山东大学学报(理学版)2024 年 2 月 第 59 卷 第 2 期
Journal of Shandong University (*Natural Science*), Vol.59, No.2, 2024

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2024)02-0120-07　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.487

局部交换子及其酉系统中的 r-重游荡算子

郑宇洁,刘爱芳*
(太原理工大学数学学院,山西 晋中 030600)

摘要:根据完全游荡向量的相关理论,引入酉系统中的 r-重完全游荡算子以及局部交换子的概念。并给出局部交换子的若干性质。同时,借助局部交换子得到酉系统的全体 r-重完全游荡算子的一个刻画及其他代数性质。最后,举例说明了主要结果。
关键词:r-重完全游荡算子;酉系统;局部交换子;g-标准正交基
中图分类号:O177.2　　**文献标志码**:A
引用格式:郑宇洁,刘爱芳.局部交换子及其酉系统中的 r-重游荡算子[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(2):120-126.

Local commutant and wandering r-tuple of operators for unitary systems

ZHENG Yujie, LIU Aifang*
(College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong 030600, Shanxi, China)

Abstract: According to the theory of completely wandering vector, the concepts of complete wandering operators with multiplicity r for unitary systems and local commutant are introduced. Then the properties of local commutant are given. Meanwhile, a characterization and other algebraic properties of the set of r-tuple complete wandering operators for unitary systems are obtained by means of the local commutators. Finally, some examples are given to illustrate the main results.
Key words: r-tuple complete wandering operator; unitary system; local commutant; g-orthonormal basis

1　引言和预备知识

框架的概念最早由 Schaeffer[1] 在 1952 年研究非调和傅立叶级数时引入。近几十年来,框架理论有了很大的发展,广泛应用于图像处理、信号处理及系统建模等诸多方面。随着一些新应用的出现,框架也有了很多推广形式,如:g-框架、K-框架、连续框架以及 p-框架等,其中的 g-框架由孙文昌[2] 提出。作为框架的一个重要推广,它涵盖了框架的很多推广,具体定义如下:设 H 和 K 是 Hilbert 空间,$\{H_j\}_{j\in J}$是 Hilbert 空间 K 的闭子空间列,对一列算子$\{\Xi_j\in B(H,H_j)\}_{j\in J}$,如果存在两个正常数 A 和 B,使得对于任意的$f\in H$,有

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{j\in J}\|\Xi_j f\|^2\leqslant B\|f\|^2,$$

式中 J 为有限或可数指标集,称$\{\Xi_j\}_{j\in J}$为 H 关于$\{H_j\}_{j\in J}$的 g-框架,A、B 分别称为 g-框架下界、框架上界。有关 g-框架的更多相关内容可参考其它相关文献[3-4]。此外,孙文昌[2] 也给出了 g-标准正交基的概念,即$\{\Xi_j\in B(H,H_j)\}_{j\in J}$为 g-标准正交基,如果满足以下两个条件:

$$\langle\Xi_j^*g_j,\Xi_k^*g_k\rangle=\delta_{jk}\langle g_j,g_k\rangle,\quad\forall g,k\in J,\quad\forall g_j\in H_j,\quad g_k\in H_k,\tag{1}$$

$$\sum_{j\in J}\|\Xi_j f\|^2=\|f\|^2,\quad\forall f\in H。\tag{2}$$

收稿日期:2022-09-16; **网络出版时间**:2023-09-28 17:03:42
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20230927.1613.002
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11801397)
第一作者简介:郑宇洁(1996—),女,硕士研究生,研究方向为算子理论. E-mail:2751702913@qq.com
* **通信作者简介**:刘爱芳(1985—),女,讲师,博士,研究方向为算子理论. E-mail:liuaifang@tyut.edu.cn

由 Najati 等[5]给出的结论知,$\{\Xi_j\in B(H,H_j):j\in J\}$ 是 g-标准正交基当且仅当$\{\Xi_j\in B(H,H_j):j\in J\}$ 是 g-框架并且式(1)成立。g-标准正交基可以看作标准正交基的推广,而标准正交基与酉系统中的完全游荡向量密切相关。受此启发,本文将研究酉系统中的多重完全游荡算子的相关性质。该算子可以看作是向量到算子的一种推广。此外,还将研究酉系统中局部交换子的相关性质并借助局部交换子给出酉系统中所有多重完全游荡算子构成的集合的一个参数化刻画。

文章用 H 和 K 表示复可分 Hilbert 空间,$B(H,K)$ 表示从 Hilbert 空间 H 到 Hilbert 空间 K 的全体有界线性算子构成的集合,$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别表示实数集和复数集。Dai 等[6]给出酉系统 U 是作用于 Hilbert 空间 H 上包含单位算子 I 的所有酉算子构成的集合。酉系统的 r-重完全游荡算子(r 表示算子分量个数)定义为:设 $T_i\in B(H,K)$, $i=1,2,\cdots,r$, U 是 H 上的酉系统,若 r 重算子 $T^{(r)}=(T_1,T_2,\cdots,T_r)$ 是余等距算子且满足 $T^{(r)}U^*=\{T_1A^*,T_2A^*,\cdots,T_rA^*:A\in U\}$ 是 H 关于 K 的 g-标准正交集,式中 U^* 为算子 U 的伴随算子,称 $T^{(r)}$ 是 U 的 r-重完全游荡算子。用 $W^{(r)}(U)$ 表示表示 U 的所有 r-重完全游荡算子构成的集合。

下面通过一个例子说明酉系统中 r-重完全游荡算子的概念。首先,回顾 r-重正交小波的定义。所谓 r-重正交小波是指一个 r-元单位向量 $\boldsymbol{\Phi}=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r)$,其中 $\phi_i\in L^2(\mathbf{R})$, $i=1,2,\cdots,r$,使得 $\{2^{\frac{n}{2}}\phi_i(2^nt-l):n,l\in\mathbf{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基,其中 $L^2(\mathbf{R})$ 为实数集 $\mathbf{R}$ 上的平方可积函数空间。正交小波及 r-重正交小波的知识可参考相关的文章[7-11]。

例 1　设 T 和 D 是 $H=L^2(\mathbf{R})$ 上的线性算子,定义

$$(Tf)(t)=f(t-1),\ (Df)(t)=\sqrt{2}f(2t),\quad \forall f\in L^2(\mathbf{R}),$$

则 T 和 D 为 $L^2(\mathbf{R})$ 上的酉算子,$U_{D,T}=\{D^nT^l:n,l\in\mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 上的酉系统。设 $\boldsymbol{\Phi}=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r)$,其中 $\phi_i\in L^2(\mathbf{R})$, $i=1,2,\cdots,r$, 且 $\|\boldsymbol{\Phi}\|=1$。记 $\Xi_{\phi_i}(f)=\langle f,\phi_i\rangle$, $\forall f\in L^2(\mathbf{R})$,那么 $\Xi_{\phi_i}^*(c)=c\cdot\phi_i$,从而 $\{\Xi_{\phi_1},\Xi_{\phi_2},\cdots,\Xi_{\phi_r}\}$ 是 $U_{D,T}$上的 r-重完全游荡算子,即 $\{\Xi_{\phi_i}(U_{D,T})^*:n,\ l\in\mathbf{Z},\ i=1,2,\cdots,r\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 关于 $\mathbf{C}$ 的 g-标准正交集当且仅当 $\boldsymbol{\Phi}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的 r-重正交小波。事实上,对任意的 $c_1,c_2\in\mathbf{C}$, $i=1,2,\cdots,r$,有

$$\begin{aligned}\langle D^nT^l\Xi_{\phi_i}^*c_1,D^{n'}T^{l'}\Xi_{\phi_i}^*c_2\rangle&=\langle D^nT^lc_1\phi_i,D^{n'}T^{l'}c_2\phi_i\rangle=c_1\overline{c_2}\langle D^nT^l\phi_i,D^{n'}T^{l'}\phi_i\rangle\\&=\langle D^nT^l\phi_i,D^{n'}T^{l'}\phi_i\rangle\cdot\langle c_1,c_2\rangle。\end{aligned}$$

对于任意的 $f\in L^2(\mathbf{R})$,有

$$\sum_{n,l\in\mathbf{Z}}\|\Xi_{\phi_i}(U_{D,T})^*f\|^2=\sum_{n,l\in\mathbf{Z}}\|\langle(U_{D,T})^*f,\phi_i\rangle\|^2=\sum_{n,l\in\mathbf{Z}}\|\langle f,U_{D,T}\phi_i\rangle\|^2,$$

因此 $\{\Xi_{\phi_i}(U_{D,T})^*:n,l\in\mathbf{Z},\ i=1,2,\cdots,r\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 关于 $\mathbf{C}$ 的 g-标准正交基当且仅当 $\boldsymbol{\Phi}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的 r-重正交小波。

2　局部交换子的性质

这节将介绍 r-重循环算子、r-重分离算子以及局部交换子的概念,并探讨局部交换子的若干性质。

定义 1　设 $S\subseteq B(H)$ 是一个算子集合,记 $T^{(r)}=(T_1,T_2,\cdots,T_r)$,其中 $T_i\in B(H,K)$, $i=1,2,\cdots,r$,如果 $\overline{\mathrm{span}}\{UT^{(r)}g:U\in S,\ g\in K\}=H$,即 $\overline{\mathrm{span}}\{UT_i^*g:U\in S,\ g\in K,\ T_i\in B(H,K),\ i=1,2,\cdots,r\}=H$,则称 $T^{(r)}$ 是 S 的 r-重循环算子。

注 1　ⅰ) Larson 等[10]曾给出,如果 $\{\Lambda_i\}_{i=1}^{\infty}\in B(H,K)$ 满足 $\overline{\mathrm{span}}\{\Lambda_i^*g:g\in K\}_{i=1}^{\infty}=H$,那么称 $\{\Lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 g-完备的。因此,由定义 1 易知 $T^{(r)}=(T_1,T_2,\cdots,T_r)$, $T_i\in B(H,K)$, $i=1,2,\cdots,r$,是 S 的 r-重循环算子当且仅当 $\{T_iA^*:A\in S,\ i=1,2,\cdots,r\}$ 是 g-完备的。

ⅱ) 由 g-框架、r-重完全游荡算子和 g-标准正交基的定义可以看出,若 $T^{(r)}$ 是酉系统 U 的 r-重完全游荡算子,则 $\{T_iA^*:A\in U,\ i=1,2,\cdots,r\}$ 是 g-框架。同时,$T^{(r)}$ 也是 U 的 r-重循环算子。

定义 2　设 $S\in B(H)$ 且 $T_i\in B(H,K)$, $i=1,2,\cdots,r$,如果 $\{A\in S:AT_i^*=0,\ i=1,2,\cdots,r\}=\{0\}$,那么称 $T^{(r)}=(T_1,T_2,\cdots,T_r)$ 是 S 关于 K 的 r-重分离算子。

定义 3　设 U 是 Hilbert 空间 H 上的酉系统,$T^{(r)}=(T_1,T_2,\cdots,T_r)$,其中 $T_i\in B(H,K)$, $i=1,2,\cdots,r$,在

$T^{(r)}$处的局部交换子 $C_{T^{(r)}}(U)$定义为

$$\{S\in B(H):(SA-AS)T_i^*=0,\ \forall A\in U,\ i=1,2,\cdots,r\}。$$

U'表示 U 的交换子,即 $U'=\{S\in B(H):SA=AS,\ A\in U\}$。

注 2 ⅰ) 如果$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq C_{T^{(r)}}(U)$,并且 A_n 强收敛于 A,那么$\forall x\in K,\ Q\in U$,有

$$(AQ-QA)T_i^*x=\lim_{n\to\infty}A_nQT_i^*x-\lim_{n\to\infty}QA_nT_i^*x=\lim_{n\to\infty}(A_nQ-QA_n)T_i^*x=0。$$

由此可得$(AQ-QA)T_i^*=0,\ i=1,2,\cdots,r$,即 $A\in C_{T^{(r)}}(U)$。这表明 $C_{T^{(r)}}(U)$在强算子拓扑下是闭的。

ⅱ) 如果$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq C_{T^{(r)}}(U)$,并且 A_n 弱收敛于 A,那么$\forall x\in K,\ y\in H,\ i=1,2,\cdots,r$,有$\langle A_nT_i^*x,y\rangle$收敛于$\langle AT_i^*x,y\rangle$。因此$\forall Q\in U$,有

$$\begin{aligned}\langle (AQ-QA)T_i^*x,y\rangle&=\langle AQT_i^*x,y\rangle-\langle QAT_i^*x,y\rangle\\&=\lim_{n\to\infty}\langle A_nQT_i^*x,y\rangle-\lim_{n\to\infty}\langle QA_nT_i^*x,y\rangle\\&=\lim_{n\to\infty}\langle (A_nQ-QA_n)T_i^*x,y\rangle\\&=0。\end{aligned}$$

由 x,y 的任意性得$(AQ-QA)T_i^*=0$,即 $A\in C_{T^{(r)}}(U)$,所以 $C_{T^{(r)}}(U)$在弱算子拓扑下也是闭的。

ⅲ) 设 $A_1,A_2\in C_{T^{(r)}}(U)$, $(A_1Q-QA_1)T_i^*=0$,其中 $Q\in U,\ i=1,2,\cdots,r$,有

$$[(A_1+A_2)Q-Q(A_1+A_2)]T_i^*=(A_1Q+A_2Q-QA_1-QA_2)T_i^*=(A_1Q-QA_1)T_i^*+(A_2Q-QA_2)T_i^*=0,$$

由此可知$(A_1+A_2)\in C_{T^{(r)}}(U)$,于是 $C_{T^{(r)}}(U)$是 $B(H)$的线性子空间。

下面给出局部交换子的一些性质。

命题 1 设 $S\in B(H)$, $T_i\in B(H,K)$, $i=1,2,\cdots,r$, $T^{(r)}=(T_1,T_2,\cdots,T_r)$是 S 的 r-重循环算子,则

1) $T^{(r)}$是 $C_{T^{(r)}}(S)$关于 K 的 r-重分离算子;

2) 如果 S 是一个半群,那么有 $C_{T^{(r)}}(S)=S'$;

3) 如果 $A\in C_{T^{(r)}}(S)$且有稠值域,那么 $T^{(r)}A^*$ 也是 S 关于 K 的 r-重循环算子;

4) 设 $T^{(r)}$是 S 关于 K 的 r-重分离算子,若 $S_1,S_2\in S$ 满足 $S_1S_2,S_2S_1\in S$, $S_1S_2\neq S_2S_1$,则 S_1 和 S_2 都不属于 $C_{T^{(r)}}(S)$;

5) 设 $S=S_1S_2$ 且 S_1 是一个半群,那么有 $C_{T^{(r)}}(S)\subseteq S'$;

6) 设 $S=S_1S_2$ 且 $I\in S_1\cap S_2$,那么有 $C_{T^{(r)}}(S)\subseteq C_{T^{(r)}}(S_1)\cap C_{T^{(r)}}(S_2)$,其中 I 为 H 上的单位算子;

7) 如果 $V\in C_{T^{(r)}}(S)$是可逆的,那么有 $C_{T^{(r)}V^*}(S)=C_{T^{(r)}}(S)\cdot V^{-1}$;

8) 对任意的 $Q\in S'$且 $A\in C_{T^{(r)}}(S)$,有 $QA\in C_{T^{(r)}}(S)$。

证明 1) 设 $A\in C_{T^{(r)}}(S)$且 $AT^{(r)*}=0$,那么对任意的 $U\in S$,有$(AU-UA)T_i^*=0$ 且 $AUT_i^*=UAT_i^*=0$, $i=1,2,\cdots,r$。由于 $T^{(r)}$是 S 关于 K 的 r-重循环算子,于是对任意的 $g\in K$, $\overline{\mathrm{span}}\{UT^{(r)*}g:U\in S,\ g\in K\}=H$。又对任意的 $g\in K,\ U\in S$,有 $AUT_i^*g=0$,所以对任意的$f\in H$, $Af=0$,进而 $A=0$。这说明 $T^{(r)}$是 $C_{T^{(r)}}(S)$关于 K 的 r-重分离算子。

2) 包含关系 $C_{T^{(r)}}(S)\supseteq S'$显然成立。下面仅需证明 $C_{T^{(r)}}(S)\subseteq S'$。令 $A\in C_{T^{(r)}}(S)$,由于 S 是一个半群,于是对任意的 $S_1,S_2\in S$ 有 $S_1S_2\in S$,从而可得 $AS_1S_2T_i^*=S_1S_2AT_i^*=S_1AS_2T_i^*$, $i=1,2,\cdots,r$。又因为 $\overline{\mathrm{span}}\{UT_i^*g:U\in S,\ g\in K,\ i=1,2,\cdots,r\}=H$,故 $AS_1=S_1A$,即 $A\subseteq S'$,因此 $C_{T^{(r)}}(S)=S'$。

3) 因为 $A\in C_{T^{(r)}}(S)$,所以对任意的 $U\in S,\ i=1,2,\cdots,r$,有 $UAT_i^*=AUT_i^*$。根据已知条件$\overline{\mathrm{span}}\{UT_i^*g:U\in S,\ g\in K,\ i=1,2,\cdots,r\}=H$ 且 A 有稠值域,可得

$$\overline{\mathrm{span}}\{UAT_i^*g:U\in S,\ g\in K,\ i=1,2,\cdots,r\}=\overline{\mathrm{span}}\{AUT_i^*g:U\in S,\ g\in K,\ i=1,2,\cdots,r\}=H,$$

因此 $T^{(r)}A^*$是 S 关于 K 的 r-重循环算子。

4) 假设$S_1\in C_{T^{(r)}}(S)$,由于 $S_1,S_2\in S$ 且 $S_1S_2,S_2S_1\in S$, $(S_1S_2-S_2S_1)T_i^*=0,\ i=1,2,\cdots,r$。又由命题 1 中 1)知,$T^{(r)}$是 $C_{T^{(r)}}(S)$关于 K 的 r-重分离算子,所以有 $S_1S_2=S_2S_1$,与条件 $S_1S_2\neq S_2S_1$ 矛盾,因此$S_1\notin C_{T^{(r)}}(S)$。同样地,$S_2\notin C_{T^{(r)}}(S)$。

5) 由已知条件可得 $S_1S=SS_1S_2\subseteq S_1S_2\subseteq S$。令 $A\in C_{T^{(r)}}(S)$且 $Q\in S_1$,那么对任意的 $U\in S$,有$(AU-$

$UA)T_i^*=0$,其中 $i=1,2,\cdots,r$。又 $QU\in S$,所以 $(AQU-QAU)T_i^*=0$, $i=1,2,\cdots,r$,于是有

$$AQUT_i^*-QAUT_i^*=AQUT_i^*-QUAT_i^*=0,\quad i=1,2,\cdots,r,$$

因此 $(AQ-QA)UT_i^*=0$。由条件 $T^{(r)}$ 是 S 的 r-重循环算子知 $\overline{\mathrm{span}}\{UT^{(r)*}g:U\in S,\ g\in K\}=H$,从而 $AQ=QA$,即 $A\in S_1'$,故 $C_{T^{(r)}}(S)\subseteq S'$。

6) 因为 $S=S_1S_2$ 且有 $I\in S_1\cap S_2$,所以 $S_1=S_1\cdot I\subseteq S_1S_2=S$ 且有 $S_2=S_2\cdot I\subseteq S_1S_2=S$,于是 $C_{T^{(r)}}(S)\subseteq C_{T^{(r)}}(S_1)$ 且 $C_{T^{(r)}}(S)\subseteq C_{T^{(r)}}(S_2)$,即 $C_{T^{(r)}}(S)\subseteq C_{T^{(r)}}(S_1)\cap C_{T^{(r)}}(S_2)$。

7) 因为 $V\in C_{T^{(r)}}(S)$ 是可逆的,即对任意的 $U\in S$, $(UV-VU)T_i^*=0$,所以有

$$\begin{aligned}C_{T^{(r)}V^*}(S)&=\{R\in B(H):(RU-UR)VT^{(r)*}=0,\ \forall U\in S\}\\&=\{R\in B(H):(RU-UR)VT_i^*=0,\ \forall U\in S,\ i=1,2,\cdots,r\}\\&=\{R\in B(H):(RUV-URV)T_i^*=0,\ \forall U\in S,\ i=1,2,\cdots,r\}\\&=\{R\in B(H):(RVU-URV)T_i^*=0,\ \forall U\in S,\ i=1,2,\cdots,r\}\\&=\{R\in B(H):RV\in C_{T^{(r)}}(S),\ \forall U\in S\}\\&=C_{T^{(r)}}(S)\cdot V^{-1}。\end{aligned}$$

8) 对任意的 $Q\in S'$, $A\in C_{T^{(r)}}(S)$,并且令 $P\in S$,则有 $QP=PQ$ 且 $PAT_i^*=APT_i^*$, $i=1,2,\cdots,r$。因此可得

$$(QA)PT_i^*=Q(AP)T_i^*=(QP)AT_i^*=P(QA)T_i^*,$$

于是 $QA\in C_{T^{(r)}}(S)$。

推论 1 设 $S\in B(H)$, $T_i\in B(H,K)$, $i=1,2,\cdots,r$, $T^{(r)}=(T_1,T_2,\cdots,T_r)$,$S$ 包含一个半群 S_0 且 $S_0'=S'$。若 $T^{(r)}$ 是 S_0 的 r-重循环算子,则有 $C_{T^{(r)}}(S)=C_{T^{(r)}}(S_0)=S'$。

证明 因为 $T^{(r)}$ 是 S_0 的 r-重循环算子,所以由命题 1 中(2)及 $S_0'=S'$ 可得 $C_{T^{(r)}}(S_0)=S_0'=S'$。又 $S_0\subseteq S$,易见 $C_{T^{(r)}}(S_0)\supseteq C_{T^{(r)}}(S)\supseteq S'$,因此有 $C_{T^{(r)}}(S)=C_{T^{(r)}}(S_0)=S'$ 成立。

3 局部交换子和 r-重完全游荡算子

本节主要研究酉系统中局部交换子的代数性质及其所有 r-重完全游荡算子构成的集合的结构刻画。

定理 1 设 S 是由 $B(H)$ 中的酉算子构成的酉半群,如果 $W^{(r)}(S)\neq\varnothing$,那么 S 是一个群。

证明 设 $T^{(r)}=(T_1,T_2,\cdots,T_r)\in W^{(r)}(S)$,其中 $T_i\in B(H,K)$,假设 S 不是一个群,令 $Q\in S$ 使得 $Q^{-1}\notin S$,则对任意的 $V\in S$,由 S 是一个酉半群可知 $QV\in S$ 且 $V\neq Q^{-1}$,于是对任意的 $g\in K$,由 $T^{(r)}\in W^{(r)}(S)$ 可得

$$\langle Q^{-1}T_i^*g,VT_i^*g\rangle=\langle T_i^*g,QVT_i^*g\rangle=0,\ i=1,2,\cdots,r。$$

这表明 $Q^{-1}T_i^*g$ 是与 $\overline{\mathrm{span}}\{VT_i^*g:V\in S,\ g\in K,\ i=1,2,\cdots,r\}=H$ 正交的非零元,得出矛盾,因此 S 是一个群。

设 $C_1(H)$ 是由全体迹类算子构成的集合,$\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示迹类算子的迹。设 $B\in B(H)$, $A\in C_1(H)$ 按照 $(A,B)=\mathrm{tr}(AB)$,有 $B(H)=C_1(H)^*$,其中 $C_1(H)^*$ 为 $C_1(H)$ 的对偶空间。令 Ψ 是 $B(H)$ 的一个子空间,如果 $\Psi=\{A\in B(H):Ax\in\overline{\mathrm{span}}\{\Psi x,x\in H\}\}$,那么称 Ψ 是自反的。若 n 次扩张 $\Psi^{(n)}=\{A^{(n)}:A\in W\}$ 是 $B(H^{(n)})$ 的自反子空间,则称 $\Psi^{(n)}$ 是 n-自反的。同时有如下结论:$B(H)$ 的一个弱闭子空间是 n-自反的当且仅当 $C_1(H)$ 中的预零化子 $\Psi_\perp$ 是秩至多为 n 的算子按迹类范数 $\|\cdot\|_1$ 的闭线性张[12]。

定理 2 设 $S\in B(H)$, $T_i\in B(H)$, $i=1,2,\cdots,r$ 且 $T^{(r)}=(T_1,T_2,\cdots,T_r)$,则有

$$(C_{T^{(r)}}(S))_\perp=\overline{\mathrm{span}}^{\|\cdot\|_1}\{[U,T_i^*x\otimes y]:U\in S,\ x,y\in H\},$$

式中 $[U,T_i^*x\otimes y]=UT_i^*x\otimes y-T_i^*x\otimes U^*y$。进而,$C_{T^{(r)}}(S)$ 是 2-自反的。

证明 对任意的 $A\in B(H)$,有

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A[U,T_i^*x\otimes y])&=\mathrm{tr}(A(UT_i^*x\otimes y-T_i^*x\otimes U^*y))\\&=\mathrm{tr}(AUT_i^*x\otimes y)-\mathrm{tr}(AT_i^*x\otimes U^*y)\\&=\langle AUT_i^*x,y\rangle-\langle AT_i^*x,U^*y\rangle\\&=\langle AUT_i^*x,y\rangle-\langle UAT_i^*x,y\rangle\\&=\langle(AU-UA)T_i^*x,y\rangle。\end{aligned}$$

由此可见 $A\in C_{T^{(r)}}(S)$ 当且仅当 A 可被所有形式为 $[U,T_i^*x\otimes y]$ 的迹类算子零化,其中 $x,y\in H$, $U\in S$。因此有 $(C_{T^{(r)}}(S))_{\perp}=\overline{\mathrm{span}}^{\|\cdot\|_1}\{[U,T_i^*x\otimes y]:U\in S,\ x,y\in H\}$。

下面给出酉系统中 r-重完全游荡算子的一个刻画。

定理 3　设 U 是 $B(H)$ 中的酉系统,$T^{(r)}=(T_1,T_2,\cdots,T_r)\in W^{(r)}(U)$,其中 $T_i\in B(H)$, $i=1,2,\cdots,r$,则有

$$W^{(r)}(U)=\{T^{(r)}V^*:V\in\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))\},$$

式中 $\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$ 为 $C_{T^{(r)}}(U)$ 中全体酉算子构成的集合。此外,映射

$$\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))\to W^{(r)}(U)$$
$$V\to T^{(r)}V^*$$

是单射。

证明　令 $V\in\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$, $Q^{(r)}=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_r)$ 且 $Q^{(r)}=T^{(r)}V^*$,即 $Q_i=T_iV^*$, $i=1,2,\cdots,r$。对任意的 $S\in U$,有 $Q_iS^*=T_iV^*S^*$, $i=1,2,\cdots,r$。由 $V\in\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$ 可得 $SQ_i^*=SVT_i^*=VST_i^*$,即 $Q_iS^*=T_iS^*V^*$, $\forall S\in U$, $i=1,2,\cdots,r$。因为 $T^{(r)}\in W^{(r)}(U)$,根据 r-重完全游荡算子的定义可知 $\{T_iS^*:S\in U,\ i=1,2,\cdots,r\}$ 是 H 的 g-标准正交集。又 V 是酉算子,所以 $\{Q_iS^*:S\in U,\ i=1,2,\cdots,r\}$ 也是 H 的 g-标准正交集,因此 $T^{(r)}V^*\in W^{(r)}(U)$。

反之,对任意的 $Q^{(r)}=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_r)\in W^{(r)}(U)$,因为 $\{T_iS^*:S\in U,\ i=1,2,\cdots,r\}$ 和 $\{Q_iS^*:S\in U,\ i=1,2,\cdots,r\}$ 都是 H 的 g-标准正交集,所以由 Larson[13] 所给的推论 4.5 可知,存在唯一的酉算子 $V\in B(H)$,使得对任意的 $S\in U$ 满足 $Q_iS^*=T_iS^*V^*$。特别地,令 $S=I$,其中 I 是单位算子,则有 $Q_i=T_iV^*$。于是对任意的 $S\in U$,有 $T_iS^*V^*=T_iV^*S^*$。从而可得 $SVT_i^*=VST_i^*$, $\forall S\in U$,这说明 $V\in\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$。由命题 1 之 1) 知,$T^{(r)}$ 是 $C_{T^{(r)}}(U)$ 的 r-重分离算子,故容易得出映射 $V\to T^{(r)}V^*$ 是单射。

定理 4　设 U 是 $B(H)$ 中的酉系统,$T^{(r)}=(T_1,T_2,\cdots,T_r)$ 和 $P^{(r)}=(P_1,P_2,\cdots,P_r)$,其中 $T_i,P_i\in B(H,K)$, $i=1,2,\cdots,r$,都为 U 的 r-重循环算子,则对任意的 $U_1,U_2\in U$, $g\in K$,

$$\langle U_1T^{(r)*}g,U_2T^{(r)*}g\rangle=\langle U_1P^{(r)*}g,U_2P^{(r)*}g\rangle$$

当且仅当存在酉算子 $V\in\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$,使得 $T^{(r)*}=VP^{(r)*}$。

证明　令 $U_1,U_2,\cdots,U_l\in U$ 且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l\in\mathbf{C}$,若对任意的 $U_1,U_2\in U$, $g\in K$,有 $\langle U_1T^{(r)*}g,U_2T^{(r)*}g\rangle=\langle U_1P^{(r)*}g,U_2P^{(r)*}g\rangle$,则可得

$$\begin{aligned}\Big\langle\sum_{m=1}^{l}\lambda_mU_mT^{(r)*}g,\ \sum_{n=1}^{l}\lambda_nU_nT^{(r)*}g\Big\rangle&=\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{l}\overline{\lambda_n}\lambda_m\langle U_n^*U_mT^{(r)*}g,T^{(r)*}g\rangle\\&=\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{l}\overline{\lambda_n}\lambda_m\langle U_n^*U_mP^{(r)*}g,P^{(r)*}g\rangle=\Big\langle\sum_{m=1}^{l}\lambda_mU_mP^{(r)*}g,\ \sum_{n=1}^{l}\lambda_nU_nP^{(r)*}g\Big\rangle。\end{aligned}$$

因此,映射 $V:\overline{\mathrm{span}}\{UT^{(r)*}g:g\in K\}\to\overline{\mathrm{span}}\{UP^{(r)*}g:g\in K\}$, $V(\sum_{m=1}^{l}\lambda_mU_mT^{(r)*}g)=\sum_{m=1}^{l}\lambda_mU_mP^{(r)*}g$ 是等距的。由于 $\overline{\mathrm{span}}\{UT^{(r)*}g:g\in K\}=\overline{\mathrm{span}}\{UP^{(r)*}g:g\in K\}=H$,所以 V 可以扩展为 H 上的酉算子。又对任意的 $g\in K$, $S\in U$,有 $VST^{(r)*}g=SP^{(r)*}g$。令 $S=I$ 可得 $VT^{(r)*}g=P^{(r)*}g$,因此 $VT^{(r)*}=P^{(r)*}$。从而对任意的 $g\in K$, $S\in U$,有 $VST^{(r)*}g=SP^{(r)*}g=SVT^{(r)*}g$,进而 $VST^{(r)*}=SVT^{(r)*}$, $\forall S\in U$,即 $V\in\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$。

反之,如果存在酉算子 $V\in\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$ 使得 $T^{(r)*}=VP^{(r)*}$,那么对任意的 $g\in K$, $U_1,U_2\in U$ 有

$$\begin{aligned}\langle U_1P^{(r)*}g,U_2P^{(r)*}g\rangle&=\langle U_1VT^{(r)*}g,U_2VT^{(r)*}g\rangle\\&=\langle VU_1T^{(r)*}g,VU_2T^{(r)*}g\rangle=\langle U_1T^{(r)*}g,U_2T^{(r)*}g\rangle。\end{aligned}$$

综上可知,结论成立。

注 3　对于酉系统 U,可以描述所有 r-重循环算子之间的等价关系。令 $T^{(r)}$、$P^{(r)}$ 是 U 的 r-重循环算子,如果存在一个酉算子 $V\in C_{T^{(r)}}(U)$ 使得 $P^{(r)*}=VT^{(r)*}$,则称 $T^{(r)}$ 与 $P^{(r)}$ 是酉等价的。在此酉等价定义的意义下,由定理 3 和 4 可以看出 U 的所有 r-重完全游荡算子 $W^{(r)}(U)$ 构成一个等价类。

在某些情况下,可以用已知小波的线性组合来构造新的小波。类似地,下面给出与由酉系统中 r-重完全

游荡算子构成集合的拓扑连通性有关的结果。

命题 2　设 U 是 H 上的酉系统,$T^{(r)}, P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$, $V \in C_{T^{(r)}}(U)$ 是酉算子且满足 $P^{(r)} = T^{(r)}V^*$。若 $V^2 = I$,I 是单位算子,则对于所有的 $m,n \in \mathbf{C}$, $|m|^2+|n|^2=1$,且 $\overline{m}\cdot n \in \mathbf{R}$,有

$$m\cdot T^{(r)}+\mathrm{i}\cdot n\cdot P^{(r)} \in W^{(r)}(U)。$$

特别地,$\cos\alpha\cdot T^{(r)}+\mathrm{i}\cdot\sin\alpha\cdot P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$, $\forall \alpha \in [0,2\pi]$。

证明　由 $P^{(r)} = T^{(r)}V^*$ 可得 $m\cdot T^{(r)}+\mathrm{i}\cdot n\cdot P^{(r)} = m\cdot T^{(r)}+\mathrm{i}\cdot n\cdot T^{(r)}V^* = T^{(r)}\cdot(m\cdot I+\mathrm{i}\cdot n\cdot V^*)$。又 $V \in C_{T^{(r)}}(U)$, $m,n \in \mathbf{C}$,所以有$(m\cdot I+\mathrm{i}\cdot n\cdot V^*) \in C_{T^{(r)}}(U)$。根据定理 3,下面仅需证明$(m\cdot I+\mathrm{i}\cdot n\cdot V^*)$是酉算子。因为 V 是酉算子,$V=V^*$ 且 $V^2=I$,因此有

$$\begin{aligned}
&(m\cdot I+\mathrm{i}\cdot n\cdot V^*)(m\cdot I+\mathrm{i}\cdot n\cdot V^*)^* \\
&=(m\cdot I+\mathrm{i}\cdot n\cdot V^*)^*(m\cdot I+\mathrm{i}\cdot n\cdot V^*) \\
&=(\overline{m}\cdot I-\mathrm{i}\cdot\overline{n}\cdot V^*)(m\cdot I+\mathrm{i}\cdot n\cdot V^*) \\
&=|m|^2\cdot I+\mathrm{i}\cdot\overline{m}\cdot n\cdot V^*-\mathrm{i}\cdot\overline{n}\cdot m\cdot V^*+|n|^2\cdot I \\
&=(|m|^2+|n|^2)\cdot I=I。
\end{aligned}$$

这说明$(m\cdot I+\mathrm{i}\cdot n\cdot V^*)$是酉算子,进而结论成立。

下面给出局部交换子的交换性质。

命题 3　设 U 是酉系统,若对某个 $T^{(r)} \in W^{(r)}(U)$, $C_{T^{(r)}}(U)$ 是可交换的,则对所有的 $P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$, $C_{P^{(r)}}(U)$ 是可交换的。

证明　由定理 3 可知,对任意的 $P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$,那么存在酉算子 $V \in \mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$ 使得 $T^{(r)*} = VP^{(r)*}$。结合命题 1 之 7)可得 $C_{T^{(r)}}(U) = C_{P^{(r)}}(U)\cdot V^{-1} = C_{P^{(r)}}(U)\cdot V^*$。又 $I \in C_{P^{(r)}}(U)$,故有 $V^* \in C_{T^{(r)}}(U)$。根据已知条件 $C_{T^{(r)}}(U)$ 是可交换的,可知 $V^* \in C_{T^{(r)}}(U) \subseteq (C_{T^{(r)}}(U))'$。又 V 是酉算子,因此 $V \in C_{T^{(r)}}(U)$,即证 $C_{P^{(r)}}(U) = C_{T^{(r)}}(U)\cdot V$ 是可交换的。

下面定理 5 给出局部交换子的一些代数性质。

定理 5　设 U 是酉系统,如果 $W^{(r)}(U)$ 是 g-完备的,即 $\overline{\mathrm{span}}\{T^{(r)*}g : T^{(r)} \in W^{(r)}(U),\ g \in K\} = H$,那么

1) 若对某个 $T^{(r)} \in W^{(r)}(U)$,$C_{T^{(r)}}(U)$ 是一个代数,则对所有的 $P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$, $C_{P^{(r)}}(U) = U'$。特别地,对每个 $P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$, $C_{P^{(r)}}(U)$ 是一个代数。

2) 若对某个 $T^{(r)} \in W^{(r)}(U)$, $\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$ 是一个半群,则对所有的 $P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$,有 $\mathfrak{U}(C_{P^{(r)}}(U)) = \mathfrak{U}(U')$。特别地,对任意的 $P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$, $\mathfrak{U}(C_{P^{(r)}}(U))$ 是一个半群。

证明　对任意的 $P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$,由定理 3 知,存在唯一的 $V \in \mathfrak{U}(C_{P^{(r)}}(U))$ 满足 $T^{(r)*} = VP^{(r)*}$。进而由命题 1 之 7)可得 $C_{T^{(r)}}(U) = C_{P^{(r)}V^*}(U) = C_{P^{(r)}}(U)\cdot V^{-1} = C_{P^{(r)}}(U)\cdot V^*$,显然有 $V^* \in C_{T^{(r)}}(U)$。

对于 1):若 $C_{T^{(r)}}(U)$ 对乘法封闭,则有 $C_{T^{(r)}}(U)\cdot V^* \in C_{T^{(r)}}(U)$,从而可得

$$C_{T^{(r)}}(U) = C_{T^{(r)}}(U)V^*\cdot V \subseteq C_{T^{(r)}}(U)\cdot V = C_{P^{(r)}}(U)\cdot V^*V = C_{P^{(r)}}(U)。$$

如果 $A \in C_{T^{(r)}}(U)$,那么对任意的 $B \in U$, $P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$,有$(AB-BA)P^{(r)*}=0$。又 $W^{(r)}(U)$ 是 g-完备的,故有 $AB=BA$,即 $A \in U'$,从而 $C_{T^{(r)}}(U)'$。反包含关系显然成立,因此 $C_{T^{(r)}}(U) = U'$。令 $P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$ 是任意的,$W \in C_{T^{(r)}}(U) = U'$ 是酉算子使得 $P^{(r)*} = WT^{(r)*}$,则有 $C_{P^{(r)}}(U) = C_{T^{(r)}}(U)\cdot W^{-1} = C_{T^{(r)}}(U)\cdot W^* = U'$。

对于 2):如果 $\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$ 是一个半群,$\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))\cdot V^* \subseteq \mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$ 显然成立。$\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U)) = (C_{P^{(r)}}(U))\cdot V^*$,所以有

$$\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U)) = \mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))V^*\cdot V \subseteq \mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))\cdot V = \mathfrak{U}(C_{P^{(r)}}(U))。$$

设 $B \in \mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))$,则 $B \in \mathfrak{U}(C_{P^{(r)}}(U))$,从而对任意的 $P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$ 及 $S \in U$,有$(BS-SB)P^{(r)*}=0$。因为$\overline{\mathrm{span}}\{T^{(r)*}g : T^{(r)} \in W^{(r)}(U),\ g \in K\} = H$,所以 $BS=SB$,即 $B \in U'$,从而 $\mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U)) = \mathfrak{U}(U')$。设 $P^{(r)} \in W^{(r)}(U)$,酉算子 $W \in \mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U)) = \mathfrak{U}(U')$ 使得 $P^{(r)*} = WT^{(r)*}$,则 $C_{P^{(r)}}(U) = C_{T^{(r)}}(U)\cdot W^*$。因此有

$$\mathfrak{U}(C_{P^{(r)}}(U)) = \mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))W^*\cdot W \subseteq \mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U))\cdot W = \mathfrak{U}(C_{T^{(r)}}(U)),$$

进而 $\mathfrak{U}(C_{P^{(r)}}(U))=\mathfrak{U}(U')$。

例 2 设 $H=L^2(\mathbf{R})$, $U=U_{D,T}=\{D^nT^l:n,l\in\mathbf{Z}\}$, $\Psi^{(r)}=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_r)$是 $L^2(\mathbf{R})$上的 r-重正交小波,且 $\|\Psi^{(r)}\|^2=1$。令 $\Lambda_{\psi_i}(f)=\langle f,\psi_i\rangle$, $f\in L^2(\mathbf{R})$, $i=1,2,\cdots,r$,容易推出 $\Lambda_{\Psi^{(r)}}=(\Lambda_{\psi_1},\Lambda_{\psi_2},\cdots,\Lambda_{\psi_r})$是 $U_{D,T}$上的 r-重完全游荡算子,即$\{\Lambda_{\Psi^{(r)}}(D^nT^l)^*: n,l\in\mathbf{Z}\}$是 $L^2(\mathbf{R})$的 g-标准正交集,所以$\Lambda_{\Psi^{(r)}}\in W^{(r)}(U)$。由命题1和定理3可得

1) $W^{(r)}(U)=\Lambda_{\Psi^{(r)}}(\mathfrak{U}(C_{\Lambda_{\Psi^{(r)}}}(U)))^*$且映射:

$$\Lambda_{\Psi^{(r)}}(\mathfrak{U}(C_{\Lambda_{\Psi^{(r)}}}(U)))^*\to W^{(r)}(U),\quad \Lambda_{\Psi^{(r)}}\to\Lambda_{\Psi^{(r)}}U^*,$$

是单射;

2) $T,D\notin C_{\Lambda_{\Psi^{(r)}}}(U)$;

3) $C_{\Lambda_{\Psi^{(r)}}}(U)\subseteq\{D\}'$;

4) 如果$\Lambda_{\Phi^{(r)}}\in W^{(r)}(U)$,令 $V\in\mathfrak{U}(C_{\Lambda_{\Psi^{(r)}}}(U))$,使得 $\Lambda_{\Phi^{(r)}}\to\Lambda_{\Psi^{(r)}}V^*$,那么有 $C_{\Lambda_{\Phi^{(r)}}}(U)=C_{\Lambda_{\Psi^{(r)}}}(U)\cdot V^*$。

参考文献:

[1] SCHAEFFER R. A class of nonharmonic fourier series[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1952, 72(2): 341-366.

[2] SUN Wenchang. *g*-frames and *g*-Riesz bases[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 322(1):437-452.

[3] WANG Yanjin, ZHU Yucan. *g*-frames and *g*-frame sequences in Hilbert spaces[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2009, 25(12):2093-2106.

[4] ZHU Yucan. Characterizations of *g*-frames and *g*-Riesz bases in Hilbert spaces[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2008, 24(10):1727-1736.

[5] NAJATI A, FAROUGHI M H, RAHIMI A. *g*-frames and stability of *g*-frames in Hilbert spaces[J]. Methods of Functional Analysis and Topology, 2008, 14(3):271-286.

[6] DAI X D, LARSON D R. Wandering vectors for unitary systems and orthogonal wavelets[J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 1998, 134(640):1-68.

[7] CHUI C. An introduction to wavelets[M]. New York: Academic Press, 1992: 6-24.

[8] DAUBECHIES I. Ten lectures on wavelets[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992: 107-214.

[9] GOODMAN T N T, LEE S L, TANG W S. Wavelet bases for a set of commuting unitary operators[J]. Advances in Computational Mathematics, 1993, 1(1):109-126.

[10] LARSON D R, TANG W S, WEBER E. Multiwavelets associated with countable groups of unitary operators in Hilbert spaces [J]. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2003, 6(2):123-144.

[11] STRELA V. Multiwavelets: theory and applications[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1996.

[12] JON K, LARSON D R. Reflexivity and distance formulae[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1986, 53(2):340-356.

[13] LARSON D R. Annihilators of operators algebra[M]. Basel: Birhauser Verlag, 1982:119-130.

(编辑:甄鹏)