

正合范畴上的稳定函数和挠理论

辛政, 王顶国, 赵体伟*

(曲阜师范大学数学科学学院, 山东 曲阜 273165)

摘要: 主要研究正合范畴上的稳定函数, 以及用稳定函数构造挠类和挠自由类, 进而得到一类挠对。

关键词: 正合范畴; 稳定函数; 挠对

中图分类号: O154.2 **文献标志码:** A

引用格式: 辛政, 王顶国, 赵体伟. 正合范畴上的稳定函数和挠理论[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(2): 105-109.

Stability function and torsion theory on exact categories

XIN Zheng, WANG Dingguo, ZHAO Tiwei*

(School of Mathematical Sciences, Jining Normal University, Qufu 273165, Shandong, China)

Abstract: Stability function on exact categories is studied, and torsion classes and torsion-free classes are constructed by using the stability functions. Then, a class of torsion pairs is obtained.

Key words: exact category; stability function; torsion pair

0 引言

稳定性条件的概念是 Mumford^[1]提出, 为了研究群作用下的模空间。这一工具在数学的众多不同分支均有重要的应用, 例如: 在箭图的表示理论中, Schofield^[2]和 King^[3]进行了开创性的研究; Rudakov^[4]将稳定性条件的概念推广到 Abel 范畴中; 更多性质见文献[5]。

正合范畴是对 Abel 范畴的一种推广, 本文在正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 上定义了满足跷跷板(see-saw)性质的稳定函数 $\phi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{P}$, 且对于每一个 $X \in \mathcal{A}^*$, 在全序集 \mathcal{P} 中都有一个 X 的相位 $\phi(X)$, 其中 \mathcal{A}^* 指的是 \mathcal{A} 中的所有不同构于零对象的对象组成的类。

稳定函数最重要的特点就是可以构造一个可区分的对象子类: 令 $M \in \mathcal{A}^*$, 如果对于每一个非平凡容许子对象 $L \subseteq M$ 满足 $\phi(L) < \phi(M)$ (或者 $\phi(L) \leq \phi(M)$), 则称 M 为 ϕ -稳定对象(或者 ϕ -半稳定对象)。在某种意义上, 稳定对象类似于不可约对象, 本文推广了舒尔引理的结果。

Dickson^[6]首次提出 Abel 范畴中挠对的概念, 推广了有限 Abel 群的性质。受到文献[7]的启发, 本文在正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 上引入了挠对的概念, 并且对于每一个相位 p 构造了一个挠对 $(\mathcal{T}_p, \mathcal{F}_p)$, 其中

$$\mathcal{T}_p = \{M \in \mathcal{A}^* \mid \text{对 } M \text{ 的极大不稳定容许商对象 } M', \phi(M') \geq p\},$$

$$\mathcal{F}_p = \{M \in \mathcal{A}^* \mid \text{对 } M \text{ 的极大不稳定容许子对象 } L', \phi(L') < p\}.$$

1 稳定函数与稳定对象

加法范畴 \mathcal{A} 中的一个核-余核 (i, p) 是指一个态射序列 $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$, 且 i 是 p 的核, p 是 i 的余核. 令 \mathcal{E} 是由 \mathcal{A} 中的一些核-余核构成的类, 一个态射 i 被称为容许单态射, 如果存在一个态射 p 使得 $(i, p) \in \mathcal{E}$, 容许满态射可以被对偶地定义. 用 \rightarrow 和 \twoheadrightarrow 分别表示容许单态射和容许满态射. 在一个容许单态射 $A \rightarrow B$ 中, A 被称为 B 的容许子对象, 容许商对象可以被对偶地定义. 记 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(X, Y)$ 为从 X 到 Y 的容许态射集, $\forall X, Y \in \mathcal{A}$.

正合范畴是由 Quillen^[8] 提出, 相关概念和性质详见文献[9]. 本文总是考虑本质小的正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$.

定义 1 设 (\mathcal{P}, \leq) 为一个全序集, 设 $\phi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{P}$ 是一个函数, 若对任意短正合列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$, 都满足跷跷板性质, 其中 $L, M, N \in \mathcal{A}^*$, 即满足下列条件之一:

- (1) $\phi(L) < \phi(M) < \phi(N)$,
- (2) $\phi(L) = \phi(M) = \phi(N)$,
- (3) $\phi(L) > \phi(M) > \phi(N)$,

则称 $\phi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{P}$ 为稳定函数. 此时, 对任意的 $X \in \mathcal{A}^*$, 称 $\phi(X)$ 为 X 的相位.

注 1 稳定函数在非零对象上定义的原因是 \mathcal{A} 中的零对象在 ϕ 下的像不是良定的. 事实上, 选取 2 个非零对象 M 和 N 使得 $\phi(M) \neq \phi(N)$, 构造 2 个短正合列 $0 \rightarrow 0 \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 0, 0 \rightarrow 0 \rightarrow N \rightarrow N \rightarrow 0$, 由跷跷板性质可得 $\phi(M) = \phi(0) = \phi(N)$, 矛盾.

命题 1 设 $\phi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{P}$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 上的稳定函数, 给定 2 个非零对象 M 和 D , 假设 M 有一个容许子对象序列 $0 = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_{n-1} \rightarrow M_n = M$, 则:

- (1) 若 $\phi(M_i/M_{i-1}) < \phi(D), i=1, 2, \dots, n$, 那么 $\phi(M) < \phi(D)$.
- (2) 若 $\phi(M_i/M_{i-1}) > \phi(D), i=1, 2, \dots, n$, 那么 $\phi(M) > \phi(D)$.
- (3) 若 $\phi(M_i/M_{i-1}) = \phi(D), i=1, 2, \dots, n$, 那么 $\phi(M) = \phi(D)$.

证明 (1) 考虑一个短正合列: $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_2/M_1 \rightarrow 0$, 如果 $\phi(M_1) < \phi(D), \phi(M_2/M_1) < \phi(D)$, 由跷跷板性质可得 $\phi(M_1) < \phi(M_2) < \phi(M_2/M_1) < \phi(D)$ 或者 $\phi(D) > \phi(M_1) > \phi(M_2) > \phi(M_2/M_1)$, 从而有 $\phi(M_2) < \phi(D)$. 通过对短正合列 $0 \rightarrow M_{i-1} \rightarrow M_i \rightarrow M_i/M_{i-1} \rightarrow 0$ 归纳可得 $\phi(M_i) < \phi(D)$, 进而有 $\phi(M) = \phi(M_n) < \phi(D)$.

(2)、(3) 同理可得.

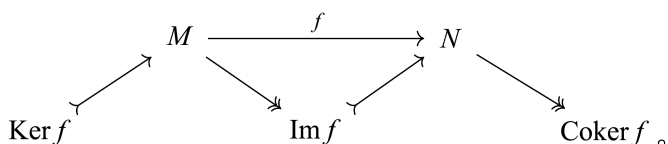
定义 2 设 $\phi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{P}$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 上的稳定函数, M 是 \mathcal{A} 中的非零对象, 如果对于每一个非平凡容许子对象 $L \rightarrow M$ 满足 $\phi(L) < \phi(M)$ (或 $\phi(L) \leq \phi(M)$), 则称 M 为 ϕ -稳定 (或 ϕ -半稳定) 对象.

注 2 ϕ -稳定对象是不可分解的. 事实上, 如果 $M = M_1 \oplus M_2$, 考察一个短正合列 $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$. 通过跷跷板性质, 有 $\phi(M_1) < \phi(M) < \phi(M_2)$, 但是, 在另一个短正合列 $0 \rightarrow M_2 \rightarrow M \rightarrow M_1 \rightarrow 0$ 中, 有 $\phi(M_2) < \phi(M) < \phi(M_1)$, 矛盾.

定理 1 设 $\phi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{P}$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 上的稳定函数, $f: M \rightarrow N$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 上的非零容许态射, 若 $\phi(M) \geq \phi(N)$, 且 M 和 N 是 ϕ -半稳定对象, 则:

- (1) $\phi(M) = \phi(N)$.
- (2) 若 N 是 ϕ -稳定对象, 则 f 是容许满态射.
- (3) 若 M 是 ϕ -稳定对象, 则 f 是容许单态射.
- (4) 若 M 和 N 是 ϕ -稳定对象, 则 f 是同构.

证明 (1) 仅需证明 $\phi(M) \leq \phi(N)$. 由于 $f \neq 0$, 因此 $\text{Im } f \neq 0$. 考虑 f 的容许单-容许满分解



由跷跷板性质得 $\phi(\text{Im } f) \leq \phi(N)$ 和 $\phi(\text{Ker } f) \leq \phi(M)$, 故 $\phi(M) \leq \phi(\text{Im } f) \leq \phi(N)$ 。

(2) 假设 $\text{Im } f \neq N$ 。因为 N 是 ϕ -稳定对象, 所以 $\phi(\text{Im } f) < \phi(N)$, 与(1)矛盾, 故 $\text{Im } f = N$ 。

(3) 假设 $\text{Ker } f \neq \{0\}$ 。因为 M 是 ϕ -稳定对象, 则有 $\phi(\text{Ker } f) < \phi(M)$, 所以 $\phi(M) < \phi(\text{Im } f)$, 与(1)矛盾, 故 $\text{Ker } f = \{0\}$ 。

(4) 由上述分析显然可得。

推论 1 设 $\phi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{P}$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 上的稳定函数, M 和 N 是 \mathcal{A} 中的 2 个非零不同构的 ϕ -稳定对象。若 $\phi(M) = \phi(N)$, 则 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(M, N) = 0$ 。

2 挠对的构造

定义 3 正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 被称为长度范畴^[10], 若对 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 中每一个对象 M , 都可以诱导出一个有限链

$$0 = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n = M,$$

使得 M_i/M_{i-1} 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 中的单对象。下面总假定 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为正合长度范畴。

引理 1 设 $M \in \mathcal{A}$, A 是 M 的非零容许子对象, 则:

(1) A 要么是 ϕ -半稳定的, 要么存在 M 的一个非零 ϕ -半稳定容许子对象 A' , 使得 $\phi(A') > \phi(A)$ 。

(2) 若有一个 M 的 ϕ -半稳定容许子对象 B , 满足 $\phi(B) > \phi(A)$, 则要么 $B \rightarrow A$, 要么存在 $A' \rightarrow M$ 使得 $A \rightarrow A'$, 且 $\phi(A) < \phi(A')$ 。

证明 (1) 若 A 不是 ϕ -半稳定的, 则存在 A 的一个容许子对象 A_1 , 使得 $\phi(A_1) > \phi(A)$ 。若 A_1 不是 ϕ -半稳定的, 则存在 A_1 的一个容许子对象 A_2 , 使得 $\phi(A_2) > \phi(A_1)$ 。依次下去可得一个链 $A \leftarrow A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow \dots$, 且有 $\phi(A) < \phi(A_1) < \dots$, 由于 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 为正合长度范畴, 因此该过程一定在有限步终止, 所以必然存在 M 的一个非零 ϕ -半稳定容许子对象 A' , 使得 $\phi(A') > \phi(A)$ 。

(2) 考虑以下 2 个标准正合列:

$$0 \rightarrow A \cap B \rightarrow B \rightarrow U \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow A \rightarrow A+B \rightarrow U \rightarrow 0,$$

其中 $A \cap B$ 及 $A+B$ 的定义见文献[11]。若 B 不是 A 的容许子对象, 则 $A+B \neq A$, 从而 $U \neq 0$ 。当 $A \cap B = 0$ 时, 则 $B = U$, 从而 $\phi(B) = \phi(U)$; 当 $A \cap B \neq 0$ 时, 由于 B 是 ϕ -半稳定的, 因此 $\phi(A \cap B) \leq \phi(B)$, 从而 $\phi(B) \leq \phi(U)$ 。又因为 $\phi(A) \leq \phi(B)$, 所以 $\phi(A) \leq \phi(U)$, 由跷跷板性质可得 $\phi(A) \leq \phi(A+B)$, 取 $A' = A+B$ 即可。

注 3 称 M 的一个容许子对象 A 为贪对象, 如果对于 M 的一个 ϕ -半稳定容许子对象 B , 由 $\phi(B) > \phi(A)$ 可得 $B \rightarrow A$ 。显然, M 就是一个贪对象。下面来构造一个贪对象, 若 $E \rightarrow M$ 不是贪对象, 则存在一个 ϕ -半稳定对象 A , 使得 $\phi(A) > \phi(E)$ 且 A 不是 E 的容许子对象, 则由引理 1(2), 存在 A_1 使得 $E \rightarrow A_1$, 且 $\phi(E) < \phi(A_1)$ 。同样地, 如果 A_1 不是贪对象, 则有 $A_1 \rightarrow A_2$, 且 $\phi(A_1) < \phi(A_2)$ 。依次下去, 这个过程必然在有限步终止, 即可得到一个贪对象 A_k 。

定义 4 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是正合长度范畴, L, M 和 N 都是 \mathcal{A} 中的非零对象。令 $p: M \rightarrow N$ 是一个容许满态射, $i: L \rightarrow M$ 是一个容许单态射。

(1) (N, p) 被称为 M 的极大不稳定容许商对象, 如果下列条件成立: (a) 每一个容许满态射 $p': M \rightarrow N'$ 都满足 $\phi(N') \geq \phi(N)$; (b) 如果 $\phi(N') = \phi(N)$, 则存在一个容许满态射 $f: N \rightarrow N'$ 使得 $p' = fp$ 。

(2) (L, i) 被称为 M 的极大不稳定容许子对象, 如果下列条件成立: (a') 对每一个容许单态射 $i': L' \rightarrow M$ 满足 $\phi(L') \leq \phi(L)$; (b') 如果 $\phi(L') = \phi(L)$, 则存在一个容许单态射 $g: L' \rightarrow L$ 使得 $i' = ig$ 。

注 4 M 的极大不稳定容许商对象 (N, p) 和极大不稳定容许子对象 (L, i) 都是 ϕ -半稳定对象。事实上, 设 L^* 是一个容许子对象且有 $i^*: L^* \rightarrow L$, 从而 ii^* 是一个容许单态射, 故 $\phi(L^*) \leq \phi(L)$, 于是 L 是 ϕ -半稳定对象。同理可证极大不稳定容许商对象。

命题 2 设 $\phi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{P}$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 上的稳定函数, $M \in \mathcal{A}^*$, 则 M 的极大不稳定容许商对象 (N, p) 和极大不稳定容许子对象 (L, i) 是存在的, 且在同构意义下是唯一的。

证明 先证极大不稳定容许子对象。如果 M 是 ϕ -半稳定的, 则它本身就是极大不稳定容许子对象。若

M 不是 ϕ -半稳定的,即不满足条件(a'),则可以构造一个贪对象 $M_1 \twoheadrightarrow M$,且 $\phi(M_1) > \phi(M)$ 。如果 M_1 不满足条件(a'),则可以构造一个贪对象 $M_2 \twoheadrightarrow M_1$,且 $\phi(M_2) > \phi(M_1)$ 。依次下去,可得一个链 $\cdots \twoheadrightarrow M_2 \twoheadrightarrow M_1 \twoheadrightarrow M$,且 $\cdots > \phi(M_2) > \phi(M_1) > \phi(M)$,但该链一定是一个有限链,故存在 $M_k \twoheadrightarrow M$,使得 M 所有容许子对象的相位都小于 $\phi(M_k)$,即满足条件(a')。如果 L_0 满足(a')但不满足(b'),则存在一个对象 F ,使得 $\phi(L_0) = \phi(F)$,但 F 不是 L_0 的一个容许子对象。由引理 1(1)可得, F 是 ϕ -半稳定的。令 $L_1 = L_0 + F$,类似引理 1(2)的证明可知 $\phi(L_0) \leq \phi(L_1)$,显然 $L_0 \twoheadrightarrow L_1$,且 L_1 也满足条件(a');若 L_1 仍不满足(b'),则与上一步同理,依次下去可得, $L_0 \twoheadrightarrow L_1 \twoheadrightarrow \cdots$ 且 $\phi(L_0) \leq \phi(L_1) \leq \cdots$,该过程一定在有限步终止,故必然存在 L_j 同时满足(a')(b'),则证明了极大不稳定容许子对象的存在性。

下证唯一性。假定 M 有 2 个不同的极大不稳定容许子对象 (L, i) 和 (L', i') ,则 $\phi(L) \leq \phi(L')$ 且 $\phi(L') \leq \phi(L)$,故 $\phi(L) = \phi(L')$ 。从而,存在 2 个容许单态射 $g: L \rightarrow L'$ 和 $g': L' \rightarrow L$,使得 $i = i'g$ 和 $i' = ig'$,则 $i = i'g = ig'g$ 。由于 i 是一个容许单态射,因此 $g'g = 1_L$ 。同样地, $gg' = 1_{L'}$,所以 L 同构于 L' 。

同理可证极大不稳定容许商对象。

定义 5 设 \mathcal{T}, \mathcal{F} 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 上的满子范畴,称 \mathcal{T} 为挠类,如果它满足容许商对象封闭和扩张封闭;称 \mathcal{F} 为挠自由类,如果它满足容许子对象封闭和扩张封闭。

命题 3 设 $\phi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{P}$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 上的稳定函数,则:

- (1) $\mathcal{F}_p = \{M \in \mathcal{A}^* \mid \text{对 } M \text{ 的极大不稳定容许商对象 } M', \phi(M') \geq p\}$ 是一个挠类。
- (2) $\mathcal{F}_p = \{M \in \mathcal{A}^* \mid \text{对 } M \text{ 的极大不稳定容许子对象 } L', \phi(L') < p\}$ 是一个挠自由类。

证明 先证明(2),对偶可得(1)。首先证明 \mathcal{F}_p 满足扩张封闭。设 $0 \rightarrow Q \xrightarrow{i} M \xrightarrow{h} U \rightarrow 0$ 是 \mathcal{A} 中的短正合列,其中 $Q, U \in \mathcal{F}_p$ 。设 (L', L_M) 是 M 的极大不稳定容许子对象,则有以下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } h' & \xrightarrow{i'} & L' & \xrightarrow{h'} & \text{Im}(hL_M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow L_M & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{h} & U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

设 (Q', L_Q) 、 (U', L_U) 分别是 Q, U 的极大不稳定容许子对象,如果 $\text{Im}(hL_M) = 0$,由核的泛性质可知

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & L' & & \\ & & & & \downarrow L_M & & \\ & & w & \swarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{h} & U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

存在一个容许单态射 $w: L' \rightarrow Q$,使得 $L_M = iw$,从而 $\phi(L') \leq \phi(Q') < p$ 。如果 $\text{Im}(hL_M) \neq 0$,则由跷跷板性质可得 $\phi(\text{Im}(hL_M)) \geq \phi(L')$ 。此外,由于 U' 是极大不稳定容许子对象,因此 $\phi(\text{Im}(hL_M)) \leq \phi(U') < p$,故 $\phi(L') < p$,从而 \mathcal{F}_p 是扩张封闭。

下面证明 \mathcal{F}_p 关于容许子对象封闭。设 $i: Q \rightarrow M$ 是容许单态射,且 $M \in \mathcal{F}_p$,设 (L', L_M) 、 (Q', L_Q) 分别是 M, Q 的极大不稳定容许子对象,由图

$$\begin{array}{ccc} Q' & & L' \\ \downarrow L_Q & \swarrow & \downarrow L_M \\ 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{i} & M \end{array}$$

可得 $iL_Q: Q' \rightarrow M$ 是一个容许单态射,且 $\phi(Q') \leq \phi(L') < p$,即 $Q' \in \mathcal{F}_p$ 。

由此可得 \mathcal{F}_p 是一个挠自由类。

定义 6 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是正合长度范畴, \mathcal{T} 和 \mathcal{F} 都是 \mathcal{A} 的满子范畴,称 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 为挠对,如果下列条件成立:

- (1) $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(X, Y) = 0, \forall X \in \mathcal{T}, Y \in \mathcal{F}$ 。
- (2) 如果 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(X, -)|_{\mathcal{F}} = 0$,那么 $X \in \mathcal{F}$ 。

(3) 如果 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(-, Y)|_{\mathcal{F}} = 0$, 那么 $Y \in \mathcal{F}$ 。

定理 2 令 $p \in \mathcal{P}$, 则 $(\mathcal{F}_p, \mathcal{F}_p)$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 中的挠对。

证明 假设 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(M, N)$ 是非零的容许态射, 其中 $M \in \mathcal{F}_p, N \in \mathcal{F}_p$, 令 M' 是 M 的极大不稳定容许商对象, N' 是 N 的极大不稳定容许子对象, 显然有 $\phi(\text{Im } f) \geq \phi(M') \geq p$ 和 $\phi(\text{Im } f) \leq \phi(N') < p$, 矛盾, 从而, $f=0$ 。

假设 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(\mathcal{F}_p, N) = 0$, 下证 $N \in \mathcal{F}_p$ 。令 N' 是 N 的极大不稳定容许子对象, 可得 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(\mathcal{F}_p, N') = 0$; 否则, 存在 $M \in \mathcal{F}_p$ 及非零容许态射 $h: M \rightarrow N'$, 则由态射的合成 $M \rightarrow N' \rightarrow N$, 可知 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(\mathcal{F}_p, N) \neq 0$, 矛盾, 从而 $\phi(N') < p$, 故 $N \in \mathcal{F}_p$ 。

假设 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(M, \mathcal{F}_p) = 0$, 下证 $M \in \mathcal{F}_p$ 。令 M' 是 M 的极大不稳定容许商对象, 可得 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(M', \mathcal{F}_p) = 0$; 否则, 存在 $N \in \mathcal{F}_p$ 及非零容许态射 $h': M' \rightarrow N$, 则由态射的合成 $M \rightarrow M' \rightarrow N$, 可知 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{adm}}(M, \mathcal{F}_p) \neq 0$, 矛盾, 从而 $\phi(M') \geq p$, 因此 $M \in \mathcal{F}_p$ 。

参考文献:

[1] MUMFORD D. Geometric invariant theory[M]. New York: Academic Press, 1965.

[2] SCHOFIELD A. Semi-invariants of quivers[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1991, 43(3):385-395.

[3] KING A D. Moduli of representations of finite dimensional algebras[J]. The Quarterly Journal of Mathematics, 1994, 45(4): 515-530.

[4] RUDAKOV A. Stability for an Abelian category[J]. Journal of Algebra, 1997, 197:231-245.

[5] BRUSTLE T, SMITH D, TREFFINGER H. Stability conditions and maximal Green sequences in Abelian categories[J]. Revista de la Union Matematica Argentina, 2022, 63(1):203-221.

[6] DICKSON S E. A torsion theory for Abelian categories[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1966, 121: 223-235.

[7] BRIDGELAND T. Scattering diagrams, hall algebras and stability conditions [J]. Algebraic Geometry, 2017, 4(5):523-561.

[8] QUILLEN D. Higher algebraic K-theory: I[C]// Algebraic K-theory. Berlin: Springer, 1973, 341:85-147.

[9] BUHLER T. Exact categories [J]. Expositiones Mathematicae, 2010, 28(1):1-69.

[10] ENOMOTO H. Schur's lemma for exact categories implies Abelian [J]. Journal of Algebra, 2021, 584:260-269.

[11] HASSOUN S, ROY S. Admissible intersection and sum property [EB/OL]. (2020-06-05)[2022-09-29]. <http://arxiv.org/abs/1906.03246v3>.

(编辑:李艺)

(上接第 99 页)

[4] 吴漫,白明丽,曾咏欣,等. 基于点割集的最短路径算法的改进与应用[J]. 数学理论与应用, 2018, 38(3/4):18-32.
WU Man, BAI Mingli, ZENG Yongxin, et al. Improvement and application of shortest path algorithm based on point cut sets [J]. Mathematical Theory and Application, 2018, 38(3/4):18-32.

[5] 魏宗田,刘勇,杨威,等. 网络抗毁性[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2015.
WEI Zongtian, LIU Yong, YANG Wei, et al. Network invulnerability[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2015.

[6] 凌捷. 舵图的优美性[J]. 高校应用数学学报 A 辑 (中文版), 1989, 4:590-592.
LING Jie. The beauty of rudder diagrams[J]. Journal of Applied Mathematics in Colleges and Universities, Series A (Chinese Edition), 1989, 4:590-592.

[7] 胡雪姣. 几类树的燃烧数[D]. 武汉: 湖北大学, 2020.
HU Xuejiao. Burning numbers of several types of trees[D]. Wuhan: Hubei University, 2020.

(编辑:李艺)