山东大学学报(理学版)2024 年 2 月 第 59 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.59, No.2, 2024

E-mail:xblxb@ sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2024)02-0100-05　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.663

顿范畴中的相对 Gorenstein 投射对象

罗金萍,梁力*
(兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:给定 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$,以及右正合函子 $\mathscr{F}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$,依据 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 中的相对 Gorenstein 投射对象,给出了顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中相对 Gorenstein 投射对象的等价刻画。
关键词:顿范畴;相对 Gorenstein 投射对象;Abel 范畴
中图分类号:O154.2　　**文献标志码**:A
引用格式:罗金萍,梁力.顿范畴中的相对 Gorenstein 投射对象[J].山东大学学报(理学版),2024,59(2):100-104,119.

Relative Gorenstein projective objects in comma categories

LUO Jinping, LIANG Li*
(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: Given Abelian categories $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, and a right exact functor $\mathscr{F}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$, an equivalent characterization for relative Gorenstein projective objects in the comma category $(\mathscr{F},\mathfrak{B})$ is given in terms of relative Gorenstein projective objects in $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$.
Key words: comma category; relative Gorenstein projective object; Abelian category

1　引言及准备知识

对于任意的 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 以及右正合函子 $\mathscr{F}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$,顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中的对象是一个三元组 $\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_\phi$,其中 M_1 是 $\mathfrak{A}$ 中的对象,M_2 是 $\mathfrak{B}$ 中的对象,$\phi:\mathscr{F}(M_1)\to M_2$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的态射。当 $\mathscr{F}$是右正合函子时,顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$是 Abel 范畴。1975 年,Fossum 等[1]研究了顿范畴中的投射对象和内射对象。需要指出的是,顿范畴的一个重要例子是三角矩阵环上的模范畴。2022 年,Hu 和 Zhu[2]以及 Peng 等[3]研究了顿范畴中的 Gorenstein 投射对象,得到了顿范畴中 Gorenstein 投射对象的等价刻画。2016 年,Bennis 等[4]引入了相对 Gorenstein 投射对象的定义。2021 年,Bennis 等[5]得到了三角矩阵环上相对 Gorenstein 投射对象的等价刻画。受上述启发,本文给出了顿范畴中相对 Gorenstein 投射对象的等价刻画,即证明了如下定理:

定理 1.1　令$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$是顿范畴,若 $\mathscr{F}$是相容的并且保持直和,则对于顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中的对象$\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_\phi$以下等价:

收稿日期:2022-12-27;**网络出版时间**:2023-08-28 12:28:05
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20230825.1500.008
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12271230);兰州交通大学“百名青年优秀人才培养计划”基金资助项目;甘肃省自然科学基金资助项目(21JR7RA297)
第一作者简介:罗金萍(1997—),女,硕士研究生,研究方向为同调代数. E-mail: 1209029714@ qq.com
***通信作者简介**:梁力(1980—),男,教授,博士,研究方向为同调代数. E-mail: lliang@ lzjtu.edu.cn

(1) $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_\phi$ 是顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中的相对 Gorenstein 投射对象;

(2) $\phi:\mathscr{F}(M_1)\to M_2$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的单态射,Coker ϕ 是 $\mathfrak{B}$ 中的相对 Gorenstein 投射对象,M_1 是 $\mathfrak{A}$ 中的相对 Gorenstein 投射对象。

以下给出了一些准备知识,本文中的 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 均为有足够投射对象的 Abel 范畴。$\mathrm{Proj}(\mathfrak{A})$表示 $\mathfrak{A}$ 中所有投射对象构成的类。令 $C\in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$,则$\mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C)$表示 $\mathfrak{A}$ 中同构于 C 的拷贝直和的直和项的对象构成的类。

定义 1.1[1] 令 $\mathscr{F}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是右正合函子,则顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$定义如下:

(1) $(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中的对象为三元组$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_\phi$,其中 M_1 是 $\mathfrak{A}$ 中的对象,M_2 是 $\mathfrak{B}$ 中的对象,$\phi:\mathscr{F}(M_1)\to M_2$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的态射。在本文中无特殊说明,通常可省略 ϕ。

(2) $(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中的态射为二元组$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_\phi\to\begin{pmatrix} M_1' \\ M_2' \end{pmatrix}_{\phi'}$,其中 $a:M_1\to M_1'$是 $\mathfrak{A}$ 中的态射,$b:M_2\to M_2'$是 $\mathfrak{B}$ 中的态射,使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(M_1) & \xrightarrow{\mathscr{F}(a)} & \mathscr{F}(M_1') \\ \phi\downarrow & & \downarrow\phi' \\ M_2 & \xrightarrow{b} & M_2' \end{array}。$$

定义 1.2[2] 令 $\mathscr{F}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是一个右正合函子,定义下列函子:

$\mathscr{H}:\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\to(\mathscr{F},\mathfrak{B})$,$\mathscr{H}(M_1,M_2)=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2\oplus\mathscr{F}(M_1) \end{pmatrix}_{\binom{0}{1}}$,$\mathscr{H}(a,b)=\begin{pmatrix} a \\ b\oplus\mathscr{F}(a) \end{pmatrix}$,其中$(M_1,M_2)$是 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ 中的对象,(a,b)是 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ 中的态射。

定义 1.3[4] 给定 $C\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$,称 $\mathfrak{A}$ 中对象 M 是相对 Gorenstein 投射的,如果存在 $\mathfrak{A}$ 中的正合列

$$P^{\cdot}=\cdots\to P_1\to P_0\to C_0\to C_1\to\cdots,$$

其中$P_i\in\mathrm{Proj}(\mathfrak{A})$,$C_i\in\mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C)$,使得 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(-,\mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C))$保持其正合性,且 $M\cong\mathrm{Im}(P_0\to C_0)$。用$G_C\mathrm{Proj}(\mathfrak{A})$表示 $\mathfrak{A}$ 中所有相对 Gorenstein 投射对象构成的类。

2 相对 Gorenstein 投射对象

在本章中,固定$(C_1,C_2)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$,$C=\mathscr{H}(C_1,C_2)\in(\mathscr{F},\mathfrak{B})$。

定义 2.1 称函子 $\mathscr{F}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是相容的,如果满足以下条件:

(1) 对于 $\mathfrak{A}$ 中的任意正合列

$$Q^{\cdot}=\cdots\to G_1^1\to G_1^0\to C_1^0\to C_1^1\to\cdots,$$

其中$G_1^i\in\mathrm{Proj}(\mathfrak{A})$,$C_1^i\in\mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1)$,有 $\mathscr{F}(Q^{\cdot})$正合。

(2) 对于 $\mathfrak{B}$ 中的任意满足 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(P^{\cdot},\mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2))$正合的正合列

$$P^{\cdot}=\cdots\to G_2^1\to G_2^0\to C_2^0\to C_2^1\to\cdots,$$

其中$G_2^i\in\mathrm{Proj}(\mathfrak{B})$,$C_2^i\in\mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2)$,有 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(-,\mathscr{F}(\mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1)))$保持其正合性。

引理 2.1 设$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_\phi$是顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中的对象,则以下等价:

(1) $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_\phi$ 是顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中的投射对象。

(2) $\phi:\mathscr{F}(M_1)\to M_2$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的单态射,Coker ϕ 是 $\mathfrak{B}$ 中的投射对象,M_1 是 $\mathfrak{A}$ 中的投射对象。

证明 具体可参考文献[3,引理3.1]的证明。

引理 2.2 设 $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}_{\phi}$ 是顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中的对象,若$\mathscr{F}$保持直和,则以下等价:

（1）$X\in \mathrm{Add}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(C)$。

（2）$X\cong \mathscr{H}(X_1,\mathrm{Coker}\,\phi)$,其中$X_1\in \mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1)$,$\mathrm{Coker}\,\phi\in \mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2)$。

在这种情况下,ϕ 是单态射。

证明 （2）⇒（1）。假设$X_1\in \mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1)$, $\mathrm{Coker}\,\phi\in \mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2)$,则存在$(R_1,R_2)\in \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$,使得 $X_1\oplus R_1=C_1^{(I_1)}$,$\mathrm{Coker}\,\phi\oplus R_2=C_2^{(I_2)}$。不妨假设 $I_1=I_2$,则有

$$\begin{aligned}X\oplus\mathscr{H}(R_1,R_2)&\cong\mathscr{H}(X_1,\mathrm{Coker}\,\phi)\oplus\mathscr{H}(R_1,R_2)=\begin{pmatrix}X_1\\\mathrm{Coker}\,\phi\oplus\mathscr{F}(X_1)\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}R_1\\R_2\oplus\mathscr{F}(R_1)\end{pmatrix}\\&\cong\begin{pmatrix}X_1\oplus R_1\\\mathrm{Coker}\,\phi\oplus\mathscr{F}(X_1)\oplus R_2\oplus\mathscr{F}(R_1)\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}C_1^{(I_1)}\\C_2^{(I_2)}\oplus\mathscr{F}(X_1)\oplus\mathscr{F}(R_1)\end{pmatrix}\\&\cong\begin{pmatrix}C_1^{(I_1)}\\C_2^{(I_2)}\oplus\mathscr{F}(C_1^{(I_1)})\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}C_1^{(I_1)}\\C_2^{(I_2)}\oplus\mathscr{F}(C_1)^{(I_1)}\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}C_1\\C_2\oplus\mathscr{F}(C_1)\end{pmatrix}^{(I_1)},\end{aligned}$$

因此,$X\in \mathrm{Add}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(C)$。

（1）⇒（2）。假设 $X\in \mathrm{Add}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(C)$,则存在顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中的对象 $R=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\end{pmatrix}_{\phi'}$,使得 $X\oplus R=C^{(I)}=\mathscr{H}(C_1,C_2)^{(I)}=\begin{pmatrix}C_1^{(I)}\\C_2^{(I)}\oplus\mathscr{F}(C_1^{(I)})\end{pmatrix}_{\phi''}$,其中 $\phi''=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$是单态射。注意到 X 是 $C^{(I)}$ 的直和因子,故 ϕ 是单态射。

现在考虑可裂的正合列 $0\to R\xrightarrow{\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}}C^{(I)}\xrightarrow{\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}}X\to 0$,则有下列行列正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}(R_1) \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] & \mathscr{F}(C_1^{(I)}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & \mathscr{F}(X_1) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_2 \arrow[r, "\lambda_2"] \arrow[d, "\overline{\phi'}"] & C_2^{(I)}\oplus\mathscr{F}(C_1^{(I)}) \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "\overline{\phi''}"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\phi}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}\,\phi' \arrow[r, "\overline{\lambda_2}"] \arrow[d] & C_2^{(I)} \arrow[r, "\overline{\gamma_2}"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\,\phi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

。

因为$\gamma_1:C_1^{(I)}\to X_1$,$\overline{\gamma_2}:C_2^{(I)}\to\mathrm{Coker}\,\phi$ 均是可裂的满态射,所以 $X_1\in \mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1)$,$\mathrm{Coker}\,\phi\in \mathrm{Add}_{\mathscr{B}}(C_2)$。接下来证明 $X\cong\mathscr{H}(X_1,\mathrm{Coker}\,\phi)$,只需证 $0\to\mathscr{F}(X_1)\xrightarrow{\phi}X_2\longrightarrow\mathrm{Coker}\,\phi\to 0$ 是可裂的。假设 α 是$\overline{\gamma_2}$的 retraction。定义 $i:C_2^{(I)}\to C_2^{(I)}\oplus\mathscr{F}(C_1^{(I)})$是自然嵌入,则有 $\overline{\phi}\gamma_2 i\alpha=\overline{\gamma_2}\ \overline{\phi''}i\alpha=\overline{\gamma_2}\alpha=1_{\mathrm{Coker}\,\phi}$,所以短正合列 $0\to\mathscr{F}(X_1)\xrightarrow{\phi}X_2\to\mathrm{Coker}\,\phi\to 0$是可裂的。

引理 2.3 设$\mathscr{F}$是相容的并且保持直和,则:

（1）如果$M_1\in G_{C_1}\mathrm{Proj}(\mathfrak{A})$,那么$\begin{pmatrix}M_1\\\mathscr{F}(M_1)\end{pmatrix}\in G_C\mathrm{Proj}(\mathscr{F},\mathfrak{B})$。

（2）如果$M_2\in G_{C_2}\mathrm{Proj}(\mathfrak{B})$,那么$\begin{pmatrix}0\\M_2\end{pmatrix}\in G_C\mathrm{Proj}(\mathscr{F},\mathfrak{B})$。

证明　(1) 假设$M_1 \in G_{C_1}\mathrm{Proj}(\mathfrak{A})$,则在 $\mathfrak{A}$ 中存在正合列

$$Q^{\cdot} = \cdots \to P_1^1 \to P_1^0 \to C_1^0 \to C_1^1 \to \cdots,$$

其中$P_1^i \in \mathrm{Proj}(\mathfrak{A})$,$C_1^i \in \mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1)$,使得 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(-,\mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1))$保持其正合性,且 $M_1 \cong \mathrm{Im}(P_1^0 \to C_1^0)$。因为$\mathscr{F}$是相容的,所以$\mathscr{F}(Q^{\cdot})$是正合的,表明

$$\mathscr{H}(Q^{\cdot},0) = \cdots \to \mathscr{H}(P_1^1,0) \longrightarrow \mathscr{H}(P_1^0,0) \to \mathscr{H}(C_1^0,0) \longrightarrow \mathscr{H}(C_1^1,0) \to \cdots$$

是正合的,且$\begin{pmatrix} M_1 \\ \mathscr{F}(M_1) \end{pmatrix} \cong \mathrm{Im}(\mathscr{H}(P_1^0,0) \to \mathscr{H}(C_1^0,0))$。通过引理 2.1、2.2 可知,$\mathscr{H}(P_1^i,0) \in \mathrm{Proj}(\mathscr{F},\mathfrak{B})$,$\mathscr{H}(C_1^i,0) \in \mathrm{Add}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(C)$。如果 $X \in \mathrm{Add}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(C)$,那么由引理 2.2 知,$X_1 \in \mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1)$。结合伴随同构,可得$\mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(\mathscr{H}(Q^{\cdot},0),X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(Q^{\cdot},X_1)$是正合的,因此$\begin{pmatrix} M_1 \\ \mathscr{F}(M_1) \end{pmatrix} \in G_C\mathrm{Proj}(\mathscr{F},\mathfrak{B})$。

(2) 假设$M_2 \in G_{C_2}\mathrm{Proj}(\mathfrak{B})$,则在 $\mathfrak{B}$ 中存在正合列

$$P^{\cdot} = \cdots \to P_2^1 \to P_2^0 \to C_2^0 \to C_2^1 \to \cdots,$$

其中$P_2^i \in \mathrm{Proj}(\mathfrak{B})$,$C_2^i \in \mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2)$,使得 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(-,\mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2))$保持其正合性,且 $M_2 \cong \mathrm{Im}(P_2^0 \to C_2^0)$。清楚地,

$$\mathscr{H}(0,P^{\cdot}) = \cdots \to \mathscr{H}(0,P_2^1) \to \mathscr{H}(0,P_2^0) \longrightarrow \mathscr{H}(0,C_2^0) \longrightarrow \mathscr{H}(0,C_2^1) \to \cdots$$

是正合的,且$\begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix} \cong \mathrm{Im}(\mathscr{H}(0,P_2^0) \to \mathscr{H}(0,C_2^0))$。通过引理 2.1、2.2 可知,$\mathscr{H}(0,P_2^i) \in \mathrm{Proj}(\mathscr{F},\mathfrak{B})$,$\mathscr{H}(0,C_2^i) \in \mathrm{Add}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(C)$。假设 $X \in \mathrm{Add}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(C)$,由引理 2.2 可知,$X \cong \mathscr{H}(X_1,X_2)$,其中$X_1 \in \mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1)$,$X_2 \in \mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2)$。结合伴随同构,可得

$$\mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(\mathscr{H}(0,P^{\cdot}),X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(P^{\cdot},X_2) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(P^{\cdot},\mathscr{F}(X_1))。$$

因为$\mathscr{F}$是相容的,并且 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(P^{\cdot},\mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2))$是正合的,所以 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(P^{\cdot},\mathscr{F}(X_1))$是正合的,因此$\mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(\mathscr{H}(0,P^{\cdot}),X)$是正合的,故$\begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix} \in G_C\mathrm{Proj}(\mathscr{F},\mathfrak{B})$。

定理 1.1 的证明　(2)⇒(1)。假设 $\phi:\mathscr{F}(M_1) \to M_2$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的单态射,则在顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中存在正合列

$$0 \to \begin{pmatrix} M_1 \\ \mathscr{F}(M_1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\phi} \to \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Coker}\,\phi \end{pmatrix} \to 0。$$

因为$M_1 \in G_{C_1}\mathrm{Proj}(\mathfrak{A})$,$\mathrm{Coker}\,\phi \in G_{C_2}\mathrm{Proj}(\mathfrak{B})$,所以由引理 2.3 可知,$\begin{pmatrix} M_1 \\ \mathscr{F}(M_1) \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Coker}\,\phi \end{pmatrix} \in G_C\mathrm{Proj}(\mathscr{F},\mathfrak{B})$。又因为 $G_C\mathrm{Proj}(\mathscr{F},\mathfrak{B})$是关于扩张封闭的(见文献[4,命题 2.5]),所以$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\phi} \in G_C\mathrm{Proj}(\mathscr{F},\mathfrak{B})$。

(1)⇒(2)。假设$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\phi} \in G_C\mathrm{Proj}(\mathscr{F},\mathfrak{B})$,则在顿范畴$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$中存在正合列

$$L^{\cdot} = \cdots \to \begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \end{pmatrix}_{\phi^1} \to \begin{pmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}_{\phi^0} \to \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix}_{\phi_0} \to \begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_2^1 \end{pmatrix}_{\phi_1} \to \cdots,$$

其中$\begin{pmatrix} P_1^i \\ P_2^i \end{pmatrix}_{\phi^i} \in \mathrm{Proj}(\mathscr{F},\mathfrak{B})$,$\begin{pmatrix} C_1^i \\ C_2^i \end{pmatrix}_{\phi_i} \in \mathrm{Add}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(C)$,使得 $\mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(-,\mathrm{Add}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(C))$保持其正合性,并且$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\phi} \cong \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}_{\phi^0} \to \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix}_{\phi_0}\right)$。那么在 $\mathfrak{A}$ 中可得到正合列

$$Q^{\cdot} = \cdots \to P_1^1 \to P_1^0 \to C_1^0 \to C_1^1 \to \cdots,$$

并且 $M_1 \cong \mathrm{Im}(P_1^0 \to C_1^0)$。通过引理 2.1、2.2 可知，$P_1^i \in \mathrm{Proj}(\mathfrak{A})$，$C_1^i \in \mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1)$。因为 $\mathscr{F}$ 是相容的，所以 $\mathscr{F}(Q^{\cdot})$ 是正合的，并且 $\mathscr{F}(M_1) \cong \mathrm{Im}(\mathscr{F}(P_1^0) \to \mathscr{F}(C_1^0))$。因为从 $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\phi}$ 到 $\begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix}_{\phi_0}$ 是单态射，所以有单态射 $\alpha_1: M_1 \to C_1^0$，$\alpha_2: M_2 \to C_2^0$。注意到 $\mathscr{F}(\alpha_1): \mathscr{F}(M_1) \to \mathscr{F}(C_1^0)$ 是单态射，故有下列交换图：

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(M_1) \arrow[r, "\mathscr{F}(\alpha_1)"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathscr{F}(C_1^0) \arrow[d, "\phi_0"] \\
M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & C_2^0
\end{tikzcd}$$

。

由引理 2.2 可知，ϕ_0 是单态射，因此 ϕ 是单态射。

另外，通过引理 2.1、2.2 可知，对于 $\forall\, i$，ϕ^i，ϕ_i 都是单态射，则有下面列正合的交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & \mathscr{F}(P_1^1) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^1"] & \mathscr{F}(P_1^0) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^0"] & \mathscr{F}(C_1^0) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0"] & \mathscr{F}(C_1^1) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_2^1 \arrow[r] \arrow[d] & P_2^0 \arrow[r] \arrow[d] & C_2^0 \arrow[r] \arrow[d] & C_2^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Coker}\,\phi^1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\,\phi^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\,\phi_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\,\phi_1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

。

因为第 1、2 都正合，所以可得到 $\mathfrak{B}$ 中的正合列

$$P^{\cdot} = \cdots \to \mathrm{Coker}\,\phi^1 \to \mathrm{Coker}\,\phi^0 \to \mathrm{Coker}\,\phi_0 \to \mathrm{Coker}\,\phi_1 \to \cdots,$$

并且 $\mathrm{Coker}\,\phi \cong \mathrm{Im}(\mathrm{Coker}\,\phi^0 \to \mathrm{Coker}\,\phi_0)$。由引理 2.1、2.2 知，$\mathrm{Coker}\,\phi^i \in \mathrm{Proj}(\mathfrak{B})$，$\mathrm{Coker}\,\phi_i \in \mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2)$。下证 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(P^{\cdot}, \mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2))$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(Q^{\cdot}, \mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1))$ 是正合的。假设 $X_2 \in \mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2)$，故由引理 2.2 知，$\begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Add}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(C)$。结合伴随同构知 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(P^{\cdot}, X_2) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}\left(L^{\cdot}, \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}\right)$ 是正合的，因此 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(P^{\cdot}, \mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2))$ 是正合的，说明 $\mathrm{Coker}\,\phi \in G_{C_2}\mathrm{Proj}(\mathfrak{B})$。

假设 $X_1 \in \mathrm{Add}_{\mathfrak{A}}(C_1)$，用 $\mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(L^{\cdot}, -)$ 作用于可裂的短正合列

$$0 \to \begin{pmatrix} 0 \\ \mathscr{F}(X_1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X_1 \\ \mathscr{F}(X_1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \to 0$$

上，可得复形的正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}\left(L^{\cdot}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathscr{F}(X_1) \end{pmatrix}\right) \to \mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}\left(L^{\cdot}, \begin{pmatrix} X_1 \\ \mathscr{F}(X_1) \end{pmatrix}\right) \to \mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}\left(L^{\cdot}, \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \to 0。$$

容易验证 $\mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}\left(L^{\cdot}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathscr{F}(X_1) \end{pmatrix}\right) \cong \mathrm{Hom}_{B}(P^{\cdot}, \mathscr{F}(X_1))$，并且

$$\mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}\left(L^{\cdot}, \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(Q^{\cdot}, X_1),$$

故可得复形的正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(P^{\cdot}, \mathscr{F}(X_1)) \to \mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}\left(L^{\cdot}, \begin{pmatrix} X_1 \\ \mathscr{F}(X_1) \end{pmatrix}\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(Q^{\cdot}, X_1) \to 0。$$

（下转第 119 页）