cdots+x_{p-4,1}+y_{1,1}+\cdots+y_{m,1}=p-2+k_1p-k_0=c_1,\\ x_{1,2}+x_{2,2}\cdots+x_{p-4,2}+y_{1,2}+\cdots+y_{m,2}=p-1+k_2p-k_1=c_2,\\ x_{1,3}+x_{2,3}+\cdots+x_{p-4,3}+y_{1,3}+\cdots+y_{m,3}=0+k_3p-k_2=c_3,\\ x_{1,4}+x_{2,4}+\cdots+x_{p-4,4}+y_{1,4}+\cdots+y_{m,4}=1-k_3=c_4。\end{cases}$$

利用确定元素 g 的方法进行如下讨论:k 可能的取值为(0,0,0,1)或(0,0,0,0)。

情形 1 当 $k=(0,0,0,1)$ 时,$c=(p-3,p-2,p-1,p,0)$,并且 $\tilde{m}=4$,则与本证明过程中的次数方程组对应的次数矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccccc:cccc}1&1&1&\cdots&1&1&0&0&0\\1&1&1&\cdots&1&1&1&0&0\\1&1&1&\cdots&1&1&1&1&0\\1&1&1&\cdots&1&1&1&1&1\\0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{c}p-3\\p-2\\p-1,\\p\\0\end{array}$$

此时,由 $\tilde{m}=s-b=p-(p-4)=4$ 直接得到 $E_1^{p,t}$ 中的元素为 $a_4^{p-4}\ h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}$。

情形 2 当 $k=(0,0,0,0)$ 时,$c=(p-3,p-2,p-1,0,1)$,并且 $\tilde{m}=4$,则与本证明过程中的次数方程组对应的次数矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccccc:cccc}1&1&1&\cdots&1&1&0&0&0\\1&1&1&\cdots&1&1&1&0&0\\1&1&1&\cdots&1&1&1&1&0\\0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}p-3\\p-2\\p-1,\\0\\1\end{array}$$

此时,同情形 1 直接得到 $E_1^{p,t}$ 中的元素为 $a_3^{p-4}h_{3,0}h_{2,1}h_{1,2}h_{1,4}$,而 $a_3^{p-4}\ h_{3,0}h_{2,1}h_{1,2}$ 收敛到 $\tilde{\gamma}_{p-1}\in H^{p-1,t}(A)$,则 $a_3^{p-4}\ h_{3,0}h_{2,1}h_{1,2}h_{1,4}$ 收敛到 $h_4\tilde{\gamma}_{p-1}\in H^{p,t}(A)$ 而非 $\tilde{\delta}_p\in H^{p,t}(A)$。

综上,引理 1 得证。

引理 2 设奇素数 $p\geqslant 11$, $n\geqslant 6$, 则乘积元素 $h_1h_n\tilde{\delta}_p\in H^{p+2,t}(A)$ 可以被 May 谱序列中的元素 $h_{1,1}h_{1,n}a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}\in E_1^{p+2,t,M}$ 表示,其中 $t=q[p^n+p^4+(p-1)p^2+(p-1)p+(p-3)]+p-4$, $M=9P-18$。

证明 由于次数的原因,元素 $h_{1,1}$、$h_{1,n}$ 在 May 谱序列里均为永久循环且非平凡收敛到 $h_1,h_n\in H^{1,*}(A)$,而由引理 1 知 $a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}$ 在 May 谱序列里表示 $\tilde{\delta}_p$,因此 $h_{1,1}h_{1,n}a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}\in E_1^{p+2,t,M}$ 在 May 谱序列里是永久循环且非平凡收敛到 $h_1h_n\tilde{\delta}_p\in H^{p+2,t}(A)$。

定理 1 的证明。

在 May 谱序列中,由引理 2 知元素 $h_1h_n\tilde{\delta}_p\in H^{p+2,t}(A)$ 可以表示为 $h_{1,1}h_{1,n}a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}\in E_1^{p+2,t,9p-18}$。

接下来证明 $E_1^{p+1,t,*}=0$ 或 $h_{1,1}h_{1,n}a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}\notin d_r(E_r^{p+1,t,*})$。

设 $g=x_1x_2\cdots x_by_1\cdots y_m\in F_1^{m+b,t,*}$,其中 $x_i=a_{k_i}$, $y_i=h_{i_m,j_m}$,由于 $b=p-4$,则满足的次数方程组为

$$\begin{cases}x_{1,0}+x_{2,0}+\cdots+x_{p-4,0}+y_{1,0}+\cdots+y_{m,0}=p-3+k_0p=c_0,\\x_{1,1}+x_{2,1}+\cdots+x_{p-4,1}+y_{1,1}+\cdots+y_{m,1}=p-1+k_1p-k_0=c_1,\\x_{1,2}+x_{2,2}+\cdots+x_{p-4,2}+y_{1,2}+\cdots+y_{m,2}=p-1+k_2p-k_1=c_2,\\x_{1,3}+x_{2,3}+\cdots+x_{p-4,3}+y_{1,3}+\cdots+y_{m,3}=0+k_3p-k_2=c_3,\\x_{1,4}+x_{2,4}+\cdots+x_{p-4,4}+y_{1,4}+\cdots+y_{m,4}=1+k_4p-k_3=c_4,\\x_{1,5}+x_{2,5}+\cdots+x_{p-4,5}+y_{1,5}+\cdots+y_{m,5}=0+k_5p-k_4=c_5,\\\vdots\\x_{1,n-1}+x_{2,n-1}+\cdots+x_{p-4,n-1}+y_{1,n-1}+\cdots+y_{m,n-1}=0+k_{n-1}p-k_{n-2}=c_{n-1},\\x_{1,n}+x_{2,n}+\cdots+x_{p-4,n}+y_{1,n}+\cdots+y_{m,n}=1-k_{n-1}=c_n。\end{cases}$$

利用文献[10]中确定元素 g 的方法进行如下讨论:

k 所有可能的取值为:$k_1=(0,0,\cdots,0)$; $k_2=(0,0,0,1,0,\cdots,0)$; $k_3=(0,0,0,1,\cdots,1)$。

情形 1 当 $k_1=(0,0,\cdots,0)$ 时,$c=(p-3,p-1,p-1,0,1,0,\cdots,0,1)$,并且 $\tilde{m}=5$,则与本证明过程中的次数方程组对应的次数矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} p-3 \\ p-1 \\ p-1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array},$$

此时,由 $\tilde{m}=s-b=p+1-(p-4)=5$ 直接得到 $E_1^{p+1,t,7p-15}$ 中的元素为 $a_3^{p-4}\ h_{3,0}h_{2,1}^2h_{1,4}h_{1,n}=0$。

情形 2　当 $k_2=(0,0,0,1,0,\cdots,0)$ 时,$c=(p-3,p-1,p-1,p,0,\cdots,0,1)$,并且 $\tilde{m}=5$,则与本证明过程中的次数方程组对应的次数矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} p-3 \\ p-1 \\ p-1 \\ p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array},$$

此时,同情形 1 直接得到 $E_1^{p+1,t,9p-17}$ 中的元素为 $a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}^2h_{1,3}h_{1,n}=0$。

情形 3　当 $k_3=(0,0,0,1,\cdots,1)$ 时,$c=(p-3,p-1,p-1,p,p,p-1,\cdots,p-1,0)$, $\tilde{m}=4<s-b=5$,次数矩阵前 5 行为

$$\left(\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} p-3 \\ p-1 \\ p-1, \\ p \\ p \end{array}$$

次数矩阵第 6 行可能的情况为

$$\left(\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{lcc} p-3 & & \\ p-1 & & \\ p-1 & & \\ p & & \\ p & & \\ \hdashline p-1 & \cdots & \text{Ⅰ} \\ p-1 & \cdots & \text{Ⅱ} \\ p-1 & \cdots & \text{Ⅲ} \\ p-1 & \cdots & \text{Ⅳ} \end{array}。$$

情形 3.1　当次数矩阵第 6 行为情况Ⅰ时与本证明过程当中的次数方程组对应的次数矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} p-3 \\ p-1 \\ p-1 \\ p \\ p \\ p-1 \\ \vdots \\ p-1 \\ 0 \end{array},$$

此时,得到 $F_1^{p,t,(2n+1)p-2n-8}$ 中的元素为 $a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}^2h_{2,3}$,进行替换和分解,得到如下元素:

$$\begin{cases} g_1=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{2,3}b_{n-1,0}\in E_1^{p+1,t,(4n-2)p-4n-5}, \\ g_2=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{2,3}h_{n-k-1,1+k}h_{k,1}(1\leqslant k\leqslant n-2)\in E_1^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9}。\end{cases}$$

情形 3.2 类似情形 3.1,当次数矩阵第 6 行分别为情况Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ时,可得 $F_1^{p,t,(2n+1)p-2n-8}$ 中的元素为 $a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{4,1}$、$a_n^{p-4}h_{5,0}h_{n-1,1}^2h_{n-3,3}$、$a_n^{p-5}a_5h_{n,0}h_{n-1,1}^2h_{n-3,3}$,对它们进行替换和分解,得到如下元素:

$$\begin{cases} g_3=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-3,3}h_{4,1}b_{n-1,0}\in E_1^{p+1,t,(4n-2)p-4n-5}, \\ g_4=a_n^{p-4}h_{n-k,k}h_{k,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{4,1}(2\leqslant k\leqslant n-1,k\neq 3)\in E_1^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9}, \\ g_5=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-k-1,k+1}h_{k,1}h_{n-3,3}h_{4,1}(1\leqslant k\leqslant n-2,k\neq 2,4)\in E_1^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9}, \\ g_6=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-k-3,k+3}h_{k,3}h_{4,1}(1\leqslant k\leqslant n-4)\in E_1^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9}, \\ g_7=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{3,2}h_{1,1}\in E_1^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9}, \\ g_8=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{3,1}h_{1,4}\in E_1^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9}, \\ g_9=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{2,1}h_{2,3}\in E_1^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9}, \\ g_{10}=a_n^{p-5}a_{n-k}h_{k,n-k}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{4,1}(1\leqslant k\leqslant n-2,k\neq n-3)\in E_1^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9}, \\ g_{11}=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{4,1}b_{n-3,2}\in E_1^{p+1,t,(4n-6)p-4n-1}, \\ g_{12}=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}b_{4,0}\in E_1^{p+1,t,(2n+8)p-2n-15}, \\ g_{13}=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{5,0}b_{n-1,0}\in E_1^{p+1,t,(4n-2)p-4n-5}, \\ g_{14}=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{5,0}h_{n-k-1,k+1}h_{k,1}(1\leqslant k\leqslant n-2,k\neq 2)\in E_1^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9}, \\ g_{15}=a_n^{p-5}a_5h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}b_{n-1,0}\in E_1^{p+1,t,(4n-2)p-4n-5}, \\ g_{16}=a_n^{p-5}a_5h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{n-k-1,k+1}h_{k,1}(1\leqslant k\leqslant n-2,k\neq 2)\in E_1^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9}。\end{cases}$$

下面针对情形 3 中所有 May 分次大于 $9p-18$ 的元素 $g_i(i=1,2,\cdots,16)$,依据微分公式(*)计算 d_1 微分,且证明在 May 微分条件下,$h_{1,1}h_{1,n}a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}$不是 d_r 边缘。

依据微分公式(*)计算 $E_1^{p+1,t,(4n-2)p-4n-5}$中元素的 d_1 微分,取

$$h_1=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{1,3}h_{1,4}b_{n-1,0},\quad h_2=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-3,3}h_{3,2}h_{1,1}b_{n-1,0},$$
$$h_3=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-3,3}h_{2,1}h_{2,3}b_{n-1,0},\quad h_4=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-3,3}h_{3,1}h_{1,4}b_{n-1,0},$$
$$h_5=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{4,1}h_{1,0}b_{n-1,0},\quad h_6=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{3,2}h_{2,0}b_{n-1,0},$$
$$h_7=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{3,0}h_{2,3}b_{n-1,0},\quad h_8=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{4,0}h_{1,4}b_{n-1,0},$$
$$h_9=a_n^{p-5}a_0h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{5,0}b_{n-1,0},\quad h_{10}=a_n^{p-5}a_1h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{4,1}b_{n-1,0},$$
$$h_{11}=a_n^{p-5}a_2h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{3,2}b_{n-1,0},\quad h_{12}=a_n^{p-5}a_3h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{2,3}b_{n-1,0},$$
$$h_{13}=a_n^{p-5}a_4h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{1,4}b_{n-1,0},$$

有

$$d_1(g_1)=h_1+\cdots,$$
$$d_1(g_3)=-h_2+h_3+h_4+\cdots,$$
$$d_1(g_{13})=-h_5-h_6+h_7+h_8+\cdots,$$
$$d_1(g_{15})=+h_9+h_{10}+h_{11}+h_{12}+h_{13}+\cdots。$$

由上可知每个生成元的 d_1 微分中都至少含有一个其他生成元微分中没有的项,因此这些生成元的 d_1 微分线性无关,于是有 $h_{1,1}h_{1,n}a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}\notin d_r(E_r^{p+1,t,(4n-2)p-4n-5})(r\geqslant 2)$。又因为

$$M=9p-18\neq[(4n-2)p-4n-5]-1,$$

所以 $h_{1,1}h_{1,n}a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}\notin d_1(E_r^{p+1,t,(4n-2)p-4n-5})$。

依据微分公式(*)计算 $E_1^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9}$ 中元素的 d_1 微分,取

$h_{14}=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{1,3}h_{1,4}h_{n-k-1,1+k}h_{k,1}$, $h_{15}=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{3,2}h_{1,1}h_{n-k,k}h_{k,0}$,

$h_{16}=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{2,1}h_{2,3}h_{n-k,k}h_{k,0}$, $h_{17}=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{3,1}h_{1,4}h_{n-k,k}h_{k,0}$,

$h_{18}=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-3,3}h_{2,1}h_{2,3}h_{n-k-1,1+k}h_{k,1}$, $h_{19}=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{3,2}h_{1,1}h_{n-k-3,3+k}h_{k,3}$,

$h_{20}=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{3,1}h_{1,4}h_{n-k-3,3+k}h_{k,3}$, $h_{21}=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{2,3}h_{1,1}h_{1,2}$,

$h_{22}=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{2,2}h_{1,1}h_{1,4}$, $h_{23}=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{2,1}h_{1,3}h_{1,4}$,

$h_{24}=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-2,2}h_{n-3,3}h_{2,3}h_{1,1}h_{1,2}$, $h_{25}=a_n^{p-5}a_{n-k}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{3,2}h_{1,1}h_{k,n-k}$,

$h_{26}=a_n^{p-5}a_{n-k}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{2,1}h_{2,3}h_{k,n-k}$, $h_{27}=a_n^{p-5}a_{n-k}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{3,1}h_{1,4}h_{k,n-k}$,

$h_{28}=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{4,0}h_{1,4}h_{n-k-1,1+k}h_{k,1}$, $h_{29}=a_n^{p-5}a_0h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{5,0}h_{n-k-1,1+k}h_{k,1}$,

$h_{30}=a_n^{p-5}a_2h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{3,2}h_{n-k-1,1+k}h_{k,1}$, $h_{30}=a_n^{p-5}a_3h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{2,3}h_{n-k-1,1+k}h_{k,1}$,

$h_{32}=a_n^{p-5}a_4h_{n,0}h_{n-1,1}h_{n-3,3}h_{1,4}h_{n-k-1,1+k}h_{k,1}$,

有

$$d_1(g_2)=h_{14}+\cdots,$$
$$d_1(g_4)=-h_{15}+h_{16}+h_{17}+\cdots,$$
$$d_1(g_5)=-h_{18}+\cdots,$$
$$d_1(g_6)=-h_{19}+h_{20}+\cdots,$$
$$d_1(g_7)=+h_{21}+h_{22}+\cdots,$$
$$d_1(g_8)=+h_{22}+h_{23}+\cdots,$$
$$d_1(g_9)=+h_{24}+\cdots,$$
$$d_1(g_{10})=h_{25}-h_{26}-h_{27}+\cdots,$$
$$d_1(g_{14})=+h_{28}+\cdots,$$
$$d_1(g_{16})=+h_{29}+h_{30}+h_{31}+h_{32}+\cdots$$

由上可知每个生成元的 d_1 微分中都至少含有一个其他生成元微分中没有的项,因此这些生成元的 d_1 微分线性无关。同上述情况可得 $h_{1,1}h_{1,n}a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}\notin d_1(E_r^{p+1,t,(2n+1)p-2n-9})$。

同上述情况对于 May 分次等于$(4n-6)p-4n-1,(2n+8)p-2n-15$ 时,$h_{1,1}h_{1,n}a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}$均不是 g_{11}与 g_{12}的 d_1 微分的像。进一步地,由 $d_1(g_{11})=a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{2,1}h_{2,3}b_{n-3,2}+a_n^{p-4}h_{n,0}h_{n-1,1}h_{3,1}h_{1,4}b_{n-3,2}\cdots\neq 0$ 以及 $d_1(g_{12})=a_n^{p-4}h_{n-1,1}h_{n-2,2}h_{n-3,3}h_{2,0}b_{4,0}+\cdots\neq 0$ 可知,当 $r\geqslant 2$ 时,$E_r^{p+1,t,(4n-6)p-4n-1}=0$,$E_r^{p+1,t,(2n+8)p-2n-15}=0$。以上表示 $h_{1,1}h_{1,n}a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}$均不在 $d_r(E_r^{p+1,t,(4n-6)p-4n-1})$与 $d_r(E_r^{p+1,t,(2n+8)p-2n-15})$$(r\geqslant 1)$中。

综上可得,在 May 谱序列中 $h_{1,1}h_{1,n}a_4^{p-4}h_{4,0}h_{3,1}h_{2,2}h_{1,3}$不为任何 May 微分的像,所以

$$0\neq h_1h_n\delta_p\in H^{p+2,t}(A)。$$

主要定理得证。

注　根据文献[9],有 $d_2(h_n)=a_0b_{n-1}(n\geqslant 1)$,故 $d_2(h_1h_n)=a_0h_nb_0-a_0h_1b_{n-1}$,因此 h_1h_n 与 $h_nb_0-h_1b_{n-1}$为一对新的 a_0 相关元素,定义见文献[11]。本文和文献[4]的结论丰富了模 p Steenrod 代数 A 的高维上同调研究。

参考文献:

[1] ADAMS J F. Stable homotopy and generalised homotogy[M]. Chicago: University of Chicago Press, 1974.

[2] LIULEVICIUS A. The factorizations of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1960, 46(7):978-981.

[3] WANG Xiangjun, ZHENG Qibing. The convergence of $\tilde{\alpha}_s^n h_0 h_k$[J]. Science China Mathematics, 1998, 41(6):622-628.

[4] ZHAO Hao, LIU Xiugui, JIN Yinglong. A non-trivial product of filtration s+6 in the stable homotopy groups of spheres[J]. Acta Mathmatica Scientia, 2009, 29(2):276-284.

[5] WANG Yuyu, WANG Jianbo. On a new nontrivial element involving the third periodicity γ-family in $\pi_*(S)$[J]. Journal of

Mathematics, 2017, 37(5):898-910.
[6] 王玉玉, 刘艳芳. 球面稳定同伦群中非平凡元素 $\gamma_s\xi_n$[J]. 数学学报(中文版), 2018, 61(6):911-924.
WANG Yuyu, LIU Yanfang. The nontrivial element $\gamma_s\xi_n$ in the stable homotopy groups of spheres[J]. Acta Mathematica Sinica(Chinese Series), 2018, 61(6):911-924.
[7] GU Xing, WANG Xiangjun, WU Jianqiu. The composition of R. Cohen's elements and the third periodic elements in stable homotopy groups of spheres[J]. Osaka Journal of Mathematics, 2021, 58(2):367-382.
[8] LIN Jinkun. Third periodicity families in the stable homotopy of spheres[J]. Journal of Geometry and Topology, 2003, 3(3): 179-219.
[9] RAVENEL D C. Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres[M]. 2nd ed. NewYork: American Mathematical Society Chelsea Publishing, 2004:347.
[10] ZHONG Linan, WANG Yuyu. Detection of a nontrivial product in the stable homotopy groups of spheres[J]. Algebraic & Geometric Topology, 2013, 13(5):3009-3029.
[11] LIN Jinkun. Some new families of filtration five in the stable homotopy of spheres[J]. Acta Mathematica Scientia, 2009, 29(5):1395-1404.

(编辑:陈丽萍)

(上接第71页)

[4] LI Qian, HE Luofei. General decay and blow-up of solutions for a nonlinear viscoelastic wave equation with strong damping [J]. Boundary Value Problems, 2018, 2018(153):1-22.
[5] ZU Ge, GUO Bin. Bounds for lifespan of solutions to strongly damped semilinear wave equations with logarithmic sources and arbitrary initial energy[J]. Evolution Equations Control Theory, 2021, 10(2):259-270.
[6] YANG Hui, HAN Yuzhu. Blow-up for a damped p-Laplacian type wave equation with logarithmic nonlinearity[J]. Journal of Differential Equations, 2022, 306(1):569-589.
[7] AL-GHAREBLI M M, MESSAOUDI S A. The existence and the asymptotic behavior of a plate equation with frictional damping and a logarithmic source term[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 454(2):1114-1128.
[8] GROSS L. Logarithmic Sobolev inequalities[J]. American Journal of Mathematics, 1975, 97(4):1061-1083.
[9] CHEN H, LUO P, LIU G W. Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity[J]. Journal of Mathematical Analysis Applications, 2015, 422(1):84-98.
[10] SIMON J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$[J]. Annali di Matematica pura ed Applicata, 1986, 1976(146):65-96.
[11] 伍卓群,李勇. 常微分方程[M]. 北京:高等教育出版社,2004.
WU Zhuoqun, LI Yong. Ordinary differential equations[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004.

(编辑:陈丽萍)