

轮与扇的点被多重集可区别的 E-全染色

曹静, 陈祥恩*

(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 利用反证法和构造具体染色的方法证明轮与扇存在顶点被多重集可区别的 E-全染色, 其次给出具体的轮与扇的顶点被多重集可区别的 E-全染色方案, 最后构造了轮与扇的点被多重集可区别的 E-全染色算法。

关键词: 轮; 扇; 多重集; E-全染色; E-全染色数

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A

引用格式: 曹静, 陈祥恩. 轮与扇的点被多重集可区别的 E-全染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(2): 38-46.

E-total coloring of wheels and fans vertex-distinguished by multiple sets

CAO Jing, CHEN Xiang'en*

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: By using the method of contradiction and the method of constructing concrete coloring, we discuss E-total coloring of wheels and fans which are vertex-distinguished by multiple sets. The methods of the corresponding colorings of wheels and fans are obtained, and the E-total coloring algorithm of wheels which are vertex-distinguished by multiple sets are constructed.

Key words: wheel; fan; multi-set; E-total coloring; E-total chromatic number

1 引言及预备知识

1997年, Burris等^[1]提出图的点可区别正常边染色, 并在文献[2-3]中进一步研究。辛小青等^[4]给出了 m 个阶为4的圈不交并的点可区别正常边色数。文飞等^[5]研究了补倍图的点可区别正常边色数。所谓图 G 的一个 k -全染色是指 k 种颜色对图 G 的全体顶点及边的一个分配, 对图 G 的每个顶点 x , 用 $C_f(x)$ 表示在 f 下点 x 的颜色以及全体与 x 关联的边的颜色构成的非多重集, 称其为 x 的色集合。

关于轮与扇, Zhang等^[6]探讨了完全图、轮、扇、路和圈的点可区别全染色。张辉等^[7]得到了轮与轮的联图和扇与扇的联图的邻点被扩展和可区别全染色。设 f 为图 G 的一个正常全染色, 若对 $\forall u, v \in V$, 一旦 $u \neq v$, 总有 $C(u) \neq C(v)$, 则称 f 为图 G 的点可区别全染色。Chen等^[8]提出图的点可区别 E-全染色这一概念。之后点可区别 E-全染色针对完全二部图展开研究^[9-11]。

图 G 的 VE-全染色是指使得每条关联边与它的端点染以不同的颜色的一个 VE-全染色。图 G 的 E-全染色是指使得相邻顶点染以不同色, 每条关联边与它的端点染以不同的颜色的一个 E-全染色。

若 f 为图 G 的 E-全染色, 对于 $\forall x \in V(G)$, 用 $\bar{C}(x)$ 表示点 x 的色以及与其相关联的边的颜色构成的多重集。称 $\bar{C}(x)$ 为点 x 的多重色集合或色集合, 显然有 $|\bar{C}(x)| = d_G(x) + 1$, 其中 $d_G(x)$ 表示图 G 中点 x 的度。若对 $\forall u, v \in V$, $u \neq v$ 总有 $\bar{C}(u) \neq \bar{C}(v)$, 则称 f 是点被多重色集合可区别的 E-全染色。I 条件: 每条关联边与它的端点染以不同的颜色。V 条件: 相邻顶点染以不同颜色。

收稿日期: 2022-11-02; 网络出版时间: 2023-08-15 15:05:06

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/37.1389.n.20230814.1429.002>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11761064)

第一作者简介: 曹静(1997—), 女, 硕士研究生, 研究方向为图论及其应用。E-mail: caojing20210901@163.com

* 通信作者简介: 陈祥恩(1965—), 男, 教授, 研究方向为图论及其应用。E-mail: chenxe@nwnu.edu.cn

图 G 使用了 k 种颜色的 VE-全染色叫作图 G 的 k -VE-全染色。图 G 使用了 k 种颜色的 E-全染色叫作图 G 的 k -E-全染色。将 $\chi_{vr}^{ve}(G)$ 称为图 G 的点被多重集可区别的 VE-全染色数,将 $\chi_{vr}^e(G)$ 称为图 G 的点被多重集可区别的 E-全染色数。

$$\tilde{\chi}_{vr}^{ve}(G) = \min \{k \mid G \text{ 存在点被多重集可区别的 } k\text{-VE-全染色}\},$$

$$\tilde{\chi}_{vr}^e(G) = \min \{k \mid G \text{ 存在点被多重集可区别的 } k\text{-E-全染色}\}.$$

设 $\tilde{\eta}(G)$ 表示满足下面 2 个条件对一切使得 $\delta \leq i \leq \Delta$ 的 i 都成立的正整数 l 的最小值。

$A_j^{(i)}$ 是从 l 种颜色里有重复的取出 $i+1$ 种颜色使 j 只出现 1 次的全体组合构成的集合, $j=1, 2, \dots, l$, 其中 $|A_j^{(i)}|$ 为从 $l-1$ 种颜色里有重复的取出 i 种颜色的组合的个数。

情形 1 当 $l \geq i+1$ 时,

$$\begin{aligned} & \binom{l}{1} \binom{l+i-2}{i} - \binom{l}{2} \binom{l+i-4}{i-1} + \binom{l}{3} \binom{l+i-6}{i-2} - \dots + (-1)^i \binom{l}{i-1} \binom{l-i+2}{2} \\ & + (-1)^{i+1} \binom{l}{i} \binom{l-i}{l} + (-1)^{i+2} \binom{l}{i+1} \binom{l-i-2}{0} \geq n_i; \end{aligned}$$

情形 2 当 $l \leq i$ 时,

$$\begin{aligned} & \binom{l}{1} \binom{l+i-2}{i} - \binom{l}{2} \binom{l+i-4}{i-1} + \binom{l}{3} \binom{l+i-6}{i-2} - \dots + (-1)^{l-2} \binom{l}{l-3} \binom{i-l+6}{i-l+4} \\ & + (-1)^{l-1} \binom{l}{l-2} \binom{i-l+4}{i-l+3} + (-1)^l \binom{l}{l-1} \binom{i-l+2}{i-l+2} \geq n_i. \end{aligned}$$

命题 1 对图 G , $\tilde{\chi}_{vr}^e(G) \geq \tilde{\chi}_{vr}^{ve}(G) \geq \tilde{\eta}(G)$ 。

由于图的 k -E-全染色必然是图的 k -VE-全染色,因此本文只讨论图的最优 k -E-全染色,相应的图的最优 k -VE-全染色可由此得出。

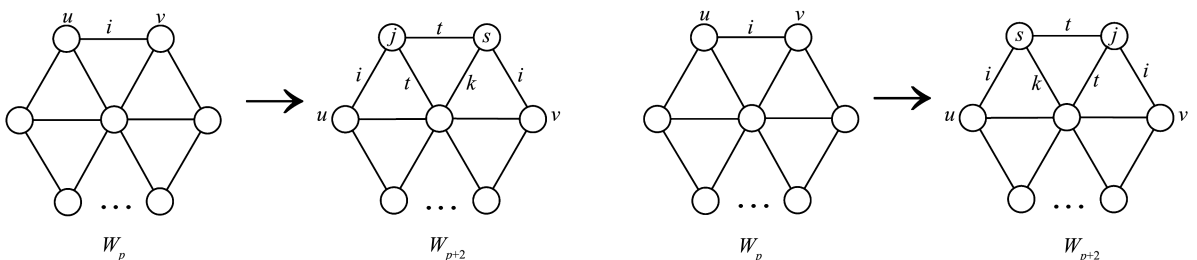
上述文献都是基于图的点被非多重集可区别全染色所做出的工作,本文则是对轮与扇的点被多重集可区别的 E-全染色,并给出了轮与扇的染色的方案,构造了轮的点被多重集可区别的 E-全染色算法。其中用 W_n 表示 $n+1$ 阶的轮,轮的顶点集合为 $V(W_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$,边集为 $E(W_n) = \{v_0v_1, v_0v_2, \dots, v_0v_n; v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$;用 F_n 表示 $n+1$ 阶的扇,扇的顶点集合为 $V(F_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$,边集为 $E(F_n) = \{v_0v_i \mid i=1, 2, \dots, n\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid i=1, 2, \dots, n-1\}$ 。

2 准备工作

若 $n \in [x, y]$,则 n 可取 x, y 之间的所有整数,其中 $x < y$,可称 $[x, y]$ 为整数区间。

设 W_p 是一个点被多重集可区别的 q -E-全染色的 f_p 的 $p+1$ 阶轮,其 q 种颜色是 $1, 2, \dots, q$ 。以下定义 4 种剖分。

D 型剖分运算:设 i, j, s, t 是 4 种互不相同的颜色, $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, $j, s, t \in \{2, 3, \dots, q\}$,且 $\{i, t, s, k\}$ 及 $\{i, j, t, k\}$ 均不是 W_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 W_p 的染有颜色 i 的一条边 uv 实施一次 $[i; j, s; t; k]$ -D 型剖分运算是指将 W_p 按照图 1 所示的方法变成 W_{p+2} 的过程,其中 $k=j$ 或 $k=t$ 。



(a) 点 u 的色不是 j , 点 v 的色不是 s

(b) 点 u 的色不是 s , 点 v 的色不是 j

图 1 D 型剖分运算

Fig.1 Subdivision operation of type D

F 型剖分运算: 设 i, j, t 是 3 种互不相同的颜色 $i \in \{1, 2, 3, \dots, q\}$, $j, t \in \{2, 3, \dots, q\}$, 且 $\{i, t, j, t\}$ 不是 W_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 W_p 的染有颜色 i 的一条边 uv 实施一次 $[i; j, t]$ -F 型剖分是指将 W_p 按照图 2 所示的方法变成 W_{p+1} 的过程。

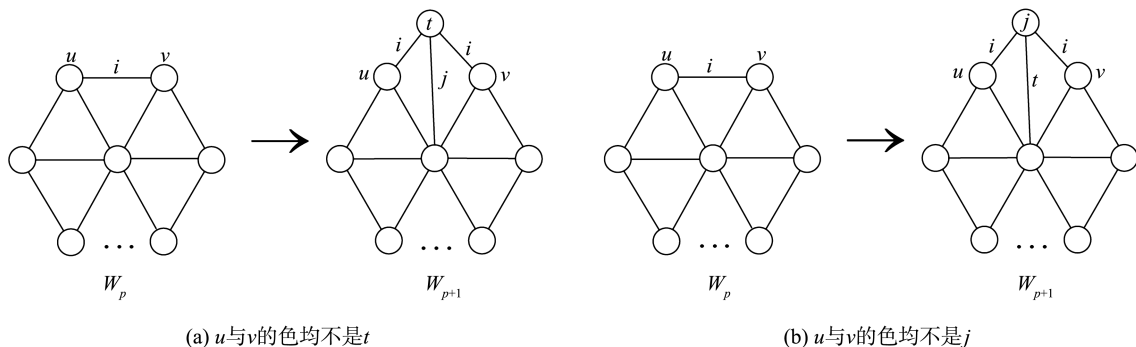


图 2 F 型剖分运算

Fig.2 Subdivision operation of type F

H 型剖分运算: 设 i, t 是 2 种互不相同的颜色, 且 $\{i, i, i, t\}$ 不是 W_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 W_p 的染有颜色 i 的一条边 uv 实施一次 $[i; t]$ -H 型剖分是指将 W_p 按照图 3 所示的方法变成 W_{p+1} 的过程。

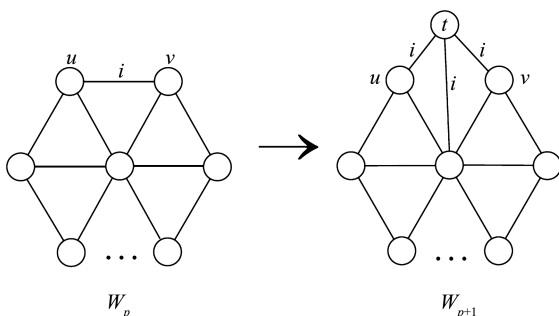


图 3 H 型剖分运算

Fig.3 Subdivision operation of type H

K 型剖分运算: 设 i, j, s, t 是 $\{1, 2, \dots, q\}$ 中的 4 种不同色, 且 $s < i, j < i, j < s$, $\{t, s, i, s\}, \{s, i, j, i\}, \{i, i, s, t\}$ 不是 W_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 W_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次 $[i, j, s; t]$ -K 型剖分是指将 W_p 按照图 4 所示的方法变成 W_{p+3} 的过程。

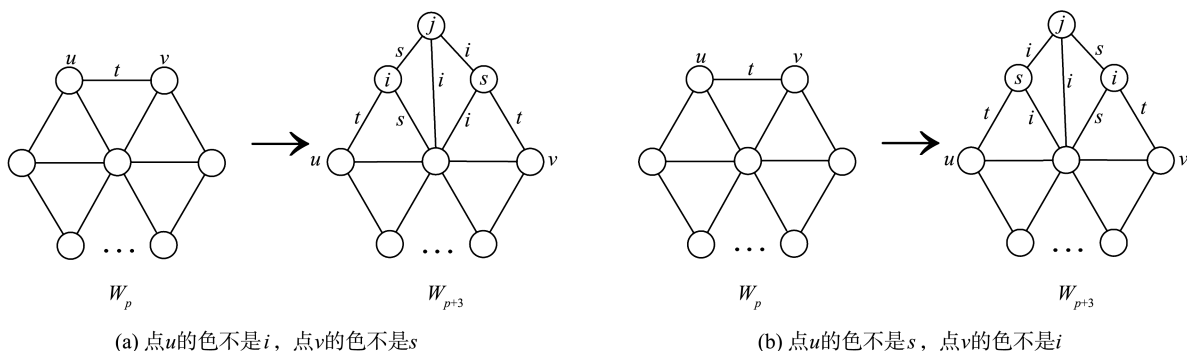


图 4 K 型剖分运算

Fig.4 Subdivision operation of type K

3 主要结果及其证明

为方便起见, 记

$$M(a) = \binom{a-1}{1} \binom{a+1}{3} - \binom{a-1}{2} \binom{a-1}{2} + \binom{a-1}{3} \binom{a-3}{1} - \binom{a-1}{4} - (a-1), \quad a=1,2,\dots,l.$$

断言 1 $W_{M(l-1)+1}$ 不存在点被多重集可区别的 $(l-1)$ -E-全染色。

证明 假设 $W_{M(l-1)+1}$ 存在点被多重集可区别的 $(l-1)$ -E-全染色 g 。不妨设轮心 $v_0, g(v_0) = 1$, 则轮外围圈的顶点及辐条的颜色不能是颜色 1 (否则与 V、I 条件矛盾)。若一个 4-子集能够成为外围圈上顶点的色集合, 必须有“某一种颜色在该 4-子集里仅出现一次”的性质。

根据命题 1, 对轮的外围圈上的顶点, $i=3$, 则有 $\binom{l-1}{1} \binom{l+1}{3} - \binom{l-1}{2} \binom{l-1}{2} + \binom{l-1}{3} \binom{l-3}{1} - \binom{l-1}{4}$ 个满足条件的 4-子集。因为 $g(v_0) = 1$, 所以形如 $\{1, 1, 1, i\}$ 的 4-子集也应排除 (否则与 I 条件矛盾), 其中 $i=2, 3, \dots, l$ 。这样的 4-子集共有 $l-1$ 个。

综上, 能够成为轮外围圈上顶点色集合的 4-子集有 $\binom{l-1}{1} \binom{l+1}{3} - \binom{l-1}{2} \binom{l-1}{2} + \binom{l-1}{3} \binom{l-3}{1} - \binom{l-1}{4} - (l-1) = M(l-1)$ 个。显然 $M(l-1) < M(l-1) + 1$, 即 $M(l-1)$ 个 4-子集不足以区别 $M(l-1) + 1$ 个 3 度点, 因此 $W_{M(l-1)+1}$ 不存在点被多重集可区别的 $(l-1)$ -E-全染色。

定理 1 轮 W_n 的点被多重集可区别的 E-全色数为

$$\chi_{vr}^e(W_n) = \begin{cases} 4, & 4 \leq n \leq 18, \\ l, & n \geq 19, \quad n \in \begin{cases} [M(l-1)+1, M(l)-1], & l \equiv 0 \pmod{4}, \\ [M(l-1), M(l)], & l \equiv 1 \pmod{4}, \\ [M(l-1)+1, M(l)], & l \equiv 2 \pmod{4} \text{ 或 } l \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases} \end{cases}$$

证明 根据命题 1 与 W_n 的性质, W_n 中 3 度点有 n 个, n 度点有 1 个, 有

$$\tilde{\eta}(W_n) = \min \left\{ l \left| \begin{array}{l} \binom{l-1}{1} \binom{l+1}{3} - \binom{l-1}{2} \binom{l-1}{2} + \binom{l-1}{3} \binom{l-3}{1} - \binom{l-1}{4} \geq n \\ \binom{l-1}{1} \binom{l+i-2}{i} - \binom{l-1}{2} \binom{l+i-4}{i-1} + \dots + (-1)^{l-1} \binom{l-1}{l-2} \binom{i-l+3}{i-l+3} \geq 1 \end{array} \right. \right\}.$$

假设 W_n 存在点被多重集可区别的 l -E-全染色 $f_n \{1, 2, \dots, l\}$, 不妨设序列

$$f_n = (f_n(v_n v_1) f_n(v_0 v_1) f_n(v_1) f_n(v_1 v_2), f_n(v_1 v_2) f_n(v_0 v_2) f_n(v_2) f_n(v_2 v_3), \dots, f_n(v_{n-1} v_n) f_n(v_0 v_n) f_n(v_n) f_n(v_n v_1)).$$

情形 1 $4 \leq n \leq 18$ 。

首先证明当 $4 \leq n \leq 9$ 时, $\chi_{vr}^e(W_n) > 3$ (尽管此时 $\tilde{\eta}(W_n) = 3$, 但 $\chi_{vr}^e(W_n) > 3$)。

先证当 $4 \leq n \leq 9$ 时, $\tilde{\chi}_{vr}^e(W_n) > 3$ 。

假设 W_n 存在顶点被多重集点可区别染色的 3-E-全染色 g 。若一个 4-子集能够成为一个顶点的色集合, 必须具备“某一种颜色在该 4-子集里仅出现一次”的性质, 所以能够成为顶点的色集合的 4-子集, 只可能是以下 9 个子集: $\{1, 1, 1, 2\}, \{1, 1, 1, 3\}, \{2, 2, 2, 1\}, \{2, 2, 2, 3\}, \{3, 3, 3, 1\}, \{3, 3, 3, 2\}, \{1, 2, 3, 1\}, \{1, 2, 3, 2\}, \{1, 2, 3, 3\}$ 。

不妨设轮心 v_0 的颜色为 1, 即 $g(v_0) = 1$, 则 $\{1, 1, 1, 2\}, \{1, 1, 1, 3\}$ 可排除, 否则与 I 条件矛盾; $\{2, 2, 2, 1\}, \{3, 3, 3, 1\}$ 可排除, 否则与 V 条件矛盾, 故 W_9, W_8, W_7, W_6 不存在点被多重集可区别的 3-E-全染色。

若 $n=5$ 时, 剩余的 5 个 4-子集都必须是 W_5 外围圈顶点的色集合, 不妨选用 $\{3, 3, 3, 2\}$ 作为外围圈顶点 v_1 的色集合, 则与 v_1 相邻的 2 个点的关联边都必须为颜色 3, 则其色集合只能为 $\{1, 1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 3\}$, 且颜色 1 不能作为轮的顶点与辐条的颜色 (否则与 V、I 条件矛盾)。此时只剩颜色 2 作为顶点的颜色; 但这与 V 条件矛盾, 因此 4 个 4-子集不足以区别 5 个 3 度点, 故 W_5 不存在顶点被多重集点可区别染色的 3-E-全染色。

若 $n=4$ 时, 不能选用 $\{3, 3, 3, 2\}$ 作为外围圈上顶点 v_1 的色集合, 否则就无法选用 $\{1, 1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 3\}$ 作为外围圈上其他顶点的色集合, 理由如 $n=5$ 时。

剩余的 4 个 4-子集都必须是 W_4 外围圈顶点的色集合, 不妨选用 $\{2, 2, 2, 3\}$ 作为外围圈顶点 v_1 的色集合, 则与 v_1 相邻的 2 个点的关联边都必须为颜色 2, 则其色集合只能为 $\{1, 3, 2, 2\}, \{1, 1, 2, 3\}$, 且颜色 1 不能作为轮的顶点与辐条的颜色 (否则与 V、I 条件矛盾)。此时只剩颜色 3 作为顶点的颜色; 但这与

V 条件矛盾,因此 3 个 4-子集不足以区别 4 个 3 度点,故 W_4 不存在顶点被多重集可区别染色的 3-E-全染色。

综上所述, $\chi_{vr}^e(W_n) > 3$ 。

当 $10 \leq n \leq 19$ 时, $\bar{\eta}(W_n) \geq 4$, 则由命题 1, $\chi_{vr}^e(W_n) \geq 4$; 但 $n = 19$ 时, 由断言 1, W_{19} 不存在点被多重集可区别的 4-E-全染色, 故当 $10 \leq n \leq 18$ 时, $\bar{\eta}(W_n) \geq 4$ 。

最后给出当 $4 \leq n \leq 18$ 时, W_n 的点被多重集可区别的 4-E-全染色。

先给出 W_4 的点被多重集可区别的 4-E-全染色 $f_4 \circ f_4 = (4\ 321, 1\ 343, 3\ 324, 4\ 234)$ 。

在 W_4 的点被多重集可区别的 4-E-全染色的基础上, 给 W_5 进行点被多重集可区别的 4-E-全染色 $f_5 \circ f_5 = (4\ 321, 1\ 232, 2\ 243, 3\ 324, 4\ 234)$ 。

在 W_5 的点被多重集可区别的 4-E-全染色的基础上, 再对色为 1 的边进行剖分, 插入 1 个或 2 个或 3 个新顶点, 使新边的色均为 1, 而新点的色为 2 或 2, 3 或 2, 3, 2。比如插入 3 个点时, 得 W_8 的点被多重集可区别的 4-E-全染色 $f_8 \circ f_8 = (4\ 321, 1\ 421, 1\ 341, 1\ 321, 1\ 232, 2\ 243, 3\ 324, 4\ 234)$ 。

在 W_8 的点被多重集可区别的 4-E-全染色的基础上, 再对色为 1 的边进行剖分, 插入 2 个或 4 个新顶点, 使一对新顶点左、右两边的颜色依然为 1, 而新点的色为 3, 2 或 3, 2, 4, 2。比如插入 4 个点时, 得 W_{12} 的点被多重集可区别的 4-E-全染色 $f_{12} \circ f_{12} = (4\ 321, 1\ 421, 1\ 341, 1\ 321, 1\ 434, 4\ 421, 1\ 343, 3\ 321, 1\ 232, 2\ 243, 3\ 324, 4\ 234)$ 。

在 W_{12} 的点被多重集可区别的 4-E-全染色的基础上, 再对色为 2 的边进行剖分, 插入 1 个或 2 个新顶点, 使剖分得到新边的颜色依然为 2, 而新点的色为 3 或 4, 3。比如插入 2 个点时, 得 W_{14} 的点被多重集可区别的 4-E-全染色 $f_{14} \circ f_{14} = (4\ 321, 1\ 421, 1\ 341, 1\ 321, 1\ 434, 4\ 421, 1\ 343, 3\ 321, 1\ 232, 2\ 242, 2\ 232, 2\ 243, 3\ 324, 4\ 234)$ 。

在 W_{14} 的点被多重集可区别的 4-E-全染色的基础上, 再对色为 3 的边进行剖分, 插入 1 个或 2 个新顶点, 使剖分得到新边的颜色依然为 3, 而新点的色为 3 或 4, 3。比如插入 2 个点时, 得 W_{16} 的点被多重集可区别的 4-E-全染色 $f_{16} \circ f_{16} = (4\ 321, 1\ 421, 1\ 341, 1\ 321, 1\ 434, 4\ 421, 1\ 343, 3\ 321, 1\ 232, 2\ 242, 2\ 232, 2\ 243, 3\ 323, 3\ 343, 3\ 324, 4\ 234)$ 。

最后, 在 W_{16} 的点被多重集可区别的 4-E-全染色的基础上, 再对色为 4 的边进行剖分, 插入 1 个或 2 个新顶点, 使剖分得到新边的颜色依然为 4, 而新点的色为 3 或 4, 3。比如插入 2 个点时, 得 W_{18} 的点被多重集可区别的 4-E-全染色 $f_{18} \circ f_{18} = (4\ 321, 1\ 421, 1\ 341, 1\ 321, 1\ 434, 4\ 421, 1\ 343, 3\ 321, 1\ 232, 2\ 242, 2\ 232, 2\ 243, 3\ 323, 3\ 343, 3\ 324, 4\ 434, 4\ 424, 4\ 234)$ 。

通过上述方式就可得出当 $4 \leq n \leq 18$ 时, W_n 的点被多重集可区别的 4-E-全染色。

情形 2 $n \geq 19, n \in \begin{cases} [M(l-1)+1, M(l)-1], & l \equiv 0 \pmod{4}, \\ [M(l-1), M(l)], & l \equiv 1 \pmod{4}, \\ [M(l-1)+1, M(l)], & l \equiv 2 \pmod{4} \text{ 或 } l \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$

$n \geq 19$, 且 $n = M(l)$ (当 $l \equiv 0 \pmod{4}$ 时, $n = M(l) - 1$), $\bar{\eta}(W_n) = l$, 由命题 1, 有 $\chi_{vr}^e(W_n) \geq l$ 。下证 $W_n (n \geq 19)$ 存在点被多重集可区别的 l -E-全染色。

图 5 中 (a)、(b)、(c)、(d) 分别代表 $l = 5 \equiv 1 \pmod{4}$ 、 $l = 6 \equiv 2 \pmod{4}$ 、 $l = 7 \equiv 3 \pmod{4}$ 、 $l = 8 \equiv 0 \pmod{4}$ 的具体 4 类剖分运算组合。

在 W_{18} 的点被多重集可区别的 4-E-全染色的基础上, 令 $l = 5, 6, 7, \dots, n$, 递归地进行如下过程。

设若 $l \equiv 1 \pmod{4}$ 则 $p = M(l-1)$ (否则 $p = M(l-1) + 1$) 且轮 W_p 的点被多重集可区别的 $(l-1)$ -E-全染色已给出, 使得 $\{1, 2, \dots, l-1\}$ 的“某种色仅出现一次”的 4-多重子集均是 W_p 外围圈上的顶点的色集合。

情形 2.1 $n \leq 19, n = \begin{cases} M(l) - 1, & l \equiv 0 \pmod{4}, \\ M(l), & l \equiv 1 \pmod{4} \text{ 或 } l \equiv 2 \pmod{4} \text{ 或 } l \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$

构造 $W_{M(l)}$ (若 $l \equiv 0 \pmod{4}$, 则为 $W_{M(l)-1}$) 的点被多重集可区别的 l -E-全染色的算法。在 W_p 的点被多重集可区别的 $(l-1)$ -E-全染色的基础上运算, 分为以下步骤。

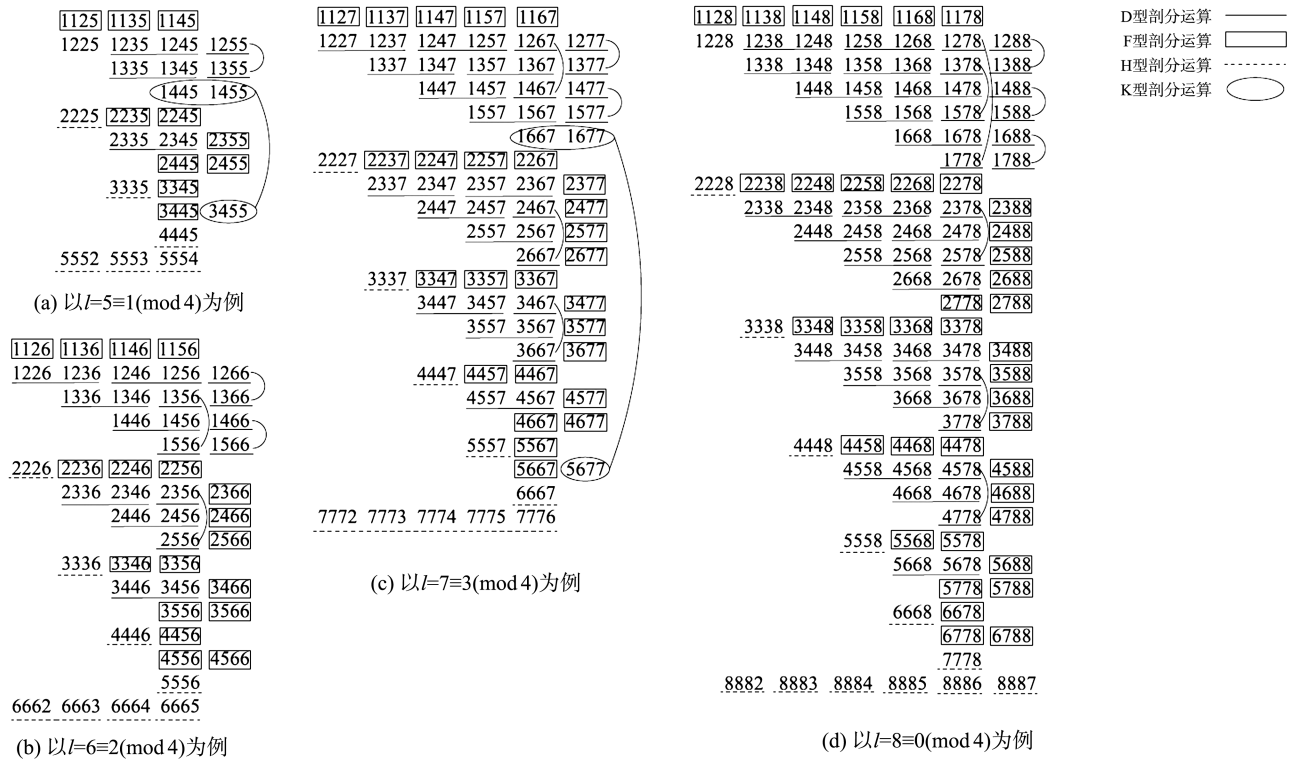


图 5 具体四类剖分运算组合
Fig.5 4 specific types of subdivision operation combinations

第 1 步: 计算 t 使 $l \equiv t \pmod{4}$, 再判断若 t 为 0, 则令 i 依次为 $3, 5, \dots, l-3$, 进行 $[1; i, i+1; l; 2]$ -D 型剖分运算; 再转入第 2 步; 若 t 为 1, 则进行一次 $[i; l-1, l; 2; 2]$ -D 型剖分运算; 令 i 依次为 $3, 5, \dots, l-2$, 进行 $[1; i, i+1; l; 2]$ -D 型剖分运算; 再转入第 2 步; 否则直接转入第 2 步。

第 2 步: 若 l 为偶数, 则进行下列运算, 否则转入第 3 步。令 j 依次为 $1, 2, \dots, l-3$, s 依次为 $3, 4, \dots, l-2$, 其中若 s 为偶数, 则 i 依次为 $s, s+2, \dots, l-2$; 若 s 为奇数, 则 i 依次为 $s, s+2, \dots, l-3$; 进行 $[j; i, i+1; l; s]$ -D 型剖分运算; 令 i 依次为 $2, 4, \dots, l-2$, 进行 $[1; i, i+1; l; l]$ -D 型剖分运算; 进行一次 $[1; 2, l; l-1; l]$ -D 型剖分运算; 令 j 依次为 $1, 2, \dots, l-4$, i 依次为 $3, 5, \dots, l-3$, 且 $j < i$, 进行 $[j; i, i+2; l; l-1]$ -D 型剖分运算, 之后转入第 5 步。

第 3 步: 此时 l 为奇数, 则令 j 依次为 $1, 2, \dots, l-3$, s 依次为 $3, 4, \dots, l-2$, 其中若 s 为偶数, 则 i 依次为 $s, s+2, \dots, l-3$; 若 s 为奇数, 则 i 依次为 $s, s+2, \dots, l-2$; 进行 $[j; i, i+1; l; s]$ -D 型剖分运算; 令 i 依次为 $2, 4, \dots, l-3$, 进行 $[1; i, i+1; l; l]$ -D 型剖分运算; 若 t 为 1, 则继续下列运算, 否则转入第 4 步。令 j 依次为 $1, 2, \dots, l-4$, i 依次为 $4, 6, \dots, l-3$, 且 $j < i$, 进行 $[j; i, i+2; l; l-1]$ -D 型剖分运算, 之后转入第 5 步。

第 4 步: 此时 t 为 3, 则令 j 依次为 $1, 2, \dots, l-4$, i 依次为 $2, 4, 6, \dots, l-3$, 且 $j < i$, 进行 $[j; i, i+2; l; l-1]$ -D 型剖分运算, 之后转入第 5 步。

第 5 步: 当满足 $l-j \equiv 2 \pmod{4}$ 或 $l-j \equiv 3 \pmod{4}$ 时, 令 j 依次为 $2, 3, \dots, l-3$, 进行 $[l-1; j, l]$ -F 型剖分运算, 并且进行下列运算; 否则直接进行下列运算。令 $i=l-3, l-2$, 进行 $[l-1; i, l]$ -F 型剖分运算; 令 i 依次为 $1, 2, \dots, l-2$, j 依次为 $i+1, i+2, \dots, l-1$, 进行 $[i; j, l]$ -F 型剖分运算, 若 l 为偶数, 转入第 6 步, 否则转入第 7 步。

第 6 步: 令 i 依次为 $2, 3, \dots, l-2$, j 依次为 $i+1, i+2, \dots, l-1$, 进行 $[l; i, j]$ -F 型剖分运算, 之后转入第 8 步。

第 7 步: 令 i 依次为 $2, \dots, l-3$, j 依次为 $i+1, i+2, \dots, l-1$, 进行 $[l; i, j]$ -F 型剖分运算; 进行一次 $[l, l-2, l-1; 1]$ -K 型剖分运算; 之后转入第 8 步。

第 8 步: 令 i 依次为 $2, 3, \dots, l-1$, 进行下列运算: $[i; l]$ -H 型剖分运算, $[l; i]$ -H 型剖分运算。算法结束。

最终, 得到了 W_n 的点被多重集可区别的 l -E-全染色, 其中 $n \geq 19$, 且 $n = M(l)$ (当 $l \equiv 0 \pmod{4}$) 时, $n = M(l) - 1$ 。

情形 2.2 $n \geq 19$, $n \in \begin{cases} [M(l-1)+1, M(l)-2], & l \equiv 0 \pmod{4}, \\ [M(l-1)+1, M(l)-1], & l \equiv 1 \pmod{4} \text{ 或 } l \equiv 2 \pmod{4} \text{ 或 } l \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$

此时 W_n 的点被多重集可区分的 l -E-全染色可以通过对 W_p 进行 D 型剖分运算、F 型剖分运算、H 型剖分运算、K 型剖分运算而得到, 具体如下。

构造 W_{p+r} 的点被多重集可区分的 l -E-全染色的算法。在 W_p 的点被多重集可区分的 $(l-1)$ -E-全染色的基础上运算, 并且分为以下步骤。

第 1 步: 若 $1 \leq r \leq l-2$, 则令 i 依次为 $2, 3, \dots, r$, 进行 $[i; l]$ -H 型剖分运算, 算法结束, 否则 $r > l-2$ 转入第 2 步。

第 2 步: 令 i 依次为 $2, 3, \dots, l-1$, 进行 $[i; l]$ -H 型剖分运算, 再令 $t = r-l+2$, 若 $t = 0$ 则算法结束, 否则转入第 3 步。

第 3 步: 若 l 为偶数, 对上一步所得图实施 $r-4l+9$ 次互不相同的 F 型剖分运算, 否则转入第 4 步。再令 $t = t-r+4l-9$, 若 $t = 0$ 则算法结束, 否则转入第 5 步。

第 4 步: 此时 l 为奇数, 对上一步所得图实施 $r-4l+10$ 次互不相同的 F 型剖分运算, 再令 $t = t-r+4l-10$, 若 $t = 0$ 则算法结束, 否则转入第 7 步。

第 5 步: 若 $l \equiv 0 \pmod{4}$ 时, 此处的 $\binom{l-1}{3}$ 为奇数, 则 D 型剖分运算一共有 $\frac{1}{2} \left[\binom{l-1}{3} - 1 \right]$ 个, 否则转入第 6 步。

若 $r-4l+10$ 是偶数, 对上一步所得图实施 $\frac{r-4l+10}{2}$ 次互不相同的 D 型剖分运算; 若 $r-4l+10$ 是奇数, 对上一步所得图实施 $\frac{r-4l+11}{2}$ 次互不相同的 D 型剖分运算, 再令 $t = t-r+4l-10$; 若 $t = 0$ 则算法结束, 否则转入第 8 步。

第 6 步: 此时 $l \equiv 2 \pmod{4}$, 此处的 $\binom{l-1}{3}$ 为偶数, 则 D 型剖分运算一共有 $\frac{1}{2} \binom{l-1}{3}$ 个。若 $r-4l+9$ 是偶数, 对上一步所得图实施 $\frac{r-4l+9}{2}$ 次互不相同的 D 型剖分运算; 若 $r-4l+9$ 是奇数, 对上一步所得图实施 $\frac{r-4l+10}{2}$ 次互不相同的 D 型剖分运算, 再令 $t = t-r+4l-9$; 若 $t = 0$ 则算法结束, 否则转入第 8 步。

第 7 步: 此时 l 为奇数, 首先进行一次 K 型剖分运算, $r-3-4l+10 \leq \binom{l-1}{3} - 3$, 其中 $\binom{l-1}{3} - 3$ 为偶数, 则 D 型剖分运算一共有 $\frac{1}{2} \left[\binom{l-1}{3} - 3 \right]$ 个。若 $r-4l+10$ 是偶数, 对上一步所得图实施 $\frac{r-4l+10}{2}$ 次互不相同的 D 型剖分运算, 若 $r-4l+10$ 是奇数, 对上一步所得图实施 $\frac{r-4l+11}{2}$ 次互不相同的 D 型剖分运算, 再令 $t = t-r+4l-10-3 = t-r+4l-13$; 若 $t = 0$ 则算法结束, 否则转入第 8 步。

第 8 步: 在上述 $W_{p+\binom{l-1}{3}+4l-9}$ (当 $l \equiv 2 \pmod{4}$ 时, 为 $W_{p+\binom{l-1}{3}+4l-10}$) 的点被多重集可区分的 l -E-全染色的基础上, 令 i 依次为 $2, 3, \dots, l-1$, 进行 $[l; i]$ -H 型剖分运算。算法结束。

由上述算法可得 W_{p+r-1} (当 $l \equiv 0 \pmod{4}$ 时, 为 W_{p+r}) 的点被多重集可区分的 l -E-全染色, 其中 $\binom{l-1}{3} + 4l-10 \leq r \leq 2 \binom{l-1}{2} + \binom{l}{3} - 2$ 。

综上, W_n 存在点被多重集可区分的 l -E-全染色。

将轮 W_{n-2} 的外围圈上的边 $v_{n-2}v_1$ 删去之后, 在 v_1 处增加 1 个 2 度邻点 v_{n-1} , 在 v_{n-2} 处增加 1 个 2 度邻点 v_n , 并且使这 2 个点都与轮心 v_0 相邻, 得到扇 F_n 。

定理 2 扇 F_n 的点被多重集可区分的 E-全染色数为

$$\tilde{\chi}_{vr}^e(F_n) = \begin{cases} 4, & 3 \leq n \leq 20 \\ l, & n \geq 21, n \in \begin{cases} [M(l-1)+3, M(l)+1], & l \equiv 0 \pmod{4}, \\ [M(l-1)+2, M(l)+2], & l \equiv 1 \pmod{4}, \\ [M(l-1)+3, M(l)+2], & l \equiv 2 \pmod{4} \text{ 或 } l \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases} \end{cases}$$

证明 根据命题1与 F_n 的性质, F_n 中2度点有2个,3度点有 $n-1$ 个, n 度点有1个,则有

$$\tilde{\eta}(F_n) = \min \left\{ l \begin{cases} \binom{l-1}{1} \binom{l+1}{3} - \binom{l-1}{2} \binom{l-1}{2} + \binom{l-1}{3} \binom{l-3}{1} - \binom{l-1}{4} \geq n-2; \\ \binom{l-1}{1} \binom{l}{2} - \binom{l-1}{2} \binom{l-2}{1} + \binom{l-1}{3} \geq 2; \\ \binom{l-1}{1} \binom{l+i-2}{i} - \binom{l-1}{2} \binom{l+i-4}{i-1} + \dots + (-1)^{l-1} \binom{l-1}{l-2} \binom{i-l+3}{i-l+3} \geq 1. \end{cases} \right.$$

假设 F_n 存在点被多重集可区别的 l -E-全染色 $h_n\{1, 2, \dots, l\}$,不妨设序列

$$h_n = (h_n(v_0v_1)h_n(v_1)h_n(v_1v_2), h_n(v_1v_2)h_n(v_0v_2)h_n(v_2)h_n(v_2v_3), \dots, h_n(v_{n-1}v_n)h_n(v_n)h_n(v_0v_n)).$$

情形1 $3 \leq n \leq 20$.

首先证明当 $3 \leq n \leq 11$ 时, $\tilde{\chi}_{vr}^e(F_n) > 3$ (尽管此时 $\tilde{\eta}(F_n) = 3$,但 $\tilde{\chi}_{vr}^e(F_n) > 3$)。先证 F_n 不存在点被多重集可区别的3-E-全染色。

与定理1的情形1类似,推出矛盾,即可得到, $\tilde{\chi}_{vr}^e(F_n) > 3$ 。

其次当 $11 < n \leq 20$ 时,有 $\tilde{\eta}(F_n) = 4 = \tilde{\chi}_{vr}^e(W_{n-2})$,由命题1,有 $\tilde{\chi}_{vr}^e(F_n) \geq 4$ 。

最后给出当 $3 \leq n \leq 20$ 时, F_n 的点被多重集可区别的4-E-全染色。

$$\begin{aligned} h_3 &= (231, 1\ 321, 143)。 \\ h_4 &= (234, 4\ 321, 1\ 433, 323)。 \\ h_5 &= (234, 4\ 231, 1\ 232, 2\ 243, 323)。 \end{aligned}$$

在上述 W_{n-2} 的点被多重集可区别的 l -E-全染色的基础上,再给颜色为4的边进行以下过程:删去边 v_1v_{n-2} ,在 v_1 处增加1个2度邻点 v_{n-1} ,在 v_{n-2} 处增加1个2度邻点 v_n ,并且让这2个点都与轮心 v_0 相邻,使得 v_{n-1} 的颜色为2染点 v_n 的颜色为3且 $v_1v_{n-1}, v_{n-2}v_n$ 的颜色仍为4,则

$$\text{当 } n=6 \text{ 则 } n-2=4 \text{ 时, } h_6 = (324, 4\ 234, 4\ 321, 1\ 343, 3\ 324, 434)。$$

依此类推,可得:

$$\text{当 } n=7 \text{ 则 } n-2=5 \text{ 时, } h_7 = (324, 4\ 234, 4\ 321, 1\ 232, 2\ 243, 3\ 324, 434)。$$

$$\text{当 } n=8 \text{ 则 } n-2=6 \text{ 时, } h_8 = (324, 4\ 234, 4\ 321, 1\ 421, 1\ 232, 2\ 243, 3\ 324, 434)。$$

依此类推,在上述 W_{n-2} 的点被多重集可区别的 l -E-全染色的基础上,再对颜色为4的边进行以下过程:将外围圈上的边 $v_{n-2}v_1$ 删去之后,在 v_1 处增加1个2度邻点 v_{n-1} ,在 v_{n-2} 处增加1个2度邻点 v_n ,并且让这2个点都与轮心 v_0 相邻,让 v_{n-1} 的着色与 v_{n-2} 的色相同,让 v_n 的着色与 v_1 的色相同,且与顶点 v_n, v_{n-1} 关联的边的颜色仍继承原边 $v_{n-2}v_1$ 的颜色。

可得到 F_n 的点被多重集可区别的4-E-全染色,其中 $4 \leq n \leq 20$ 。

$$\text{情形2 } n \geq 21, n \in \begin{cases} [M(l-1)+3, M(l)+1], & l \equiv 0 \pmod{4}, \\ [M(l-1)+2, M(l)+2], & l \equiv 1 \pmod{4}, \\ [M(l-1)+3, M(l)+2], & l \equiv 2 \pmod{4} \text{ 或 } l \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

当 $n \geq 21$ 时, $\tilde{\eta}(F_n) = l$,由命题1,有 $\tilde{\chi}_{vr}^e(F_n) \geq l$ 。下证 F_n 存在点被多重集可区别的 l -E-全染色。

在 $n \geq 21$ 时,在上述 W_{n-2} 的点被多重集可区别的 l -E-全染色的基础上,再进行下述过程:将外围圈上与轮心 v_0 颜色不同的边 $v_{n-2}v_1$ 删去之后,在 v_1 处增加1个2度邻点 v_{n-1} ,在 v_{n-2} 处增加1个2度邻点 v_n ,并且让这2个点都与轮心 v_0 相邻,让 v_{n-1} 的着色与 v_{n-2} 的色相同,让 v_n 的着色与 v_1 的色相同,且与顶点 v_n, v_{n-1} 关联的边的颜色仍继承原边 $v_{n-2}v_1$ 的颜色。

最终,可得到 F_n 的点被多重集可区别的 l -E-全染色。

参考文献:

[1] BUEEIS A C, SCHELP R H. Vertex-distinguishing proper edge-coloring[J]. Journal Graph Theory, 1997, 26(2):73-82.

- [2] CERNY J, HORNAK M, SOTAK R. Observability of a graph[J]. *Mathematica Slovaca*, 1996, 46(1):21-31.
- [3] BALISTER P N, RIORDAN O M, SCHELP R H. Vertex-distinguishing edge colorings of graphs[J]. *Journal of Graph Theory*, 2003, 42(2):95-109.
- [4] 辛小青,陈祥恩. m 个点不交的 C_4 的并的点可区别全染色[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2010, 45(10):35-39,44.
XIN Xiaoqing, CHEN Xiang'en. Vertex distinguishing total chromatic number of mC_4 [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2010, 45(10):35-39,44.
- [5] 文飞,王治文,王鸿杰,等.若干补倍图的点可区别全染色[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2011, 46(2):45-50.
WEN Fei, WANG Zhiwen, WANG Hongjie, et al. Vertex-distinguishing total coloring of some complement double graph[J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2011, 46(2):45-50.
- [6] ZHANG Z F, QIU P X, XV B G, et al. Vertex-distinguishing total coloring of graphs[J]. *ARS Combinatoria*, 2008, 87:33-45.
- [7] 张辉,陈祥恩,王治文.轮和扇三类联图的邻点被扩展和可区别全染色[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2019, 58(3):86-93.
ZHANG Hui, CHEN Xiang'en, WANG Zhiwen. The neighbor expanded sum distinguishing total colorings of three types of join graphs of wheel and fan[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2019, 58(3):86-93.
- [8] CHEN X E, ZU Y, XU J. Vertex-distinguishing E-total colorings of graphs[J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2011, 36(8):1485-1500.
- [9] 杨澜,陈祥恩.完全二部图 $K_{(8,n)}$ ($472 < n < 980$) 的点可区别 E-全染色[J]. *厦门大学学报(自然科学版)*, 2020, 59(4):507-511.
YANG Lan, CHEN Xiang'en. Vertex-distinguishing E-total coloring of complete bipartite graph $K_{(8,n)}$ ($472 < n < 980$) [J]. *Journal of Xiamen University (Natural Science)*, 2020, 59(4):507-511.
- [10] 陈祥恩,杨伟光.完全二部图 $K_{(9,n)}$ ($93 < n < 216$) 的点可区别 E-全染色[J]. *华东师范大学学报(自然科学版)*, 2020(6):24-29.
CHEN Xiang'en, YANG Weiguang. Vertex-distinguishing E-total coloring of complete bipartite graph $K_{(9,n)}$ with $93 < n < 216$ [J]. *Journal of East China Normal University (Natural Science)*, 2020(6):24-29.
- [11] 包丽娅,陈祥恩,王治文.完全二部图 $K_{(10,n)}$ ($215 < n < 466$) 的点可区别 E-全染色[J]. *浙江大学学报(理学版)*, 2020, 47(1):60-66.
BAO Liya, CHEN Xiang'en, WANG Zhiwen. Vertex-distinguishing E-total coloring of complete bipartite graph $K_{(10,n)}$ with $215 < n < 466$ [J]. *Journal of Zhejiang University (Science Edition)*, 2020, 47(1):60-66.

(编辑:祁业卿)

(上接第 37 页)

- [11] MAGID A. *Lectures on differential Galois theory*[M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1994.
- [12] RACHUNEK J, ŠALOUNOVA D. Derivations on algebras of a non-commutative generalization of the Łukasiewicz logic[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2018, 333:11-16.
- [13] LODAY J L. On the operad of associative algebras with derivation[J]. *Georgian Mathematical Journal*, 2010, 17(2):347-372.
- [14] TANG R, FRÉGIER Y, SHENG Y H. Cohomologies of a Lie algebra with a derivation and applications[J]. *Journal of Algebra*, 2019, 534(3):65-99.
- [15] WU Xueru, MA Yao, CHEN Liangyun. Abelian extensions of Lie triple systems with derivations[J]. *Electronic Research Archive*, 2022, 30(3):1087-1103.
- [16] GUO Shuangjian. Central extensions and deformations of Lie triple systems with a derivation[J]. *Journal of Mathematical Research with Applications*, 2022, 42(2):189-198.
- [17] ZHAO Xiaodong, CHEN Liangyun. Cohomologies and deformations of Lie superalgebras with superderivations[EB/OL]. (2021-10-27)[2022-12-10]. <https://www.researchgate.net/publication/355675478>.
- [18] 郭双建.具有导子的 Lie-Yamaguti 代数[J]. *数学学报(中文版)*, 2023, 66(3):547-556.
GUO Shuangjian. Lie-Yamaguti algebras with a derivation[J]. *Acta Mathematica Sinica(Chinese Series)*, 2023, 66(3):547-556.
- [19] TENG Wen, YOU Taijie. Derivations and deformations of Lie-Yamaguti color algebras[J]. *Journal of Mathematical Research with Applications*, 2022, 42(1):15-30.

(编辑:李艺)