

文章编号: 1671-9352(2024)02-0053-06 DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.557

# 不含 $K_{1,3}^+$ 图的强边染色

袁佳鑫, 黄明芳\*

(武汉理工大学理学院, 湖北 武汉 430070)

**摘要:** 一个图  $G$  的强边染色是将颜色分配给所有的边, 使得每个颜色类的导出子图是一个匹配。在图  $G$  的强边染色中所需的最小颜色数称为图  $G$  的强边色数, 边  $e=uv$  的度记为  $d(e)=d(u)+d(v)$ , 图  $G$  的边度记为  $d(G)=\min\{d(e) \mid e \in E(G)\}$ 。证明最大度为  $\Delta$  且图的边度大于顶点数的不含  $K_{1,3}^+$  图的强边色数至多是  $\Delta^2-\Delta+1$ 。

**关键词:** 强边染色; 强边色数; 边度

**中图分类号:** O157 **文献标志码:** A

**引用格式:** 袁佳鑫, 黄明芳. 不含  $K_{1,3}^+$  图的强边染色 [J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(2): 53-58.

## Strong edge-coloring of graphs without $K_{1,3}^+$

YUAN Jiaxin, HUANG Mingfang\*

(School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, Hubei, China)

**Abstract:** The strong edge-coloring of a graph  $G$  is to assign colors to all edges, so that the derived subgraphs of each color class are a matching. The minimum number of colors required in the strong edge-coloring of a graph  $G$  is called the strong chromatic index of the graph  $G$ , the degree of edge  $e=uv$  is recorded as  $d(e)=d(u)+d(v)$ , the edge degree of  $G$  is recorded as  $d(G)=\min\{d(e) \mid e \in E(G)\}$ . This paper proves that the strong chromatic index of the graph without  $K_{1,3}^+$  with the maximum degree  $\Delta$  and edge degree of the graph greater than the number of vertices is at most  $\Delta^2-\Delta+1$ .

**Key words:** strong edge-coloring; strong chromatic index; edge degree

## 1 引言及预备知识

本文所提到的图均为简单图, 用  $\delta(G)$  和  $\Delta(G)$  分别表示图  $G$  中顶点的最小度和最大度(简记为  $\delta$  和  $\Delta$ )。如果存在一个映射  $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  使得对任意 2 条相邻的边  $e_1$  和  $e_2$  有  $f(e_1) \neq f(e_2)$ , 那么称图  $G$  有一个正常的  $k$ -边染色。1983 年, 由于通信中频率分配的需要, Fouquet 和 Jolivet<sup>[1]</sup> 引入了强边染色的概念: 在图  $G$  的一个正常边染色中, 与同一条边相邻的 2 条边也染不同的颜色, 即每个颜色类的导出子图是一个匹配。在图  $G$  的强边染色中所需的最小颜色数称为图  $G$  的强边色数, 用  $\chi'_s(G)$  表示。强边染色可以用来解决复杂网络中的数据流和信息传递问题, 例如, 在无线电通信网络的频道分配问题中, 当 2 个收发器距离很近时, 它们传输的信号容易发生干扰, 所以要避免距离较近的收发器传输相同的频率。用颜色代表频率, 这个频道的分配问题就转化成了图的强边染色问题, 因此强边染色因具有良好的应用背景而受到了诸多学者的关注。

通过贪婪算法, 易知  $\chi'_s(G) \leq 2\Delta^2 - 2\Delta + 1$ 。为了减小上界中  $\Delta^2$  的系数, 在 1997 年, Molloy 和 Reed<sup>[2]</sup> 给出了强边色数的上界是  $1.998\Delta^2$ 。在 2018 年由 Bruhn 和 Joos<sup>[3]</sup> 将上界改进到  $1.93\Delta^2$ , 最近由 Hurley 等<sup>[4]</sup> 改

收稿日期: 2022-10-31; 网络出版时间: 2023-11-30 10:17:34

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20231128.1555.006>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12261094)

第一作者简介: 袁佳鑫(1999—), 女, 硕士研究生, 研究方向为图论. E-mail: 2461634998@qq.com

\* 通信作者简介: 黄明芳(1975—), 女, 副教授, 博士, 研究方向为图论. E-mail: ds\_hmf@126.com

进到  $1.772\Delta^2$ 。

对于一般图的强边染色,在 1988 年, Erdős<sup>[5]</sup> 提出了以下猜想:

**猜想 1.1**<sup>[5]</sup> 对于每个最大度为  $\Delta$  的图  $G$ ,

$$\chi'_s(G) \leq \begin{cases} \frac{5}{4}\Delta^2, & \text{如果 } \Delta \text{ 是偶数,} \\ \frac{5}{4}\Delta^2 - \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{4}, & \text{如果 } \Delta \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

当  $\Delta \leq 3$  时此猜想已被证实是成立的;当  $\Delta \geq 4$  时这个猜想仍是开放的,对于平面图的强边染色, Hudák 等<sup>[6]</sup> 在 2014 年得出以下结论:

**命题 1.1**<sup>[6]</sup> (1) 一个最大度为  $\Delta$  的平面图  $G$ , 如果  $g(G) \geq 7$ , 则  $\chi'_s(G) \leq 3\Delta$ ;

(2) 一个最大度为  $\Delta$  的平面图  $G$ , 如果  $g(G) \geq 6$ , 则  $\chi'_s(G) \leq 3\Delta + 5$ 。

2015 年, 孟献青<sup>[7]</sup> 证明了对于没有  $k$ -圈 ( $4 \leq k \leq 10$ ) 且 3-圈不相交的平面图, 有  $\chi'_s(G) \leq 3\Delta + 1$ 。同年孟献青<sup>[8]</sup> 证明了没有 3-、5-、6-、7-、8-圈及相交 4-圈的平面图的强边色数至多是  $3\Delta + 1$ 。2022 年, 卜月华和张恒<sup>[9]</sup> 证明了  $g \geq 5$ ,  $\Delta \geq 6$  并且 5-圈不相交的平面图的强边色数至多是  $4\Delta - 1$ 。

如果图  $H$  可以从图  $G$  的一个导出子图中通过收缩边得到, 则称  $H$  是  $G$  的子式图。如果图  $G$  没有图  $H$  作为一个子式图, 则称图  $G$  不含  $H$  子式图。Lih 等<sup>[10]</sup> 证明了若图  $G$  不含  $K_4$  子式图, 则当  $2 \leq \Delta \leq 3$  时, 有

$\chi'_s(G) \leq \Delta + 3$ ; 当  $\Delta \geq 4$  时, 有  $\chi'_s(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta}{2} \right\rfloor + 1$ 。后来, Wang 等<sup>[11]</sup> 证明如果图  $G$  不含  $K_4$  子式图, 有  $\chi'_s(G) \leq$

$3\Delta - 2$  且这个上界是紧的。如果一个图  $G$  不含与  $H^*$  同构的导出子图, 则称图  $G$  不含  $H^*$ 。若图  $G$  不含  $K_{1,3}$ , 则称图  $G$  为无爪图。2020 年, Dębski 等<sup>[12]</sup> 研究了最大度为  $\Delta$  的无爪图以及不含  $K_{1,t}$  的图, 得到如下结论:

**命题 1.2**<sup>[12]</sup> (1) 如果图  $G$  是一个最大度为  $\Delta$  的无爪图, 则强边染色数的上界是  $\frac{9}{8}\Delta^2 + \Delta$ 。

(2) 令  $t \geq 4$ , 如果图  $G$  是一个最大度为  $\Delta$  的不含  $K_{1,t}$  的图, 则强边染色数的上界是  $\left(2 - \frac{1}{t-2}\right)\Delta^2 - \frac{t-4}{t-2}\Delta -$

$\frac{1}{t-2}$ 。

2021 年, Dębski 和 Śleszyńska-Nowak<sup>[13]</sup> 对上述结果进行了改进, 得到了下面的结论:

**命题 1.3**<sup>[13]</sup> 若图  $G$  是一个最大度为  $\Delta$  的无爪图, 则  $G$  中强团的大小满足  $\omega(L^2(G)) \leq \Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta$ 。

**定义 1.1** 图  $G$  中, 与边  $e = uv$  关联的 2 个顶点  $u$  与  $v$  的度之和称为边  $e$  的度, 记为  $d(e)$ , 即  $d(e) = d(u) + d(v)$ 。记  $d(G) = \min\{d(e) \mid e \in E(G)\}$  为图  $G$  的边度。

**定义 1.2**  $K_{1,3}$  任意添加一条边称之为旗帜, 记为  $K_{1,3}^+$ 。

本文在命题 1.2 对无爪图研究的基础上, 研究了不含  $K_{1,3}^+$  图。若图  $G$  中不含  $K_{1,3}^+$ , 那么图  $G$  中顶点之间可能是独立的, 也可能存在很多边。当图  $G$  中顶点之间的边数较多时, 其结构较为复杂, 针对这类图, 本文得到了如下结果:

**定理 1.1** 设图  $G$  的最大度为  $\Delta$  且图的边度大于顶点数, 若图  $G$  不含  $K_{1,3}^+$ , 则  $\chi'_s(G) \leq \Delta^2 - \Delta + 1$ 。

猜想 1.1 所给出的强边色数上界中  $\Delta^2$  的系数为  $\frac{5}{4}$ , 本文在定理 1.1 的条件下将  $\Delta^2$  的系数减小为 1, 这一结论对强边染色的研究具有一定的推动作用。

本文考虑的图  $G$ , 其边度大于顶点数且不含  $K_{1,3}^+$ 。对于顶点数为  $n$  的图  $G$  中任意一条边  $e$ , 若  $d(e) > n$ , 则边  $e$  至少在一个三角形中 (假设图  $G$  中有一条边  $e = uv$  不在任意一个三角形中, 则  $d(u) + d(v) \leq n - 2 + 2 = n$ , 与  $d(e) > n$  矛盾), 因此将图  $G$  中的每条边按其所在三角形的个数由少到多进行排序, 按照这个顺序, 通过贪婪算法将这些边逐一进行着色, 即如果边  $e_1$  所在的三角形数量少于边  $e_2$  所在的三角形数量, 则边  $e_1$  先于边  $e_2$  着色。

## 2 图 $G$ 的局部结构

对于图  $G$  中的任意一条边  $e$ ,将与  $e$  的邻边相邻的边及  $e$  的邻边一起构成的集合称为  $e$  的 2-邻域(不包含边  $e$ )。设  $v_1v_2$  是  $G$  中的任意一条边,将计算在边  $v_1v_2$  的 2-邻域内先于边  $v_1v_2$  着色的边数。

如图 1,将图  $G$  中顶点  $v_1, v_2$  的邻点(除  $v_1, v_2$  外)划分为  $D_1, D_2, D_3$  这 3 个顶点集,其中  $D_1$  是与  $v_1$  相邻但不与  $v_2$  相邻的顶点集,  $D_2$  是与  $v_2$  相邻但不与  $v_1$  相邻的顶点集,  $D_3$  是同时与  $v_1$  和  $v_2$  相邻的顶点集,因此,在图  $G$  中,边  $v_1v_2$  的 2-邻域由顶点集  $D_1, D_2, D_3$  中所有顶点与其邻点之间的边构成。

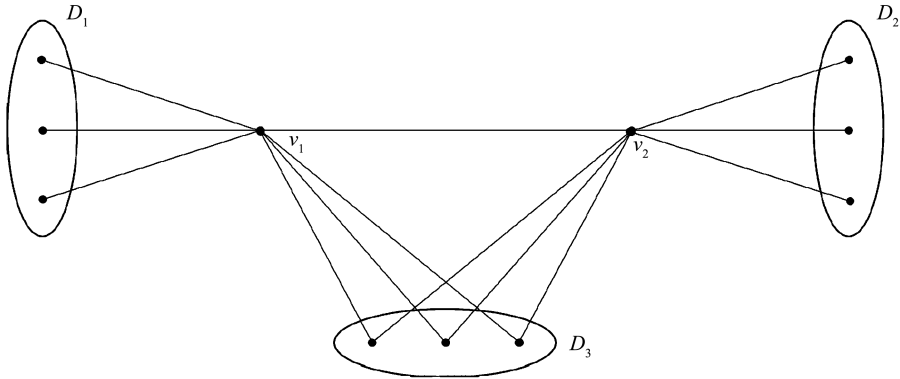


图 1 图  $G$  中顶点  $v_1, v_2$  的邻点(除  $v_1, v_2$  外)划分为  $D_1, D_2, D_3$  这 3 个顶点集

Fig.1 Neighbors of the vertices  $v_1, v_2$ (except  $v_1, v_2$ ) in the graph  $G$  are divided into three sets of vertices  $D_1, D_2$  and  $D_3$

令  $|D_1|=d_1, |D_2|=d_2, |D_3|=d_3$ ,已知图  $G$  的边度大于顶点数,那么任意一条边都至少在一个三角形中,所以  $D_3$  中至少有一个顶点,因此有

$$0 \leq d_1, \quad d_2 \leq \Delta - 1, \tag{2.1}$$

$$1 \leq d_3 \leq \Delta - 1, \tag{2.2}$$

$$d_1 + d_3 \leq \Delta - 1, \tag{2.3}$$

$$d_2 + d_3 \leq \Delta - 1. \tag{2.4}$$

图  $G$  中的顶点集  $D_1, D_2, D_3$  间的结构满足以下引理:

**引理 2.1** (1)  $D_1, D_2$  是独立集;

(2) 对于任意  $x_1 \in D_1, x_3 \in D_3$ ,都有  $x_1$  与  $x_3$  相邻;

(3) 对于任意  $x_2 \in D_2, x_3 \in D_3$ ,都有  $x_2$  与  $x_3$  相邻;

(4) 对于任意  $x_1 \in D_1, x_2 \in D_2$ ,都有  $x_1$  与  $x_2$  相邻。

**证明** (1) 反证法。假设  $\exists u_1, u_2 \in D_1$ ,使得  $u_1, u_2$  相邻,则顶点  $u_1, u_2$  与  $v_1, v_2$  一起形成一个  $K_{1,3}^+$ ,矛盾。 $D_2$  的证明与之同理。

(2) 假设  $\exists x_1 \in D_1, x_3 \in D_3$ ,使得  $x_1$  与  $x_3$  不相邻。已知  $x_1$  与  $v_2$  不相邻,因此顶点  $x_1, x_3$  与  $v_1, v_2$  会形成一个  $K_{1,3}^+$ ,矛盾。

(3) 假设  $\exists x_2 \in D_2, x_3 \in D_3$ ,使得  $x_2$  与  $x_3$  不相邻。因为  $x_2$  与  $v_1$  不相邻,所以顶点  $x_2, x_3$  与  $v_1, v_2$  会形成一个  $K_{1,3}^+$ ,矛盾。

(4) 假设  $\exists x_1 \in D_1, x_2 \in D_2$ ,使得  $x_1$  与  $x_2$  不相邻。由(2)、(3)知,在  $D_1, D_2, D_3$  中任取一个点与  $v_1$  或  $v_2$  会形成一个  $K_{1,3}^+$ ,矛盾。证毕。

下面给出  $I_{d_i+1>d_3}$  的定义:

$$I_{d_i+1>d_3} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } d_i+1 \leq d_3, \\ 1, & \text{如果 } d_i+1 > d_3, \end{cases}$$

其中  $i=1, 2$ 。

现在来计算图  $G$  中在边  $v_1v_2$  的 2-邻域内先于边  $v_1v_2$  着色的边数,即  $v_1v_2$  的 2-邻域内的边数减去在边  $v_1v_2$  之后着色的边数,至多为

$$\Delta(d_1+d_2+d_3)-d_1d_2-d_1d_3-d_2d_3-I_{d_1+1>d_3}d_2d_3-I_{d_2+1>d_3}d_1d_3-I_{d_1+1>d_3}d_3-I_{d_2+1>d_3}d_3. \quad (2.5)$$

注意到,边  $v_1v_2$  的 2-邻域由顶点集  $D_1, D_2, D_3$  中所有顶点与其邻点之间的边构成。在图  $G$  中,顶点集  $D_1, D_2, D_3$  中所有顶点的度都至多为  $\Delta$ ,那么边  $v_1v_2$  的 2-邻域内边数的最大值为  $\Delta(d_1+d_2+d_3)$ ,因此第 1 项表示在边  $v_1v_2$  的 2-邻域内边数的最大值。

由引理 2.1 知,2 个端点分别在顶点集  $D_i$  与  $D_j$  中的边数是  $d_id_j$ ,其中  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  且  $i \neq j$ 。由于 2 个端点分别在顶点集  $D_i$  与  $D_j$  中的边在第 1 项中被计算了 2 次,因此要减去第 2, 3, 4 项。

然后减去在边  $v_1v_2$  之后着色的边数。已知  $v_1v_2$  在  $d_3$  个三角形中,若  $v_1v_2$  的 2-邻域内的边所在三角形的数量大于  $d_3$ ,则该边在  $v_1v_2$  之后着色。

由引理 2.1 可知,2 个端点分别在  $D_1$  与  $D_3$  中的任意一条边所在的三角形数量至少为  $d_2+1$ ,2 个端点分别在  $D_2$  与  $D_3$  中的任意一条边所在的三角形数量至少为  $d_1+1$ ,2 个端点分别在  $D_1$  与  $D_2$  中的任意一条边所在的三角形数量至少为  $d_3$ 。顶点  $v_1$  与  $D_3$  中任意一个顶点之间的边所在的三角形数量至少为  $d_1+1$ ,顶点  $v_2$  与  $D_3$  中任意一个顶点之间的边所在的三角形数量至少为  $d_2+1$ 。

第 5 项中如果  $d_1+1>d_3$ ,则 2 个端点分别在  $D_2$  与  $D_3$  中的边在  $v_1v_2$  之后着色,共  $d_2d_3$  条;第 6 项中如果  $d_2+1>d_3$ ,则 2 个端点分别在  $D_1$  与  $D_3$  中的边在  $v_1v_2$  之后着色,共  $d_1d_3$  条;第 7 项中如果  $d_1+1>d_3$ ,则顶点  $v_1$  与  $D_3$  中任意一个顶点之间的边均在  $v_1v_2$  之后着色,共  $d_3$  条;第 8 项中如果  $d_2+1>d_3$ ,则顶点  $v_2$  与  $D_3$  中任意一个顶点之间的边均在  $v_1v_2$  之后着色,共  $d_3$  条。

### 3 定理 1.1 的证明

本节求解式(2.5)的最大值,因为图  $G$  的边度大于顶点数  $n$ ,所以有最大度  $\Delta > \frac{n}{2}$ 。当  $n \leq 3$  时,定理 1.1 显然成立。接下来讨论  $n \geq 4$  的情况,此时  $\Delta \geq 3$ ,由引理 2.1 可知, $d_1+d_2 \leq \Delta-2$ 。注意到所有约束对于  $d_1$  和  $d_2$  都是对称的,那么式(2.5)取得最大值时  $d_1=d_2 \leq \frac{\Delta-2}{2}$ ,因此式(2.5)不超过

$$f(d_1, d_3) = \Delta(2d_1+d_3) - d_1^2 - 2d_1d_3 - I_{d_1+1>d_3}2d_1d_3 - I_{d_1+1>d_3}2d_3. \quad (3.1)$$

**情形 1**  $d_1+1>d_3$ 。

式(3.1)变为

$$f_1(d_1, d_3) = \Delta(2d_1+d_3) - d_1^2 - 4d_1d_3 - 2d_3. \quad (3.2)$$

对  $d_3$  求导得  $\frac{\partial f_1}{\partial d_3} = \Delta - 4d_1 - 2$ 。

**情形 1.1**  $0 \leq d_1 \leq \frac{\Delta-2}{4}$ 。

在这种情况下,式(3.2)关于  $d_3$  递增,根据式(2.3)以及  $d_1+1>d_3$  得  $\Delta-d_1-1>d_1+1$  恒成立,因此  $d_3 < d_1+1$ ,则式(3.2)不超过

$$f_2(d_1) = 3\Delta d_1 + \Delta - 5d_1^2 - 6d_1 - 2. \quad (3.3)$$

对  $d_1$  求导得  $\frac{df_2}{dd_1} = 3\Delta - 10d_1 - 6 \geq 3\Delta - \frac{5}{2}\Delta + 5 - 6 = \frac{1}{2}\Delta - 1 > 0$  恒成立,因此式(3.3)关于  $d_1$  递增,则当  $d_1 =$

$\frac{\Delta-2}{4}$  时,式(3.3)取得最大值  $\frac{7}{16}\Delta^2 - \frac{3}{4}\Delta - \frac{1}{4}$ 。

**情形 1.2**  $\frac{\Delta-2}{4} < d_1 \leq \frac{\Delta-2}{2}$ 。

在这种情况下,式(3.2)关于  $d_3$  递减。因为  $1 \leq d_3 < d_1+1$ ,所以当  $d_3=1$  时,式(3.2)取最大值

$$f_3(d_1) = 2\Delta d_1 + \Delta - d_1^2 - 4d_1 - 2. \quad (3.4)$$

对  $d_1$  求导得  $\frac{df_3}{dd_1} = 2\Delta - 2d_1 - 4 \geq 2\Delta - 2 \times \frac{\Delta-2}{2} - 4 = \Delta - 2 > 0$  恒成立,因此  $f_3$  关于  $d_1$  递增,则当  $d_1 = \frac{\Delta-2}{2}$  时,

式(3.4)取最大值  $\frac{3}{4}\Delta^2-2\Delta+1$ 。

**情形 2**  $d_1+1 \leq d_3$ 。

式(3.1)变为

$$f_4(d_1, d_3) = \Delta(2d_1 + d_3) - d_1^2 - 2d_1d_3. \tag{3.5}$$

对  $d_1$  求导得  $\frac{\partial f_4}{\partial d_1} = 2\Delta - 2d_1 - 2d_3 = 2(\Delta - d_1 - d_3) \geq 2 > 0$ , 所以式(3.5)关于  $d_1$  递增。根据  $d_1 + d_3 \leq \Delta - 1$ ,  $d_1 \leq$

$d_3 - 1$  以及  $d_1 \leq \frac{\Delta - 2}{2}$ , 分以下 2 种情况讨论:

**情形 2.1**  $1 \leq d_3 \leq \frac{\Delta}{2}$ 。

此时  $d_3 - 1 \leq \frac{\Delta - 2}{2} \leq \Delta - d_3 - 1$ , 则  $0 \leq d_1 \leq d_3 - 1$ , 因此式(3.5)不超过

$$f_5(d_3) = 3\Delta d_3 - 2\Delta - 3d_3^2 + 4d_3 - 1. \tag{3.6}$$

对  $d_3$  求导得  $\frac{df_5}{dd_3} = 3\Delta - 6d_3 + 4 \geq 3\Delta - 6 \times \frac{\Delta}{2} + 4 = 4 > 0$ , 因此式(3.6)关于  $d_3$  递增, 则当  $d_3 = \frac{\Delta}{2}$  时, 式(3.6)取

得最大值  $\frac{3}{4}\Delta^2 - 1$ 。

**情形 2.2**  $\frac{\Delta}{2} < d_3 \leq \Delta - 1$ 。

此时  $\Delta - d_3 - 1 \leq \frac{\Delta - 2}{2} \leq d_3 - 1$ , 则  $0 \leq d_1 \leq \Delta - d_3 - 1$ , 因此当  $d_1 = \Delta - d_3 - 1$  时, 式(3.5)取得最大值

$$f_6(d_3) = \Delta^2 - \Delta d_3 + d_3^2 - 1. \tag{3.7}$$

对  $d_3$  求导得  $\frac{df_6}{dd_3} = 2d_3 - \Delta > 2 \times \frac{\Delta}{2} - \Delta = 0$ , 因此式(3.7)关于  $d_3$  递增, 则当  $d_3 = \Delta - 1$  时, 式(3.7)取得最大值

$\Delta^2 - \Delta$ 。

综上所述, 在边  $v_1v_2$  的 2-邻域内先于边  $v_1v_2$  着色的边数最大值为  $\Delta^2 - \Delta$ , 因此最大度为  $\Delta$  时, 图  $G$  的强边色数上界为  $\Delta^2 - \Delta + 1$ 。

参考文献:

- [1] FOUQUET J L, JOLIVET J L. Strong edge-colorings of graphs and applications to multi- $k$ -gons[J]. *Ars Combinatoria A*, 1983, 16:141-150.
- [2] MOLLOY M, REED B. A bound on the strong chromatic index of a graph[J]. *Journal of Combinatorial Theory: Series B*, 1997, 69(2):103-109.
- [3] BRUHN H, JOOS F. A stronger bound for the strong chromatic index[J]. *Combinatorics, Probability and Computing*, 2018, 27(1):21-43.
- [4] HURLEY E, DE JOANNIS DE VERCLOS R, KANG R J. An improved procedure for colouring graphs of bounded local density[C]//*Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*. New York: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021: 135-148.
- [5] ERDÖS P. Problems and results in combinatorial analysis and graph theory[J]. *Discrete Mathematics*, 1988, 72(1/2/3):81-92.
- [6] HUDÁK D, LUŽAR B, SOTÁK R, et al. Strong edge-coloring of planar graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2014, 324:41-49.
- [7] 孟献青. 一类平面图的强边染色[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2015, 50(8):10-13.  
MENG Xianqing. Strong edge coloring of a class of planar graphs[J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2015, 50(8):10-13.
- [8] 孟献青. 没有短圈的平面图的强边染色[J]. *南开大学学报(自然科学版)*, 2015, 48(6):1-5.  
MENG Xianqing. Strong edge coloring of planar graphs without short cycles[J]. *Journal of Nankai University (Natural Sci-*

ence), 2015, 48(6):1-5.

- [9] 卜月华,张恒. 平面图的强边染色[J]. 运筹学学报, 2022, 26(2):111-127.  
BU Yuehua, ZHANG Heng. Strong edge coloring of planar graphs[J]. Journal of Operational Research, 2022, 26(2):111-127.
- [10] LIH K W, WANG W F, ZHU X D. Coloring the square of a  $K_4$ -minor free graph[J]. Discrete Mathematics, 2003, 269(1):303-309.
- [11] WANG Yiqiao, WANG Ping, WANG Weifan. Strong chromatic index of  $K_4$ -minor free graphs[J]. Information Processing Letters, 2018, 129:53-56.
- [12] DEBSKI M, JUNOSZA-SZANIAWSKI K, ŚLESZYŃSKA-NOWAK M. Strong chromatic index of  $K_{1,r}$ -free graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2020, 284:53-60.
- [13] DEBSKI M, ŚLESZYŃSKA-NOWAK M. Strong cliques in claw-free graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 2021, 37(6):2581-2593.

(编辑:李艺)

(上接第52页)

- [8] 李泽鹏,耿培伦,陈祥恩. 树的  $D(r)$ -点可区别边染色[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2020, 19(1):1-7.  
LI Zepeng, GENG Peilun, CHEN Xiang'en.  $D(r)$ -vertex distinguishing edge coloring of trees[J]. Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition), 2020, 19(1):1-7.
- [9] SONG Hongjie, XU Changqing. Neighbor sum distinguishing total chromatic number of  $K_4$ -minor free graph[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2017, 12(4):937-947.
- [10] ZHANG Zhongfu, LIU Linzhong, WANG Jianfang. Adjacent strong edge coloring of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(5):623-626.
- [11] 谭钧铭,强会英,王洪申. 单圈图的邻和可区别边染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(2):78-83.  
TAN Junming, QIANG Huiying, WANG Hongshen. Neighbor sum distinguishing edge coloring of unicyclic graphs[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2022, 57(2):78-83.
- [12] CHENG Xiaohan, DING Laihao, WANG Guanghui, et al. Improved bounds for neighbor sum (set) distinguishing choosability of planar graphs[J]. Discrete Mathematics, 2020, 343(7):111856.

(编辑:祁业卿)