

文章编号: 1671-9352(2024)03-0118-09 DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.7.2023.4667

# 基于改进距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策新方法

刘梦迪<sup>1,2</sup>, 张贤勇<sup>1,2\*</sup>, 莫智文<sup>1,2</sup>

(1. 四川师范大学数学科学学院, 四川 成都 610066; 2. 四川师范大学智能信息与量子信息研究所, 四川 成都 610066)

**摘要:** 针对概率犹豫模糊环境下属性权重已知的多属性群决策问题, 考虑概率犹豫模糊集的犹豫度, 提出基于改进距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策新方法。结合传统的概率犹豫模糊距离测度, 通过信息融合定义融入犹豫度的概率犹豫模糊距离测度: 汉明距离、欧氏距离、广义欧氏距离, 并通过组合系数来实现理论扩张和融合优化, 同时研究距离测度的大小关系及参数单调性。将融入犹豫度的距离测度与基于理想解相似度的逼近理想解排序法(technique for order preference by similarity to ideal solution, TOPSIS)结合构建多属性群决策新方法, 采用公司选址案例进行决策选择, 通过参数分析和决策比较来揭示所建方法的有效性。相关研究系统深化概率犹豫模糊距离测度, 并丰富了多属性群决策方法。

**关键词:** 多属性群决策; 概率犹豫模糊集; 犹豫度; 信息融合; 距离测度

**中图分类号:** O159; C934 **文献标志码:** A

**引用格式:** 刘梦迪, 张贤勇, 莫智文. 基于改进距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策新方法[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(3): 118-126.

## A new probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute group decision making method based on improved distance measures

LIU Mengdi<sup>1,2</sup>, ZHANG Xianyong<sup>1,2\*</sup>, MO Zhiwen<sup>1,2</sup>

(1. School of Mathematical Sciences, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, Sichuan, China; 2. Institute of Intelligent Information and Quantum Information, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, Sichuan, China)

**Abstract:** Aiming at the multi-attribute group decision making problem with known attribute weights under probabilistic hesitant fuzzy environments, hesitation degrees of probabilistic hesitant fuzzy sets are considered, and thus a new method of probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute group decision making is proposed based on improved distance measures. Firstly, combining the traditional probabilistic hesitant fuzzy distance measures, improved probabilistic hesitant fuzzy distance measures with hesitation degrees are defined through information fusion, including the Hamming distance, Euclidean distance, and generalized Euclidean distance. These new measures depend on combination coefficients to achieve the theoretical expansion and fusion optimization, and size relationships and parameter monotonicity of distance measures are studied. Secondly, according to the improved distance measures, a new method of multi-attribute group decision making is constructed by using the technique for order preference by similarity to ideal solution(TOPSIS) method, and an example of company location is used to make decision selection. The effectiveness of the proposed method is revealed by parameter analysis and decision comparison. Related researches systematically deepen probabilistic hesitant fuzzy distance measures, and effectively enrich multi-attribute group decision-making methods.

**Key words:** multi-attribute group decision making; probabilistic hesitant fuzzy set; hesitation degree; information fusion; distance measure

收稿日期: 2023-04-26; 网络出版时间: 2023-10-18 08:52:11

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20231016.1723.004>

基金项目: 四川省科技计划资助项目(2021YJ0085; 2022ZYD0001); 四川省自然科学基金资助项目(24NSFSCI1487, 2022NSFSC0929)

第一作者: 刘梦迪(1999—), 女, 硕士研究生, 研究方向为模糊集理论与决策分析. E-mail: 719867875@qq.com

\* 通信作者: 张贤勇(1978—), 男, 教授, 博士生导师, 博士, 研究方向为不确定分析与信息处理. E-mail: xianyongzh@sina.com

## 0 引言

在复杂的多属性决策问题中,决策者们通常对同一个问题有不同看法,并且有时很难统一,因此Torra<sup>[1]</sup>提出犹豫模糊集,允许某个集合的隶属度可以由多个不同的值表示,但所考虑的每个隶属度的概率是相同的。为了解决这一问题,Xu等<sup>[2]</sup>在犹豫模糊元的基础上为每个隶属度加上对应的概率,定义概率犹豫模糊集(probabilistic hesitant fuzzy sets, PHFSs)。概率犹豫模糊集不仅考虑到决策者的偏好,还充分刻画专家的不确定性决策信息。当概率值相等时,概率犹豫模糊集就退化为犹豫模糊集,所以概率犹豫模糊集可以看作是犹豫模糊集的推广。概率犹豫模糊集已有广泛应用,如相关系数<sup>[3]</sup>、平均算子<sup>[4]</sup>、熵<sup>[5]</sup>等。相关研究具有理论意义和实际价值,但还值得深入。

距离测度在解决模糊决策问题中发挥关键作用,已经成为研究热点。Ohlan<sup>[6]</sup>在区间直觉模糊集中提出熵和距离测度以及多准则群决策问题的求解方法;Mahanta等<sup>[7]</sup>在毕达哥拉斯模糊集中提出新的距离测度并应用于实际决策问题;Hao等<sup>[8]</sup>提出新的距离测度和相似测度并应用到海洋能源运输路线决策问题中。特别地,理想解相似度的逼近理想解排序(technique for order preference by similarity to ideal solution, TOPSIS)方法通过判断对象与理想解之间的距离,从而进行排序并选择最优,普遍应用于模糊决策<sup>[9-12]</sup>。关于概率犹豫模糊距离测度的多属性群决策已取得较好研究成果。骆华<sup>[13]</sup>考虑到元素差异等问题定义改进的距离公式并运用于多属性决策;曾维丹<sup>[14]</sup>提出新的概率犹豫模糊距离测度并应用于多属性群决策和属性约简;方冰等<sup>[15]</sup>改进传统的概率犹豫模糊距离测度并建立概率犹豫模糊多属性群决策方法。概率犹豫模糊距离测度中几乎没有考虑到犹豫度,而犹豫度是体现概率犹豫模糊集的重要特征之一,在决策过程中能够很好地反映决策者犹豫不决的程度,从而反映决策信息的稳定性,因此,融入犹豫度的距离测度能够更有效地解决多属性群决策问题,使决策结果更可靠,同时促进概率犹豫模糊集的发展。

最近,文献[15]在传统的概率犹豫模糊距离测度上加入修正项,提出新的概率犹豫模糊距离测度,虽然考虑了传统距离测度的缺点,但依然没有考虑到概率犹豫模糊集中元素差异所带来的犹豫性。基于此,本文在方冰等<sup>[15]</sup>提出的距离测度上融入犹豫度,并添加系数参数来有效调控距离测度。提出的新距离测度既保留了传统概率犹豫模糊距离测度的特点,又考虑了概率犹豫模糊集本身的数据结构特征,克服了传统距离测度的不足,实现对传统距离测度和方冰等<sup>[15]</sup>距离测度的系统扩张与应用优化;研究了距离测度的大小关系和参数单调性,并通过一个算例分析组合参数与距离测度的关系;将改进后的距离测度与TOPSIS决策方法结合,提出基于改进距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策新方法,并采用公司选址算例进行决策选择,通过参数分析、决策比较来验证所提方法的有效性和优越性。

## 1 已有的概率犹豫模糊距离测度

本节简要回顾概率犹豫模糊集的基本概念和已有的概率犹豫模糊距离测度。

**定义 1**<sup>[2]</sup>  $X = \{x_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  是一个非空有限集,  $X$  上的概率犹豫模糊集(probabilistic hesitant fuzzy set, PHFS)定义为

$$A_p = \{ \langle x_i, h_A(\gamma^\lambda(x_i) | p^\lambda(x_i)) \rangle | x_i \in X \}, \quad (1)$$

其中,  $h_A(\gamma^\lambda | p^\lambda)$  称为概率犹豫模糊元;  $\gamma^\lambda(x_i)$  表示元素  $x_i$  属于集合  $X$  的隶属度;  $p^\lambda(x_i)$  表示隶属  $\gamma^\lambda(x_i)$  对应的概率, 且有  $\lambda = 1, 2, \dots, l_i$ ,  $\gamma^\lambda \in [0, 1]$ ,  $\sum p^\lambda = 1$ , 并规定  $h_A(\gamma^\lambda | p^\lambda)$  中所有的元素均以  $\gamma^\lambda$  升序的方式排列。

**定义 2**<sup>[2]</sup> 概率犹豫模糊元  $h = \{\gamma^\lambda | p^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, l\}$  的得分函数定义为

$$S(h) = \sum_{\lambda=1}^l \gamma^\lambda p^\lambda. \quad (2)$$

通过相关模糊领域研究可知,模糊环境下的距离更关心非负性、反身性、交换性三大公理性质,包括文献[13-16]也是如此,因此,本文主要关注这三大性质。

**定义 3**<sup>[16]</sup>  $X$  上 2 个概率犹豫模糊元  $h_1, h_2$  的距离测度  $d(h_1, h_2)$  满足 3 个公理性条件:

(1) 非负性:  $0 \leq d(h_1, h_2)$ ; (2) 反身性:  $d(h_1, h_2) = 0 \Leftrightarrow h_1 = h_2$ ; (3) 交换性:  $d(h_1, h_2) = d(h_2, h_1)$ 。

其中,  $h_1(\gamma|p)$ 、 $h_2(\dot{\gamma}|\dot{p})$  是 2 个概率犹豫模糊元, 且元素个数相等, 则传统的概率犹豫模糊汉明 (Hamming) 距离、概率犹豫模糊欧氏 (Euclidean) 距离、广义概率犹豫模糊欧氏 (Euclidean) 距离分别为:

$$d_T(h_1, h_2) = \sum_{\lambda=1}^l |\gamma^\lambda p^\lambda - \dot{\gamma}^\lambda \dot{p}^\lambda|, \quad (3)$$

$$d_T^2(h_1, h_2) = \left[ \sum_{\lambda=1}^l |\gamma^\lambda p^\lambda - \dot{\gamma}^\lambda \dot{p}^\lambda|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

$$d_T^\alpha(h_1, h_2) = \left[ \sum_{\lambda=1}^l |\gamma^\lambda p^\lambda - \dot{\gamma}^\lambda \dot{p}^\lambda|^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (5)$$

注 1 广义概率犹豫模糊欧氏距离中  $\alpha > 0$ 。特别地, 当  $\alpha = 1$  时, 式(5)退化到(3); 当  $\alpha = 2$  时, 式(5)退化到(4)。

注 2 距离测度要求 2 个集合所包含基本元素个数相等, 若出现不一致情况, 则需要规范化处理。对此本文采用风险厌恶对元素个数少的集合进行扩充处理。例如, 3 个概率犹豫模糊元分别  $h_1 = \{0.3|1\}$ ,  $h_2 = \{0.2|0.5, 0.5|0.5\}$ ,  $h_3 = \{0.3|0.3, 0.4|0.4, 0.5|0.3\}$ , 采用风险厌恶规范化处理可得  $h_1 = \{0.3|0, 0.3|0, 0.3|1\}$ ,  $h_2 = \{0.2|0, 0.2|0.5, 0.5|0.5\}$ ,  $h_3 = \{0.3|0.3, 0.4|0.4, 0.5|0.3\}$ 。

传统的概率犹豫模糊距离测度计算 2 个不同的概率犹豫模糊元间的距离, 可以得出相等 0 值, 违背定义 3 的公理性条件。对此文献[15]在传统距离测度基础上加入修正项提出了修正的距离测度。

定义 4<sup>[15]</sup> 2 个相等元素个数的概率犹豫模糊元  $h_1(p) = \{\gamma^\lambda | p^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, l\}$  和  $h_2(\dot{p}) = \{\dot{\gamma}^\lambda | \dot{p}^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, l\}$ , 两者之间的概率犹豫模糊汉明距离和概率犹豫模糊欧氏距离为

$$d_E(h_1, h_2) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^l [|\gamma^\lambda p^\lambda - \dot{\gamma}^\lambda \dot{p}^\lambda| + |\gamma^\lambda - \dot{\gamma}^\lambda| p^\lambda \dot{p}^\lambda], \quad (6)$$

$$d_E^2(h_1, h_2) = \left( \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^l [|\gamma^\lambda p^\lambda - \dot{\gamma}^\lambda \dot{p}^\lambda|^2 + (\gamma^\lambda - \dot{\gamma}^\lambda)^2 p^\lambda \dot{p}^\lambda] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

定义 5 基于传统的广义概率犹豫模糊欧氏距离, 并模仿方冰等<sup>[15]</sup>修正距离测度的思想, 定义广义概率犹豫模糊欧氏距离为

$$d_E^\alpha(h_1, h_2) = \left( \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^l [|\gamma^\lambda p^\lambda - \dot{\gamma}^\lambda \dot{p}^\lambda|^\alpha + (\gamma^\lambda - \dot{\gamma}^\lambda)^\alpha p^\lambda \dot{p}^\lambda] \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (8)$$

注 3 改进的广义概率犹豫模糊欧氏距离中,  $\alpha > 0$ 。特别地, 当  $\alpha = 1$  时, 式(8)退化到(6); 当  $\alpha = 2$  时, 式(8)退化到(7), 并且容易验证式(8)中广义概率犹豫模糊欧氏距离满足定义 3 中的 3 个公理性条件。

## 2 融入犹豫度的概率犹豫模糊距离测度

传统的概率犹豫模糊距离测度考虑到隶属度及其概率的问题, 方冰等<sup>[15]</sup>提出的概率犹豫模糊距离测度解决不同模糊集有相同距离测度的问题, 但概率犹豫模糊距离测度没有考虑到元素之间犹豫程度的差异。而犹豫度是概率犹豫模糊集重要表现之一, 能有效测量专家们犹豫不决的程度。接下来提出融入犹豫度的概率犹豫模糊距离测度。

定义 6<sup>[17]</sup>  $X$  上的概率犹豫模糊元  $h = \{\gamma^\lambda | p^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, l\}$  的犹豫度定义为

$$\varphi_h = \sqrt{\frac{1}{l} \sum_{\lambda=1}^l [\gamma^\lambda - \sum_{\lambda=1}^l \gamma^\lambda p^\lambda]^2}. \quad (9)$$

定义 7 2 个概率犹豫模糊元  $h_1(p) = \{\gamma^\lambda | p^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, l\}$  和  $h_2(\dot{p}) = \{\dot{\gamma}^\lambda | \dot{p}^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, l\}$ , 则融入犹豫度的概率犹豫模糊距离测度如下所示:

(1) 融入犹豫度的概率犹豫模糊汉明距离为

$$d_{1, \mu_1, \mu_2}(h_1, h_2) = \frac{1}{1 + \mu_1 + \mu_2} \left( \sum_{\lambda=1}^l [|\gamma^\lambda p^\lambda - \dot{\gamma}^\lambda \dot{p}^\lambda| + \mu_1 |\gamma^\lambda - \dot{\gamma}^\lambda| p^\lambda \dot{p}^\lambda] + \mu_2 |\varphi_{h_1} - \varphi_{h_2}| \right). \quad (10)$$

(2) 融入犹豫度的概率犹豫模糊欧氏距离为

$$d_{1,\mu_1,\mu_2}^2(h_1, h_2) = \left( \frac{1}{1+\mu_1+\mu_2} \left( \sum_{\lambda=1}^l [(\gamma^\lambda p^\lambda - \check{\gamma}^\lambda \check{p}^\lambda)^2 + \mu_1(\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda)^2 p^\lambda \check{p}^\lambda] + \mu_2(\varphi_{h_1} - \varphi_{h_2})^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

(3) 融入犹豫度的广义概率犹豫模糊欧氏距离为

$$d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha(h_1, h_2) = \left( \frac{1}{1+\mu_1+\mu_2} \left( \sum_{\lambda=1}^l [|\gamma^\lambda p^\lambda - \check{\gamma}^\lambda \check{p}^\lambda|^\alpha + \mu_1|\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda|^\alpha p^\lambda \check{p}^\lambda] + \mu_2|\varphi_{h_1} - \varphi_{h_2}|^\alpha \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (12)$$

注4 融入犹豫度的广义概率犹豫模糊欧氏距离中,  $\alpha > 0$ 。特别地, 当  $\alpha = 1$  时, 式(12)退化到(10); 当  $\alpha = 2$  时, 式(12)退化到(11)。式(10)~(12)中的  $\mu_1, \mu_2$  均为常数, 且  $0 \leq \mu_1, \mu_2 \leq 1$ 。

特别地, 当  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  时, 式(10)、(11)、(12)对应退化到传统概率犹豫模糊距离式(3)、(4)、(5); 特别地, 当  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$  时, 式(10)、(11)、(12)对应退化到修正的概率犹豫模糊距离式(6)、(7)、(8)。

综上所述, 本文提出的融入犹豫度的概率犹豫模糊距离测度中涉及3个参数  $\mu_1, \mu_2, \alpha$ 。将传统距离、修正距离、犹豫度进行融合扩张, 因此引入2个参数  $\mu_1, \mu_2$  (3个基项的系数其实是  $1, \mu_1, \mu_2$ )。当  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$  是可以退化到传统距离, 当  $\mu_2 = 0$  时可以退化到修正距离, 同时  $\mu_1, \mu_2$  取其他参数值时可以带来不同比例与更多情况的信息融合, 也就提供了优化性与选择性。可见, 这里的线性组合涉及到  $\mu_1, \mu_2$  2个参数, 它们具有相关的语义机制、理论扩张、应用优化, 并且设置非线性的广义参数  $\alpha$  是对概率犹豫模糊汉明距离(式(10)), 到欧氏距离(式(11)), 再到广义的欧氏距离(式(12))的扩张与优化。

**定理1** 定义7中融入犹豫度的概率犹豫模糊距离测度均满足定义3中的3个公理性条件。

**证明** 已知  $h_1(p) = \{\gamma^\lambda | p^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, l\}$ ,  $h_2(\check{p}) = \{\check{\gamma}^\lambda | \check{p}^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, l\}$ , 以式(12)为例。

(1) 由于概率犹豫模糊集中的任一隶属度及其概率值均属于  $[0, 1]$ , 且绝对值具有非负性, 故可得  $0 \leq d(h_1, h_2) \leq 1$ , 从而  $0 \leq d(h_1, h_2)$ 。

(2)  $d(h_1, h_2) = d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha(h_1, h_2) = \left( \frac{1}{1+\mu_1+\mu_2} \left( \sum_{\lambda=1}^l [|\gamma^\lambda p^\lambda - \check{\gamma}^\lambda \check{p}^\lambda|^\alpha + \mu_1|\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda|^\alpha p^\lambda \check{p}^\lambda] + \mu_2|\varphi_{h_1} - \varphi_{h_2}|^\alpha \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0 \Leftrightarrow |\gamma^\lambda p^\lambda - \check{\gamma}^\lambda \check{p}^\lambda|^\alpha = 0, |\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda|^\alpha p^\lambda \check{p}^\lambda = 0, |\varphi_{h_1} - \varphi_{h_2}|^\alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma^\lambda = \check{\gamma}^\lambda, p^\lambda = \check{p}^\lambda \Leftrightarrow h_1 = h_2$ 。

(3) 可知  $d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha(h_1, h_2) = \left( \frac{1}{1+\mu_1+\mu_2} \left( \sum_{\lambda=1}^l [|\gamma^\lambda p^\lambda - \check{\gamma}^\lambda \check{p}^\lambda|^\alpha + \mu_1|\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda|^\alpha p^\lambda \check{p}^\lambda] + \mu_2|\varphi_{h_1} - \varphi_{h_2}|^\alpha \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left( \frac{1}{1+\mu_1+\mu_2} \left( \sum_{\lambda=1}^l [|\check{\gamma}^\lambda \check{p}^\lambda - \gamma^\lambda p^\lambda|^\alpha + \mu_1|\check{\gamma}^\lambda - \gamma^\lambda|^\alpha \check{p}^\lambda p^\lambda] + \mu_2|\varphi_{h_2} - \varphi_{h_1}|^\alpha \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} = d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha(h_2, h_1)$ 。

综上,  $d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha(h_1, h_2) = d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha(h_2, h_1)$ 。同理式(10)、(11)也满足定义3中的3个公理性条件。

**定理2** 给定  $\mu_1 = \mu_2 = 1, \alpha > 0$ 。1) 当概率犹豫模糊集为单元集时, 距离测度大小关系  $d_T^\alpha = d_E^\alpha > d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha$  恒成立; 2) 当概率犹豫模糊集为多元集时, 3个距离测度的大小无恒定关系。

**证明** 由式(5)、(8)、(12)可以计算。

(1) 取单元集  $h_1 = \{\gamma | 1\}$  和  $h_2 = \{\check{\gamma} | 1\}$ , 有

$$d_T^\alpha = \sum_{\lambda=1}^l |\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda|^\alpha, \quad d_E^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^l [|\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda|^\alpha + |\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda|^\alpha] = \sum_{\lambda=1}^l |\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda|^\alpha,$$

$$d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha = \frac{1}{3} \sum_{\lambda=1}^l [|\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda|^\alpha + |\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda|^\alpha] + |\varphi(h_1) - \varphi(h_2)|^\alpha = \frac{2}{3} |\gamma^\lambda - \check{\gamma}^\lambda|^\alpha,$$

则  $d_T^\alpha = d_E^\alpha > d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha$  恒成立。

(2) 取多元集  $h_1 = \{0.3 | 0.4, 0.7 | 0.6\}$  和  $h_1 = \{0.4 | 0.3, 0.6 | 0.7\}$ , 则

$$d_T^\alpha = |0.3 \times 0.4 - 0.4 \times 0.4| + |0.7 \times 0.6 - 0.6 \times 0.7| = 0,$$

$$d_E^\alpha = \frac{1}{2} (|0.3 \times 0.4 - 0.4 \times 0.4| + |0.3 - 0.4| \times 0.4 \times 0.3 + |0.7 \times 0.6 - 0.6 \times 0.7| + |0.7 - 0.6| \times 0.6 \times 0.7) = 0.027,$$

$$d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha = \frac{1}{3} (|0.3 \times 0.4 - 0.4 \times 0.4| + |0.3 - 0.4| \times 0.4 \times 0.3 + |0.7 \times 0.6 - 0.6 \times 0.7| + |0.7 - 0.6| \times 0.6 \times 0.7) + |0.204 \ 0 - 0.107 \ 7| = 0.050 \ 1,$$

则距离测度大小关系为  $d_T^\alpha < d_E^\alpha < d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha$ 。若再取多元集  $h_1 = \{0.3 | 0.2, 0.7 | 0.5, 0.8 | 0.3\}$ ,  $h_2 = \{0.4 | 0.3, 0.5 | 0.3,$

0.7|0.4} ,则  $d_T^\alpha=0.3$ ,  $d_E^\alpha=0.174$ ,  $d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha=0.1191$ ,即距离测度大小关系为  $d_T^\alpha>d_E^\alpha>d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha$ 。由上分析,得证。

定理 2 描述了基于  $\mu_1=\mu_2=1$  时距离测度的大小关系,此时对于概率犹豫模糊集为多元集,  $d_T^\alpha$ 、 $d_E^\alpha$ 、 $d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha$  大小关系具有不确定性。关于取定参数  $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\alpha$  值时,距离测度的大小关系还有很多情况值得深入探索。

注 5 式(12)中,记  $A=\sum_{\lambda=1}^l |\gamma^\lambda p^\lambda - \gamma^\lambda \bar{p}^\lambda|^\alpha$ ,  $B=\sum_{\lambda=1}^l |\gamma^\lambda - \gamma^\lambda|^\alpha p^\lambda \bar{p}^\lambda$ ,  $C=|\varphi_{h_1} - \varphi_{h_2}|^\alpha$ , 则  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三者之间无恒定大小关系。具体的大小关系有很多种情况,下面例举 3 种说明。取概率犹豫模糊元  $h_1=\{0.1|0.2,0.4|0.3,0.5|0.5\}$  和  $h_2=\{0.2|0.1,0.3|0.4,0.5|0.5\}$ ,  $\alpha>0$ , 计算可得  $C>B>A$ 。取概率犹豫模糊元  $h_1=\{0.3|0.3,0.5|0.3,0.6|0.4\}$  和  $h_2=\{0.25|0.15,0.45|0.4,0.8|0.45\}$ , 当  $\alpha=1$  时, 计算可得  $A>C>B$ ; 当  $\alpha=4$  时, 计算可得  $B>A>C$ 。

定理 3 已知 2 个概率犹豫模糊元  $h_1=\{\gamma^\lambda | p^\lambda, \lambda=1,2,\dots,l\}$  和  $h_2=\{\bar{\gamma}^\lambda | \bar{p}^\lambda, \lambda=1,2,\dots,l\}$ , 当给定  $\alpha(\alpha>0)$  时,有以下性质:

- (1) 取  $\mu_1=0, \mu_2<\mu'_2$ , 当  $A\geq B$  时,有  $d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha \geq d_{1,\mu_1,\mu'_2}^\alpha$ ; 当  $A<B$  时,有  $d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha < d_{1,\mu_1,\mu'_2}^\alpha$ 。
- (2) 取  $\mu_2=0, \mu_1<\mu'_1$ , 当  $A\geq C$  时,有  $d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha \geq d_{1,\mu'_1,\mu_2}^\alpha$ ; 当  $A<C$  时,有  $d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha < d_{1,\mu'_1,\mu_2}^\alpha$ 。

证明 由函数单调性易证。

下面通过一个具体的例子分析参数  $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\alpha$  对距离测度值的影响。

例 1 已知 2 个概率犹豫模元  $h_1=\{0.25|0.2,0.4|0.4,0.6|0.4\}$ ,  $h_2=\{0.3|0.15,0.4|0.45,0.7|0.4\}$ 。利用距离测度公式  $d_{1,\mu_1,\mu_2}^\alpha$  计算( $\mu_1=0, \mu_2=0, \alpha=2$ ), 3 种情况结果见图 1。

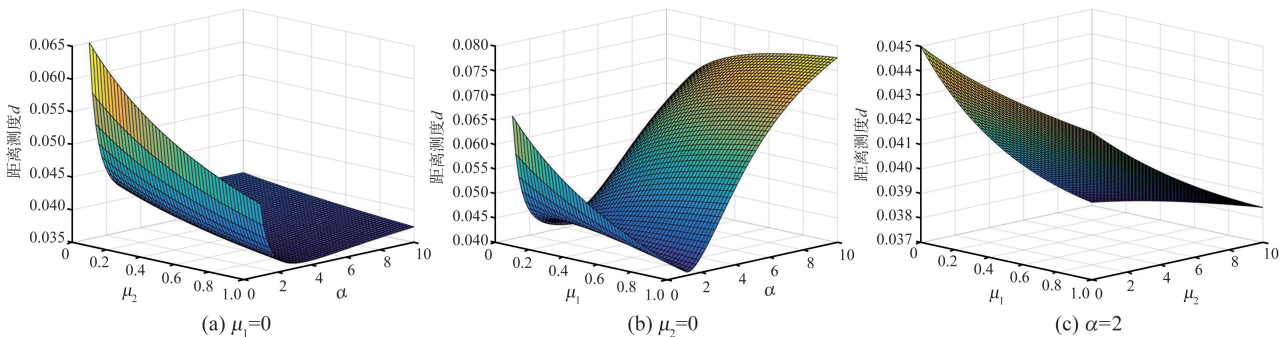


图 1 给定参数时距离测度三维图

Fig.1 The three-dimensional drawing of the distance measure given the parameter

特别地,图 1(a)中,  $\mu_1=0$ , 实际上是在传统的距离测度式(5)上融入犹豫度并添加参数  $\mu_2$ 。由图 1 可知距离测度在参数  $\alpha$ 、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$  的取值范围内不具备单调性,这是因为出现  $A$ 、 $B$ 、 $C$  大小不定的情况,恰好证明定理 3 中的性质。

本文提出融入犹豫度的概率犹豫模糊距离测度不仅保留传统概率犹豫模糊距离测度,还弥补传统距离测度的不足,更考虑到概率犹豫模糊集之间的犹豫差异,通过增加参数实现新的距离测度与先前距离测度之间的系统扩张与应用优化,不仅丰富概率犹豫模糊距离测度,也使概率犹豫模糊环境下决策信息更可靠,决策结果更有效。

### 3 基于改进距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策新方法

基于改进距离测度,下面将距离测度与基于 TOPSIS 结合建立概率犹豫模糊多属性群决策新方法。

#### 3.1 多属性群决策新方法

采用基于 TOPSIS 方法来进行多属性群决策。采用 TOPSIS 方法的优点是简单、合理、可理解,计算效率高,能够以简单的数学形式衡量各方案的相对性能。它的原理是通过检测对象与正理想解和负理想解之间的距离来评价方案的综合评价指数,从而通过排序选择最优。在 TOPSIS 方法中,假设对  $m$  个方案  $A=\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ,  $n$  个属性  $C=\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  进行决策,  $r_{ij}(i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$  表示在属性  $C_j$  下方案  $A_i$

的决策值,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  表示属性权重集。概率犹豫模糊距离测度的 TOPSIS 方法具体步骤如下。

**步骤 1** 建立决策矩阵  $R = (r_{ij})$ 。用  $r_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$  表示决策者在属性  $C_j$  下方案  $A_i$  给出的决策值。

**步骤 2** 确立正理想解、负理想解。假设  $V^+, V^-$  是正负理想解, 有

$$V^+ = \{V_1^+, V_2^+, \dots, V_q^+, \dots, V_n^+\}, \tag{13}$$

$$V^- = \{V_1^-, V_2^-, \dots, V_q^-, \dots, V_n^-\}. \tag{14}$$

其中  $V_q^+ = \{V_{iq}, \max(S(V_{iq})) \mid i = 1, 2, \dots, m, q = 1, 2, \dots, n\}$ ,  $V_q^- = \{V_{iq}, \min(S(V_{iq})) \mid i = 1, 2, \dots, m, q = 1, 2, \dots, n\}$ 。

**步骤 3** 计算每个方案与正负理想解之间的距离。以广义概率犹豫模糊欧氏距离(式(12))为例, 方案与正、负理想解之间的距离分别为

$$D_i^+(A_i, V^+) = \sum_{j=1}^n \omega_j d_{1, \mu_1, \mu_2}^\alpha(A_i, V^+), \tag{15}$$

$$D_i^-(A_i, V^-) = \sum_{j=1}^n \omega_j d_{1, \mu_1, \mu_2}^\alpha(A_i, V^-). \tag{16}$$

**步骤 4** 计算贴近度

$$\Omega_i = \frac{D_i^-(A_i, V^-)}{D_i^+(A_i, V^+) + D_i^-(A_i, V^-)}, \tag{17}$$

其中  $i = 1, 2, \dots, m$ 。

**步骤 5** 排序。贴近度值越大, 说明方案越好。

### 3.2 算例说明和参数分析

为了证明本文提出的概率犹豫模糊距离测度的有效性和实用性, 下面通过实际例子对上述算法进行说明。某新公司为开业选址, 现有 4 个方案可供选择, 分别用  $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$  表示。同时该公司选方案时有以下 4 个准则需要考虑:  $C_1$  是区位交通,  $C_2$  是办公环境,  $C_3$  是配套设施,  $C_4$  是政策环境。假设属性的权重  $\omega = \{0.1, 0.25, 0.3, 0.35\}$ 。下面给出改进的距离测度与 TOPSIS 方法结合的具体算法步骤。

**步骤 1** 建立决策矩阵。决策者以概率犹豫模糊元的形式给出决策值, 决策矩阵  $R = (r_{ij})$  如表 1 所示。

表 1 公司选址的概率犹豫模糊决策矩阵

Table 1 Probabilistic hesitant fuzzy decision matrix for company location selection

$A_i$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$A_1$	{0.3 0.4, 0.75 0.6}	{0.25 0.3, 0.55 0.7}	{0.5 0.4, 0.65 0.6}	{0.6 0.2, 0.85 0.8}
$A_2$	{0.45 0.5, 0.6 0.5}	{0.3 0.6, 0.4 0.4}	{0.45 0.2, 0.5 0.8}	{0.25 0.4, 0.45 0.6}
$A_3$	{0.5 0.2, 0.6 0.8}	{0.4 0.55, 0.6 0.45}	{0.6 0.5, 0.7 0.5}	{0.4 0.3, 0.6 0.7}
$A_4$	{0.4 0.6, 0.8 0.4}	{0.25 0.7, 0.5 0.3}	{0.7 0.7, 0.9 0.3}	{0.45 0.5, 0.7 0.5}

**步骤 2** 确定正理想解  $V^+ = \{V_1^+, V_2^+, V_3^+, V_4^+\}$  和负理想解  $V^- = \{V_1^-, V_2^-, V_3^-, V_4^-\}$ 。根据得分函数大小可得正理想解为  $V_1^+ = \{0.5|0.2, 0.6|0.8\}$ ,  $V_2^+ = \{0.4|0.55, 0.6|0.45\}$ ,  $V_3^+ = \{0.7|0.7, 0.9|0.3\}$ ,  $V_4^+ = \{0.6|0.2, 0.85|0.8\}$ ; 负理想解为  $V_1^- = \{0.45|0.5, 0.6|0.5\}$ ,  $V_2^- = \{0.25|0.7, 0.5|0.3\}$ ,  $V_3^- = \{0.45|0.2, 0.5|0.8\}$ ,  $V_4^- = \{0.25|0.4, 0.45|0.6\}$ 。

**步骤 3** 根据本文提出的概率犹豫模糊距离测度计算每个方案  $A_i$  与  $V^+, V^-$  之间的距离。以式(15)、(16)为例, 且取  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1$ , 得到每个方案  $A_i$  与  $V^+, V^-$  之间的距离如表 2 所示。

表 2 方案  $A_i$  与  $V^+, V^-$  之间的距离

Table 2 The distance between scheme  $A_i$  and  $V^+, V^-$

$\alpha$	$D_1^+$	$D_2^+$	$D_3^+$	$D_4^+$	$D_1^-$	$D_2^-$	$D_3^-$	$D_4^-$
1	0.099 8	0.193 4	0.091 2	0.100 5	0.153 6	0.011 0	0.108 4	0.128 1
2	0.103 7	0.224 2	0.106 4	0.122 6	0.183 0	0.014 0	0.121 6	0.140 0
4	0.125 4	0.265 7	0.138 4	0.140 4	0.212 3	0.017 0	0.138 1	0.163 7
5	0.117 9	0.270 2	0.126 6	0.136 5	0.220 0	0.017 8	0.142 8	0.172 1

**步骤 4** 计算贴近度。根据式(17)可计算每个方案的贴近度, 结果如表 3 所示。

表 3 贴近度值  $\Omega_i$  及排序结果  
Table 3 The closeness value  $\Omega_i$  and the sorting result

$\alpha$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	排序结果
1	0.606 0	0.053 5	0.543 2	0.560 3	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
2	0.638 2	0.058 7	0.533 3	0.554 3	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
4	0.628 7	0.060 0	0.499 5	0.538 3	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
5	0.651 1	0.062 7	0.530 1	0.557 7	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$

**步骤 5** 排序。根据计算结果,可得  $A_1$  是最优方案,并且在  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  情况下,不论  $\alpha$  取任何值,方案的排序结果都没有发生改变,说明此方法具有一定的稳定性。

分别取  $\alpha$  为 1、2、4、5 时,分析  $\mu_1, \mu_2$  对备选方案排序的影响,具体结果如表 4 所示。

表 4 参数对方案结果的影响值及排序结果  
Table 4 The influence value of parameters on scheme results and the ranking result

$\alpha$	$\mu_1, \mu_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	排序结果
1	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$	0.626 1	0.022 9	0.537 5	0.537 1	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$
	$\mu_1 = 0.8, \mu_2 = 0.2$	0.617 8	0.028 3	0.540 5	0.537 9	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$
	$\mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.6$	0.600 4	0.039 6	0.547 1	0.539 4	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$
	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$	0.580 4	0.008 2	0.545 9	0.544 4	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$
2	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$	0.649 7	0.031 1	0.529 4	0.544 3	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
	$\mu_1 = 0.8, \mu_2 = 0.2$	0.644 8	0.037 4	0.530 3	0.541 4	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
	$\mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.6$	0.634 2	0.048 8	0.532 2	0.534 5	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$	0.622 2	0.059 8	0.534 6	0.525 0	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$
4	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$	0.655 5	0.043 3	0.529 8	0.552 8	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
	$\mu_1 = 0.8, \mu_2 = 0.2$	0.938 8	0.087 1	0.643 3	0.604 6	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$
	$\mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.6$	0.646 0	0.056 0	0.528 4	0.539 0	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$	0.638 5	0.063 0	0.526 8	0.519 8	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$
5	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$	0.655 4	0.047 3	0.529 9	0.555 7	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
	$\mu_1 = 0.8, \mu_2 = 0.2$	0.652 7	0.051 1	0.529 4	0.552 3	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
	$\mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.6$	0.653 9	0.057 4	0.539 3	0.550 2	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$
	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$	0.639 7	0.063 2	0.525 9	0.519 8	$A_1 > A_3 > A_4 > A_2$

观察表 4 可知,参数  $\alpha, \mu_1, \mu_2$  对排序结果影响不大,无论 3 个参数取何值,最优和最劣方案都没有发生改变,说明改进的概率犹豫模糊距离测度具有稳定性。取定  $\alpha$  时,分析  $\mu_1, \mu_2$  对排序结果的影响。当  $\alpha = 1$ , 无论  $\mu_1, \mu_2$  为何值,最终排序结果都是  $A_1 > A_3 > A_4 > A_2$ ; 当  $\alpha = 2, 4, 5$  时,  $A_4$  与  $A_3$  的大小受参数  $\alpha, \mu_1, \mu_2$  的影响。再观察表格可知,当  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$  时,排序结果不受  $\alpha$  的影响,始终是  $A_1 > A_3 > A_4 > A_2$ 。

### 3.3 决策方法的比较分析

为了验证本文提出的融入犹豫度的距离测度的可行性和有效性,采用文献[15, 18]的例子进行比较分析,群决策矩阵如表 5 所示。根据前面提出的算法步骤,对 3 个参数分析所得的贴近度值结果及排序如表 6 所示。

表 5 概率犹豫模糊群决策矩阵<sup>[15, 18]</sup>  
Table 5 Probabilistic hesitant fuzzy group decision matrix

$x_i$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$x_1$	{0.55 0.15, 0.65 0.25, 0.76 0.1, 0.8 0.5}	{0.2 0.05, 0.3 0.325, 0.4 0.125, 0.65 0.25, 0.75 0.25}	{0.55 0.5, 0.75 0.25, 0.8 0.15, 0.94 0.1}
$x_2$	{0.4 0.25, 0.58 0.25, 0.69 0.25, 0.95 0.25}	{0.35 0.25, 0.6 0.075, 0.65 0.25, 0.7 0.35, 0.8 0.075}	{0.45 0.25, 0.55 0.125, 0.56 0.25, 0.66 0.125, 0.85 0.25}
$x_3$	{0.3 0.1, 0.5 0.35, 0.6 0.3, 0.68 0.25}	{0.45 0.25, 0.55 0.125, 0.56 0.25, 0.66 0.125, 0.85 0.25}	{0.45 0.25, 0.55 0.25, 0.68 0.25, 0.75 0.25}
$x_4$	{0.15 0.1, 0.37 0.15, 0.4 0.25, 0.6 0.25, 0.73 0.25}	{0.48 0.4, 0.55 0.25, 0.62 0.1, 0.66 0.25}	{0.38 0.25, 0.5 0.125, 0.7 0.125, 0.75 0.25, 0.85 0.25}

表6 贴近度值及排序结果  
Table 6 Proximity value and ranking result

$\alpha$	$\mu_1, \mu_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	排序结果
1	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$	0.760 1	0.354 3	0.457 1	0.320 6	$x_1 > x_3 > x_2 > x_4$
	$\mu_1 = 0.8, \mu_2 = 0.2$	0.755 9	0.353 2	0.462 9	0.328 2	$x_1 > x_3 > x_2 > x_4$
	$\mu_1 = 0.6, \mu_2 = 0.4$	0.778 0	0.323 8	0.457 8	0.339 6	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
	$\mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.6$	0.748 1	0.347 9	0.470 0	0.338 5	$x_1 > x_3 > x_2 > x_4$
	$\mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.8$	0.744 5	0.345 3	0.473 4	0.343 2	$x_1 > x_3 > x_2 > x_4$
	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$	0.741 0	0.342 8	0.476 7	0.347 6	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
2	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$	0.790 4	0.312 3	0.437 2	0.304 0	$x_1 > x_3 > x_2 > x_4$
	$\mu_1 = 0.8, \mu_2 = 0.2$	0.787 8	0.308 1	0.439 9	0.310 9	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
	$\mu_1 = 0.6, \mu_2 = 0.4$	0.785 2	0.303 7	0.442 5	0.316 9	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
	$\mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.6$	0.782 6	0.299 2	0.445 2	0.322 3	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
	$\mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.8$	0.780 2	0.294 4	0.440 7	0.327 2	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$	0.777 7	0.289 3	0.450 3	0.331 6	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
4	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$	0.817 9	0.322 3	0.432 4	0.295 0	$x_1 > x_3 > x_2 > x_4$
	$\mu_1 = 0.8, \mu_2 = 0.2$	0.803 0	0.315 0	0.431 3	0.303 0	$x_1 > x_3 > x_2 > x_4$
	$\mu_1 = 0.6, \mu_2 = 0.4$	0.804 7	0.306 5	0.430 1	0.308 3	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
	$\mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.6$	0.806 7	0.295 8	0.428 9	0.312 0	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
	$\mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.8$	0.808 7	0.281 2	0.427 5	0.314 2	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$	0.811 0	0.254 5	0.426 0	0.315 2	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
5	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$	0.657 4	0.421 9	0.651 1	0.391 3	$x_1 > x_3 > x_2 > x_4$
	$\mu_1 = 0.8, \mu_2 = 0.2$	0.798 4	0.330 5	0.434 0	0.309 0	$x_1 > x_3 > x_2 > x_4$
	$\mu_1 = 0.6, \mu_2 = 0.4$	0.677 7	0.405 6	0.648 0	0.413 0	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
	$\mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.6$	0.806 8	0.309 8	0.428 2	0.325 5	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
	$\mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.8$	0.812 4	0.246 0	0.383 2	0.263 4	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$	0.819 3	0.324 3	0.639 9	0.436 0	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$

观察表6可得最优方案 $x_1$ 不受参数的影响,但 $x_2, x_4$ 的大小会因为参数的变化而变化。在文献[15]中,各备选方案的排序结果最优方案为 $x_2$ ,最劣方案 $x_4$ ;在文献[18]中,各备选方案的排序结果最优方案为 $x_1$ ,最劣方案为 $x_4$ 。通过比较分析可得,在同样的数据下,与文献[15]相比较发现排序结果有所不同,与文献[18]相比较发现最优方案相同。这是因为本文的方法考虑到概率犹豫模糊集中元素犹豫程度的差异,使决策结果更有效可靠。

观察表6数据,特别地,当取定 $\alpha$ 且 $\mu_1 > \mu_2$ ,排序结果完全不受参数的影响,恒为 $x_1 > x_3 > x_2 > x_4$ ,与文献[18]的排序结果一致,决策方案排序结果稳定且理想。

对于参数的选取, $\mu_1, \mu_2$ 可以由修正项与融入项的相关语义与信息量需求来确定,比如通过专家评估与实际需求来确定。实际中,可以利用 $\mu_1, \mu_2$ 的分布来进行相关系统计算,从而可以提取优化数值或满意效果。同理,广义参数 $\alpha$ 可以由专家确定或需求设置,并且上述案例分析和比较结果表明,结果几乎没有参数的依赖性,即参数具有很好的鲁棒性。

### 4 结论

犹豫度在概率犹豫模糊集中是一项重要信息,在多属性群决策问题中考虑到决策者的犹豫度,能够更好地反映决策者的心理状态,从而减少决策过程带来的误差,因此,本文在方冰等<sup>[15]</sup>的概率犹豫模糊距离测度上融入犹豫度,定义融入犹豫度的概率犹豫模糊距离测度,改进后的概率犹豫模糊距离测度通过参数实现对传统距离和方冰等距离测度的理论扩张,有效解决先前距离测度的不足,丰富概率犹豫模糊集。随后将提出的距离测度与TOPSIS方法结合建立多属性群决策新方法,采用算例说明方法的实用性和可行性,并通过参数分析和决策比较来揭示该方法的稳定性和有效性。在后续研究中将继续关注其余未考虑犹豫度的概率犹豫模糊距离测度,促进概率犹豫模糊集的发展,使概率犹豫模糊多属性群决策问题更完善可靠,并深入研究

距离测度中参数的搜索和优化,还可考虑将改进后的距离测度应用于属性约简、模式识别等中。

#### 参考文献:

- [1] TORRA V. Hesitant fuzzy sets[J]. *International journal of intelligent systems*, 2010, 25(6):529-539.
- [2] XU Zeshui, WEI Zhou. Consensus building with a group of decision makers under the hesitant probabilistic fuzzy environment [J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2017, 16(4):481-503.
- [3] 华维灿,孙刚,王贵君. 基于概率犹豫模糊相似度的交互式群体决策方法[J]. *浙江大学学报(理学版)*, 2022, 49(4):398-407.  
HUA Weican, SUN Gang, WANG Guijun. An interactive group decision making method based on probabilistic hesitation fuzzy similarity[J]. *Journal of Zhejiang University(Science Edition)*, 2022, 49(4):398-407.
- [4] 武文颖,李应,金飞飞,等. 基于概率犹豫信息集成方法的群决策模型[J]. *模式识别与人工智能*, 2017, 30(10):894-906.  
WU Wenying, LI Ying, JIN Feifei, et al. Group decision making model based on probabilistic hesitant fuzzy information aggregation operations[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2017, 30(10):894-906.
- [5] 饶益,陈云翔,蔡忠义,等. 考虑专家偏好的基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法[J]. *火力与指挥控制*, 2021, 46(4):4-13.  
RAO Yi, CHEN Yunxiang, CAI Zongyi, et al. Method for multi-attribute decision making considering expert preference based on probabilistic hesitant fuzzy entropy[J]. *Fire Control & Command Control*, 2021, 46(4):4-13.
- [6] OHLAN A. Novel entropy and distance measures for interval-valued intuitionistic fuzzy sets with application in multi-criteria group decision-making[J]. *International Journal of General Systems*, 2022, 51(4):413-440.
- [7] MAHANTA J, PANDA S. Distance measure for Pythagorean fuzzy sets with varied applications[J]. *Neural Computing and Applications*, 2021, 33(24):17161-17171.
- [8] HAO Zhinan, XU Zeshui, ZHAO Hua, et al. The context-based distance measure for intuitionistic fuzzy set with application in marine energy transportation route decision making[J]. *Applied Soft Computing*, 2021, 101:107044.
- [9] 金贵,周礼刚,吴澎,等. 属性权重未知情形下的  $q$  阶 orthopair 犹豫模糊 TOPSIS 法[J]. *计算机工程与应用*, 2022, 58(6):256-263.  
JIN Gui, ZHOU Ligang, WU Peng, et al.  $q$ -Rung orthopair hesitant fuzzy TOPSIS method under unknown attribute weigh[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2022, 58(6):256-263.
- [10] 谭春桥,支帅. 基于直觉犹豫模糊集的 TOPSIS 法[J]. *运筹与管理*, 2018, 27(3):66-73.  
TAN Chunqiao, ZHI Shuai. TOPSIS method with intuitionistic hesitant fuzzy sets[J]. *Operations Research and Management Science*, 2018, 27(3):66-73.
- [11] 王志平,傅敏,王沛文. 概率犹豫模糊环境下基于前景理论和 TOPSIS 法的多属性群决策模型[J]. *科学技术与工程*, 2022, 22(4):1329-1337.  
WANG Zhiping, FU Min, WANG Peiwen. Multi-attribute group decision making model based on prospect theory and TOPSIS in probabilistic hesitant fuzzy environment[J]. *Science Technology and Engineering*, 2022, 22(4):1329-1337.
- [12] 梁薇,王应明. 考虑群体一致性的区间犹豫模糊 TOPSIS 决策方法[J]. *系统科学与数学*, 2020, 40(7):1146-1156.  
LIANG Wei, WANG Yingming. Interval-valued hesitant fuzzy TOPSIS decision making method with group consistency[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2020, 40(7):1146-1156.
- [13] 骆华. 基于改进距离的概率犹豫模糊多属性决策方法[J]. *武汉理工大学学报(信息与管理工程版)*, 2020, 42(3):239-245.  
LUO Hua. Probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute decision-making method based on improved distance [J]. *Journal of Wuhan University of Technology(Information and Management Engineering Edition)*, 2020, 42(3):239-245.
- [14] 曾维丹. 概率犹豫模糊集的距离测度及其应用研究[D]. 成都:西华大学, 2020.  
ZENG Weidan. The distance of the probability hesitant fuzzy set and its application[D]. Chengdu: Xihua University, 2020.
- [15] 方冰,韩冰,闻传花. 基于新型距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策方法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(3):729-736.  
FANG Bing, HAN Bing, WEN Chuanhua. Probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute group decision-making based on new distance measure[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(3):729-736.
- [16] SU Zhan, XU Zeshui, ZHAO Hua, et al. Entropy measures for probabilistic hesitant fuzzy information[J]. *IEEE Access*, 2019, 7:65714-65727.
- [17] SONG Chenyang, XU Zeshui, ZHAO Hua. New correlation coefficients between probabilistic hesitant fuzzy sets and their applications in cluster analysis[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2019, 21(2):355-368.
- [18] 刘玉敏,朱峰,靳琳琳. 基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法[J]. *控制与决策*, 2019, 34(4):861-870.  
LIU Yumin, ZHU Feng, JIN Linlin. Multi-attribute decision method based on probabilistic hesitant fuzzy entropy[J]. *Control and Decision*, 2019, 34(4):861-870.