山东大学学报(理学版)2024 年 2 月 第 59 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.59, No.2, 2024
© 山东大学科技期刊社版权所有
E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2024)02-0047-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.347

树图的 2-距离和可区别染色

刘欢[1],强会英[1*],王洪申[2],白羽[1]
(1.兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070; 2.兰州理工大学机电工程学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要:根据树图的结构特点,应用数学归纳法、组合分析法及组合零点定理,研究了图 G 的 2-距离和可区别边染色和全染色问题,得到了树的 2-距离和可区别边色数和全色数。
关键词:树图;2-距离和可区别边色数;2-距离和可区别全色数
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A
引用格式:刘欢,强会英,王洪申,等.树图的 2-距离和可区别染色[J].山东大学学报(理学版),2024,59(2):47-52,58.

2-distance sum distinguishing coloring of trees

LIU Huan[1], QIANG Huiying[1*], WANG Hongshen[2], BAI Yu[1]
(1. School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China; 2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, Gansu, China)

Abstract:Based on the structural characteristics of the trees,the 2-distance sum distinguishing edge(total) coloring of trees are studied by using the mathematical induction, combination analytic method and Combinatorial Nullstellensatz, and the 2-distance sum distinguishing edge(total) chromatic numbers are obtained.
Key words:tree; 2-distance sum distinguishing edge chromatic number; 2-distance sum distinguishing total chromatic number

0 引言

Flandrin 等[1]考虑了相邻顶点色集合的元素之和,首次提出图的邻和可区别边染色的概念,并给出一些特殊图的邻和可区别边色数。Pilsniak 等[2]给出了图的邻和可区别全染色的概念,提出了猜想:对于阶数不小于 2 的图 G,邻和可区别全色数 $\chi''_{\Sigma}(G)\leqslant\Delta+3$。文献[3-6]中研究了一些简单图的邻和可区别边染色和全染色问题。强会英等[7]讨论了无 K_4-子式图的 2-距离和可区别边染色,得到它们的 2-距离和可区别边色数的一个上界。本文在上述文献的基础上,研究了树图的 2-距离和可区别边染色和全染色问题。

文中讨论的图为有限、无向的简单图,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集,$|V(G)|$ 称为图 G 的阶数,$\Delta(G)$ 是图 G 的最大度,$N(v)$ 表示 v 的邻点集。图 G 的直径是指 G 中任意两点之间距离的最大值,记为 $\mathrm{diam}(G)$。令 $C=\{1,2,\cdots,k\}$ 为 k-色集($k\in\mathbf{N}^+$),$C(u)$ 称为点 u 的色集合,$\overline{C}(u)$ 是点 u 在集合 C 中的补集,$d_G(u)$ 表示点 u 的度,简记为 $d(u)$。若 $d(u)=k$($d(u)\geqslant k$,$d(u)\leqslant k$),则称点 u 为 k-点(k^+-点,k^--点)。其他未加说明的术语,请参考文献[8-12]。

收稿日期:2022-06-17;**网络出版时间**:2023-09-06 15:26:49
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20230905.0855.002
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61962035)
第一作者简介:刘欢(1998—),女,硕士研究生,研究方向为图论方向. E-mail: 3466582439@qq.com
* **通信作者简介**:强会英(1968—),女,教授,硕士,研究方向为图论及其应用. E-mail: qhy2005ww@126.com

1　预备知识

定义 1[7]　令 f 是图 G 的一个正常 $[k]$-边染色,对 $\forall u,v\in V(G)$,$d_G(u,v)\leqslant 2$,若 $S(u)\neq S(v)$,其中 $S(u)=\sum\limits_{u\omega\in E(G)} f(u\omega)$,则称 f 为图 G 的 2-距离和可区别边染色。染色中用到的最小 k 值称为 G 的 2-距离和可区别边色数,记为 $\chi'_{2-\Sigma}(G)$。

定义 2[7]　令 ϕ 是图 G 的一个正常 $[k]$-全染色,对 $\forall u,v\in V(G)$,$d_G(u,v)\leqslant 2$,若 $g(u)\neq g(v)$,其中 $g(u)=\phi(u)+\sum\limits_{u\omega\in E(G)}\phi(u\omega)$,则称 ϕ 为图 G 的 2-距离和可区别全染色。染色中用到的最小 k 值称为 G 的 2-距离和可区别全色数,记为 $\chi''_{2-\Sigma}(G)$。

引理 1[7]　对于简单图 G,$\chi'_{2-\Sigma}(G)\geqslant\chi'_{\Sigma}(G)\geqslant\Delta(G)$,若图 G 存在 2 个距离不超过 2 的最大度点,则 $\chi'_{2-\Sigma}(G)\geqslant\chi'_{\Sigma}(G)\geqslant\Delta(G)+1$,其中 $\chi'_{\Sigma}(G)$ 表示图 G 的邻和可区别边色数。

引理 2[10]　若简单图 G 存在 2 个距离不超过 2 的最大度点,则 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant\Delta(G)+2$。

引理 3[10]　设 $n(n\geqslant 3)$ 阶树 T 的 $\mathrm{diam}(T)\geqslant 3$,则至少存在 T 的 2 个顶点 ω_1、ω_2,使 ω_i 的邻点中仅有一个不是悬挂点,且 $d_T(\omega_i)\geqslant 2(i=1,2)$。

引理 4[7]　对 $n(n\geqslant 2)$ 阶路图 P_n,有 $\chi'_{2-\Sigma}(P_n)=\begin{cases}2, & n=3,\\ 3, & n\geqslant 4;\end{cases}$　$\chi''_{2-\Sigma}(P_n)=\begin{cases}3, & n=2,\\ 4, & n\geqslant 3。\end{cases}$

引理 5[7]　对 $n+1$ 阶星图 $S_n(n\geqslant 2)$,有 $\chi''_{2-\Sigma}(S_n)=n+1$。

引理 6[9](组合零点定理)　令 F 为任一数域,$Q=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为属于 F 上的多项式,设 $\deg(Q)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$,其中 k_i 为非负整数,且 $C_Q(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n})\neq 0$,若 $S_1,S_2,\cdots,S_n\subseteq F$ 且 $|S_i|>k_i$,$1\leqslant i\leqslant n$,则存在 $s_1\in S_1$,$s_2\in S_2$,$\cdots$,$s_n\in S_n$,使得 $Q(s_1,s_2,\cdots,s_n)\neq 0$。

引理 7[12]　设 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^n$ 是关于 n 个变量的多项式,其中 $n\geqslant 2$,那么多项式 Q 中最高次项 $(x_1x_2x_3\cdots x_n)^n$ 的系数 $C_Q((x_1x_2x_3\cdots x_n)^n)\neq 0$。

2　主要结论

定理 1　设 T 是阶数 $n\geqslant 3$ 的树,若 T 的最大度点唯一,或任意 2 个最大度点的距离至少为 3,则 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)$;否则,$\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)+1$。

证明　当 $\Delta(T)=2$ 时,T 为路,由引理 4 可知,结论成立。

当 $\Delta(T)\geqslant 3$ 时,根据树图 T 的最大度点分布特征,分如下 2 种情形讨论。

情形 1　T 中最大度点唯一,或任意 2 个最大度点的距离至少为 3 时,由引理 1 可知,$\chi'_{2-\Sigma}(T)\geqslant\Delta(T)$。特殊地,当 $n=\Delta(T)+1$ 时,T 为星图,易得 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)$,如图 1 所示。

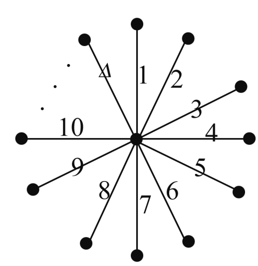

图 1　星图
Fig.1　Star Graph

当 $n>\Delta(T)+1$ 时,对树的阶数 n 做归纳。$n=5$ 或 $n=8$ 时,有 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)$,如图 2 所示。

假设 $n-1$ 阶树 T' 有结论 $\chi'_{2-\Sigma}(T')\leqslant\Delta(T')$ 成立。下面考虑 n 阶树 T。

令 $R=\{x\in V(T)\mid d_T(x)\geqslant 2\}$,且 x 在 T 中恰与一个非悬挂点相邻,由引理 3 知,$\mathrm{diam}(T)\geqslant 3$,$|R|\geqslant 2$,令 $w\in R$,则 $N_T(w)=\{u,v,y_1,y_2,\cdots,y_l\}$,其中,$d_T(u)\geqslant 2$,而 $d_T(v)=d_T(y_1)=\cdots=d_T(y_l)=1$。不妨令 $T'=T-v$,如图 3 所示。

由归纳假设,T' 存在 2-距离和可区别 $\Delta(T')$-边染色。树 T 与树 T' 结构相同,如果 T' 在添加 v 点之后得到的树 T 存在 2 个 2-距离以内的最大度点,根据引理 1,树 T 满足 2-距离和可区别边染色最少需要 $\Delta(T)+1$ 种色,此处不考虑这种情况,在情形 2 中讨论。现根据点 w 是否为树 T' 和树 T 中唯一的最大度点,分 2 种情

形讨论。

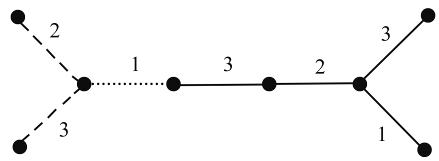

图 2　$n=5$ 或 $n=8$
Fig.2　$n=5$ or $n=8$

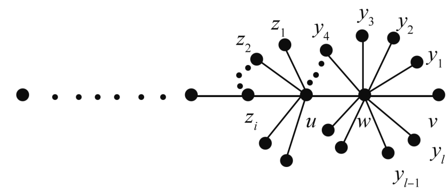

图 3　树图
Fig.3　Tree

情形 1.1　w 为 T' 中的一个最大度点。

此时有 $\Delta(T')=\Delta(T)-1$。归纳假设知,T' 存在 2-距离和可区别 $\Delta(T')$-边染色。现在给边 wv 染 $(\Delta(T')+1)$ 色,即 $\Delta(T)$ 色,则 $S(w)=1+2+3+\cdots+\Delta=\dfrac{(1+\Delta)\Delta}{2}$,可得到树 T 的 2-距离和可区别 $\Delta(T)$-边染色。

情形 1.2　w 不是树 T' 中的最大度点。

由点 v 的选择可知,w 只有一个度至少为 2 的邻点 u。对 $\forall t\in V(T')/\{w\}$,有 $d_{T'}(t)=d_T(t)$,而 $d_{T'}(w)=d_T(w)-1$,故 $\Delta(T')=\Delta(T)\geqslant 3$。设 $\overline{C}_{T'}(w)$ 是点 w 在树 T' 中的缺色集合,显然,$\overline{C}_{T'}(w)\neq\varnothing$。由归纳假设知,$\chi'_{2-\Sigma}(T')\leqslant\Delta(T')$,即 T' 存在 2-距离和可区别 $\Delta(T')$-边染色 φ'。下面根据 $d_T(w)$ 的大小讨论树 T 的 2-距离和可区别边染色 φ。

情形 1.2.1　若 $d_T(w)=\Delta(T)$,则 $d_{T'}(w)=\Delta(T')-1$,$d_T(u)<\Delta(T)$,点 u 除 w 之外最多有 $\Delta(T)-2$ 个邻点,分别设为 z_1、z_2、$\cdots$、$z_{\Delta-2}$,且 $d_T(z_i)<\Delta(T)$, $1\leqslant i\leqslant\Delta-2$。归纳得,$S_{T'}(u)\neq S_{T'}(z_i)$。

此时 $|\overline{C}_{T'}(w)|=1$,令 $a\in\overline{C}_{T'}(w)$,$\varphi(wv)=a$,则 $S(w)=1+2+3+\cdots+\Delta(T)=\dfrac{(1+\Delta)\Delta}{2}$,而 $S(u)$ 和 $S(z_i)$ $(1\leqslant i\leqslant\Delta-2)$ 是色集合 $\{1,2,\cdots,\Delta(T)\}$ 中最多 $\Delta(T)-1$ 个数的和,$S_{T'}(z_i)\neq S_{T'}(z_j)$, $i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant\Delta-2$, 因此,$S(z_i)\neq S(u)<S(w)$,得到树 T 的一个 2-距离和可区别 $\Delta(T)$-边染色。

情形 1.2.2　若 $d_T(w)<\Delta(T)$,色集合 $\{1,2,\cdots,\Delta(T)\}$ 中除边 wu、wy_1、wy_2、$\cdots$、wy_l 的色之外至少有 2 种颜色,即 $|\overline{C}_{T'}(w)|\geqslant 2$。下面根据 $d_T(u)$ 是否为最大度,分 2 种情况讨论。

(1) 若 $d_T(u)=\Delta(T)$,则 $d_T(z_i)<\Delta(T)$。$C(u)=\{1,2,\cdots,\Delta(T)\}$,$S(u)=1+2+3+\cdots+\Delta(T)=\dfrac{(1+\Delta)\Delta}{2}$,得 $|C(w)|<|C(u)|$,$S(w)<S(u)$。由 $|\overline{C}_{T'}(w)|\geqslant 2$,至少存在一种色染给边 wv,使点 z_i 和点 w 达到 2-距离内和可区别。由于 T 中与点 w 距离不超过 2 的同度顶点至多有 $\Delta(T)-1$ 个,而 $C_\Delta^{\Delta-1}=\Delta$,因此这 Δ 种组合的和互不相同,即 $\exists a\in\overline{C}_{T'}(w)$,使 $a+S_{T'}(w)\neq S_{T'}(z_i)$,在 φ' 染色基础上,令 $\varphi(wv)=a$。至于点 w 与点 v,y_1、y_2、$\cdots$、y_l 是满足 2-距离内和可区别边染色的,有 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)$。

(2) 若 $d_T(u)<\Delta(T)$,再根据 $d_T(z_i)$ 是否为最大度,分成 2 种情况去讨论。

① $d_T(z_i)=\Delta(T)$,若 $z_i(1\leqslant i\leqslant\Delta-2)$ 内有最大度点,则只能存在一个,不妨设为点 z_1,显然点 z_1 与 $z_i(2\leqslant i\leqslant\Delta-2)$、$u$、$w$ 的和可区别,树 T 中与点 w 距离不超过 2 的同度顶点至多有 $\Delta(T)-2$ 个,加点 w 有 $\Delta(T)-1$ 个,$C_\Delta^{\Delta-1}=\Delta$,这种 Δ 组合的和互不相同。由 $|\overline{C}_{T'}(w)|\geqslant 2$,$\exists a\in\overline{C}_{T'}(w)$,使 $a+S_{T'}(w)\neq S_{T'}(z_i)\neq S_{T'}(u)$,故 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)$。

② $d_T(z_i)<\Delta(T)$,树 T 中与点 w 距离不超过 2 的同度顶点至多有 $\Delta(T)-1$ 个,而 $C_\Delta^{\Delta-1}=\Delta$,且这 Δ 种组合的和互不相同。在 φ' 染色基础上,$\exists a\in\overline{C}_{T'}(w)$,使 $a+S_{T'}(w)\neq S_{T'}(z_i)\neq S_{T'}(u)$,满足 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)$。

经过上述讨论,不难发现,若树 T 的最大度点唯一,或 T 中任意 2 个最大度点间的距离超过 2 时,有 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)$。

情形 2　当树 T 中存在 2 个距离不超过 2 的最大度点时。

由引理 1,知 $\chi'_{2-\Sigma}(T)\geqslant\Delta(T)+1$,特殊的,$n=2\Delta(T)$ 时,T 为双星图。其 2-距离和可区别 $(\Delta+1)$-边染色如图 4 所示。

当 $n>2\Delta(T)$ 时,对树的阶数 n 做归纳。当 $n=7$ 时,有 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)+1$,如图 5 所示。

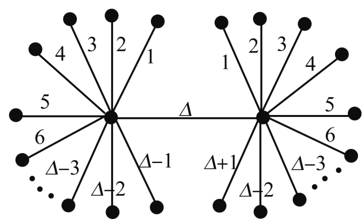

图 4 双星图
Fig.4 Double-star graph

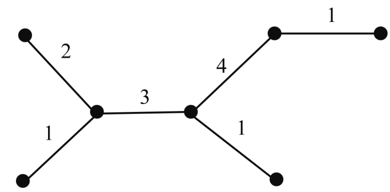

图 5 $n=7$
Fig.5 $n=7$

假设 $n-1$ 阶的树 T' 存在 2 个距离不超过 2 的最大度点,结论 $\chi'_{2-\Sigma}(T')\leqslant\Delta(T')+1$ 成立。下面讨论有相同结构的 n 阶树 T,满足 $\chi'_{2-\Sigma}(T)\leqslant\Delta(T)+1$。由引理 3 可设,$w\in V(T)$,$d_T(w)\geqslant 2$。$N_T(w)=\{u,v,y_1,y_2,\cdots,y_l\}$,点 w 只与一个非悬挂点 u 相邻,$d_T(u)\geqslant 2$,其中 $d_T(y_i)=1(i=1,2,\cdots,l)$,$d_T(v)=1$。令 $T'=T-v$。

由归纳假设,T' 存在 2-距离和可区别 $\Delta(T')+1$-边染色。如果 T' 在添加 v 点之后得到的树 T 不存在 2 个 2-距离以内的最大度点,即 w 点是树 T 的唯一最大度点,根据情形 1,T 存在 2-距离和可区别 Δ-边染色,T 的 2-距离和可区别 $\Delta(T)$-边染色还是 T' 的 2-距离和可区别 $\Delta(T')+1$-边染色(下述的证明不再考虑此情况)。不难发现 $\Delta(T)=\Delta(T')$,在此基础上,对边 wv 进行染色。此时,$|\overline{C}_{T'}(w)|\geqslant 2$,$d_T(u)\leqslant\Delta(T)$,点 u 除 w 之外至多有 $\Delta(T)-1$ 个邻点,记为 z_1、z_2、$\cdots$、z_i,$1\leqslant i\leqslant\Delta-1$,有 $d_T(z_i)\leqslant\Delta(T)$,$1\leqslant i\leqslant\Delta-1$,$S_{T'}(z_i)\neq S_{T'}(z_j)$,$i\neq j$,$1\leqslant i,j\leqslant\Delta-1$。下面根据点 w 和点 u 在树 T 中的情况进行讨论。

情形 2.1 若 $d_T(w)=d_T(u)=\Delta(T)$,根据 $d_T(z_i)$ 的大小,分成以下 2 种情况讨论。

情形 2.1.1 若 $d_T(z_i)=\Delta(T)$,由归纳得,$S_{T'}(u)\neq S_{T'}(z_i)$,$T$ 中与 w 距离不超过 2 的最大度点至多有 $\Delta(T)$ 个,$C_{\Delta+1}^{\Delta}=\Delta+1$,这 $\Delta+1$ 种组合的和互不相同,可找到一种色 b,在点 u 和 z_i 上都有表现,在 $\Delta+1$ 种色中除去色 b,用剩余颜色分别给边 wy_1、wy_2、$\cdots$、wy_l,wv 染色,可使得到的染色中达到点 z_i、u 与 w 和可区别,至于点 w 与 v、y_i 是和可区别的,得 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)+1$。

情形 2.1.2 若 $d_T(z_i)\leqslant\Delta(T)$,由 $d_T(u)=\Delta(T)$,则 u 除 w 之外有 $\Delta(T)-1$ 个邻点,分别为 z_1、z_2、$\cdots$、$z_{\Delta-1}$。由于 $|\overline{C}_{T'}(w)|=2$,因此存在一色 $a\in\overline{C}_{T'}(w)$,使得 $a+S_{T'}(w)\neq S_{T'}(u)$。①若 $\exists a\in\overline{C}_{T'}(w)$,使得 $a+S_{T'}(w)\neq S_{T'}(z_i)$,在 T' 染色的基础上给边 wv 染色 a,即可得到 T 的 2-距离和可区别 $(\Delta+1)$-边染色。②若对 $\forall a\in\overline{C}_{T'}(w)$,$a+S_{T'}(w)=S_{T'}(z_i)$,则 $a+S_{T'}(w)$ 的和只会与 $S_{T'}(z_i)$ 中一个相同,不妨设为 z_1,给点 w 和 z_1 关联的边重新染色,使得 $S_T(w)$、$S_T(z_1)\neq S_T(u)$,$S_T(w)$、$S_T(z_1)\neq S_T(z_i)$,$S_T(w)\neq S_T(z_1)$。由于 T 中与 w 距离不大于 2 的最大度顶点至多有 $\Delta(T)-1$ 个,加上点 w 有 $\Delta(T)$ 个,$C_{\Delta+1}^{\Delta}=\Delta+1$,因此这 $\Delta+1$ 种组合的和互不相同,$\Delta+1>\Delta$,可得 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)+1$。

情形 2.2 若 $d_T(w)=d_T(u)<\Delta(T)$,根据 $d_T(z_i)$ 的大小,分成以下 2 种情况讨论。

情形 2.2.1 若 $d_T(z_i)=\Delta(T)$,由于 $d_T(w)=d_T(u)$,不妨给点 w 关联的边 wy_1、wy_2、$\cdots$、wy_l 重新染色,使得所染颜色都在点 u 色集合上得到表现。在集合 $\{1,2,\cdots,\Delta(T)+1\}$ 中选取一色 a,$a\in\overline{C}_{T'}(u)$,给边 wv 染色 a,使得 $S_T(w)\neq S_T(u)$。由归纳假设知,$S_{T'}(u)\neq S_{T'}(z_i)$。至于点 w 与 v、y_i 是和可区别的,可得 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)+1$。

情形 2.2.2 若 $d_T(z_i)\leqslant\Delta(T)$,由 $d_T(u)<\Delta(T)$,则 u 除 w 之外有 $\Delta(T)-2$ 个邻点,且 $d_T(z_i)\leqslant\Delta(T)$,$1\leqslant i\leqslant\Delta-2$,$S_{T'}(z_i)\neq S_{T'}(z_j)$,$i\neq j$,$1\leqslant i,j\leqslant\Delta-2$。由于 $|\overline{C}_{T'}(w)|\geqslant 3$,因此存在一色 $a\in\overline{C}_{T'}(w)$,使得 $a+S_{T'}(w)\neq S_{T'}(u)$。①若 $a+S_{T'}(w)\neq S_{T'}(z_i)$,在 T' 染色的基础上给边 wv 染色 a,即得到 T 的 2-距离和可区别 $\Delta+1$-边染色。②若对 $\forall a\in\overline{C}_{T'}(w)$,有 $a+S_{T'}(w)=S_{T'}(z_i)$,则 $a+S_{T'}(w)$ 只会与 $S_{T'}(z_i)$ 中一个相同,不妨设为 z_1,给点 w 和 z_1 关联的边重新染色,使得 $S_T(w)$、$S_T(z_1)\neq S_T(u)$,$S_T(w)$、$S_T(z_1)\neq S_T(z_i)$,$S_T(w)\neq S_T(z_1)$。由于 T 中与 w 距离不超过 2 的同度顶点至多有 $\Delta(T)-1$ 个,加上点 w 有 $\Delta(T)$ 个,$C_{\Delta+1}^{\Delta}=\Delta+1$,因此这 $\Delta+1$ 种组合的和互不相同,故可得 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)+1$。

情形 2.3 若 $d_T(w)\neq d_T(u)$,分成以下 2 种情况讨论。

(1) $d_T(w)=\Delta(T)$,由归纳得,$S_{T'}(u)\neq S_{T'}(z_i)$,$T'$ 存在 2-距离和可区别 $\Delta(T')+1$-边染色 ϕ'。令 $T'=T-$

wv,下面将染色 ϕ' 扩展为图 T 的 2-距离和可区别 $\Delta(T)+1$-边染色 ϕ。现对边 wy_1、wy_2、$\cdots$、wy_l 重新染色,令 $\phi(wy_m)=x_m$, $1\leqslant m\leqslant l$,其中 $l=\Delta(T)-2$,$\phi(wv)=x_{l+1}$,所得染色为正常染色。令 S_m 表示 x_m 的可用颜色集,$m=1,2,\cdots,l+1$,则 $|S_m|=(\Delta(T)+1)-1=\Delta$, $1\leqslant m\leqslant l+1$,由染色条件得多项式 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_{l+1})$。

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_{l+1})=\prod_{1\leqslant m<n\leqslant l+1}(x_m-x_n)\left(\sum_{s=1}^{l+1}x_s+\phi'(wu)-S_{T'}(u)\right)\prod_{k=1}^{i}\left(\sum_{s=1}^{l+1}x_s+\phi'(wu)-S_{T'}(z_k)\right)。$$

去掉 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_{l+1})$ 中的常数得

$$\widetilde{Q}(x_1,x_2,\cdots,x_{l+1})=\prod_{1\leqslant m<n\leqslant l+1}(x_m-x_n)(\sum_{s=1}^{l+1}x_s)^{i+1},\ i\leqslant\Delta-2。$$

令 $\widetilde{Q}_1(x_1,x_2,\cdots,x_{l+1})=\widetilde{Q}(x_1,x_2,\cdots,x_{l+1})\prod_{1\leqslant m<n\leqslant l+1}(x_m-x_n)(\sum_{s=1}^{l+1}x_s)^{\theta}$,可得

$$\widetilde{Q}_1'(x_1,x_2,\cdots,x_{l+1})=\prod_{1\leqslant m<n\leqslant l+1}(x_m-x_n)^2\left(\sum_{s=1}^{l+1}x_s\right)^{l+1}。$$

由引理 7 得,有 $C_{\widetilde{Q}_1}((x_1x_2\cdots x_{l+1})^{l+1})=C_{\widetilde{Q}_1'}((x_1x_2\cdots x_{l+1})^{l+1})\neq0$。由组合零点定理,存在$s_1\in S_1,s_2\in S_2,\cdots,s_{l+1}\in S_{l+1}$满足 $\widetilde{Q}_1(s_1,s_2,\cdots,s_{l+1})\neq0$,$\widetilde{Q}$ 是 $\widetilde{Q}_1$ 的一个因式,因此 $\widetilde{Q}(x_1,x_2,\cdots,x_{l+1})\neq0$,即 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)+1$。

(2) $d_T(u)\leqslant\Delta(T)$ 且 $d_T(w)<\Delta(T)$,则 $|\overline{C}_{T'}(w)|\geqslant3$,$T$ 中与 w 距离不大于 2 的同度顶点至多有 $\Delta(T)$ 个,$C_{\Delta+1}^{\Delta}=\Delta+1$,这 $\Delta+1$ 种组合的和互不相同,在 $\overline{C}_{T'}(w)$ 中至少存在一种颜色给边 wv 染色,满足 2-距离和可区别 $\Delta+1$-边染色。

综上所述,若 T 存在 2 个距离不大于 2 的最大度点,有 $\chi'_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)+1$,结论成立。

定理 2　设 T 是阶数 $n\geqslant3$ 的树,其 2-距离和可区别全色数$\chi''_{2-\Sigma}(T)\leqslant\Delta(T)+2$,其中等号成立的条件是树 T 存在 2 个距离不大于 2 的最大度点。

证明　对树 T 的阶数 n 进行归纳。

当 $n=3,4$ 时,由引理 4 和引理 5 知定理成立。当 $n\geqslant5$ 时,假设对于 $n-1$ 阶的树 T',结论 $\chi''_{2-\Sigma}(T')\leqslant\Delta(T')+2$成立。选取 n 阶树 T 中一条最长路 $p=\alpha\cdots uwv$,p 的端点 α 和 v 在 T 中的度为 1,令 $N_T(w)=\{u,v,y_1,y_2,\cdots,y_t\}$,有 $d_T(y_i)=1$, $i=1,2,\cdots,t$。点 u 除点 w 之外的邻点记为 z_1、z_2、$\cdots$、z_i,令 $T'=T-v$。根据树 T'和 T 中最大度点的特点,分以下 2 种情形讨论。

情形 1　$\Delta(T')=\Delta(T)-1$。

显然,点 w 是树 T 中唯一的最大度点,且 $d_T(w)\geqslant3$。根据归纳假设,T'存在一个至多 $\Delta(T')+2$ 种颜色的 2-距离和可区别全染色。在树 T'中,$|C_{T'}(w)|=\Delta(T')+1=\Delta(T)$,则 $|\overline{C}_{T'}(w)|=1$,用该色给边 wv 着色,得 $g_T(w)=1+2+3+\cdots+(\Delta(T)+1)=\dfrac{(\Delta+1)(\Delta+2)}{2}$,$g(z_i)\neq g(u)<g_T(w)$,则点 u、z_i 和点 w 和可区别。由于点 v 有 $\Delta(T)-1$ 种颜色可供选择,树 T 中,与 v 点距离不大于 2 的同度顶点有 $\Delta(T)-2$ 个,存在一种色,使得 $g(v)\neq g(y_i)$,因此$\chi''_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)+1$。

情形 2　$\Delta(T')=\Delta(T)$,根据树 T'是否存在 2 个距离不大于 2 的最大度点,再分 2 种情形。

情形 2.1　树 T'不存在 2 个 2-距离以内的最大度点。根据归纳假设,T'有一个$\Delta(T')+1$ 色的 2-距离和可区别全染色。若 $d_T(w)=\Delta(T)$,且 T 不存在 2 个 2-距离以内的最大度点,可得$\chi''_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)+1$,染法同情形 1;若树 T 存在 2 个 2-距离以内的最大度点,则 T 存在 2-距离和可区别 $\Delta(T)+2$-全染色,染法同情形2.2。

若 $d_T(w)\neq\Delta(T)$,此时边 wv 至少有 2 种色可选,其中至少存在一色 a,使得 $g_T(w)\neq g_T(u)$。对于点 w 和 z_i,①若 $a+g_{T'}(w)\neq g_{T'}(z_i)$,在 T'染色的基础上给边 wv 染色 a。②若 $a+g_{T'}(w)=g_{T'}(z_i)$,由于 $g_{T'}(z_i)\neq g_{T'}(z_j)(i\neq j)$,则 $a+g_{T'}(w)$ 只会与 $g_{T'}(z_i)$ 中一个相同,不妨设为 z_1,给点 w 和点 z_1 关联的边重新染色,使得 $g_T(w)$, $g_T(z_1)\neq g_T(u)$,$g_T(w)$, $g_T(z_1)\neq g_T(z_i)$,$g_T(w)\neq g_T(z_1)$。由于 T 中与点 w 距离不超过 2 的同度顶点的个数至多有 $\Delta(T)-1$ 个,加上点 w 有 $\Delta(T)$个,$C_{\Delta+1}^{\Delta}=\Delta+1$,因此这 $\Delta+1$ 种组合的和互不相同,至少存在一种颜色,使得 $g(w)\neq g(z_i)$。对于点 v 的着色,由于点 v 有 $\Delta(T)-1$ 种颜色可供选择,T 中与 v 距离不超过 2 的同度顶点有 $\Delta(T)-2$ 个,因此至少存在一种颜色使得 $g(v)\neq g(y_i)$,T 满足 2-距离和可区别 $\Delta(T)+1$-全

染色。

情形 2.2 树 T'存在 2 个 2-距离以内的最大度点。由归纳假设知,T'存在一个 $\Delta(T')+2$ 种色的 2-距离和可区别全染色。在 T'染色基础上,边 wv 至少有 2 种颜色可选,其中至少存在一色,使得 $g(u)\neq g(w)$。

当 u 和 w 中最多有一个点是 T 中的最大度点时,由归纳得,$g_{T'}(u)\neq g_{T'}(z_i)$,$T'$存在 2-距离和可区别 $\Delta(T')+2$-全染色 ψ',令 $T'=T-wv$,下面将染色 ψ'扩展为图 T 的 2-距离和可区别 $\Delta(T)+2$-全染色 ψ。擦去点 w、y_1、y_2、…、y_t 的颜色,对边 wy_1、wy_2、…、wy_t、wv 重新染色,令 $\psi(wy_i)=x_i$, $1\leqslant i\leqslant t$,其中 $t\leqslant\Delta(T)-2$, $\psi(wv)=x_{t+1}$,$\psi(w)=x_{t+2}$。所得染色为正常染色。记 S_m 表示 x_m 的可用颜色集,则 $|S_1|=(\Delta(T)+2)-1=\Delta(T)+1$,…,$|S_{t+1}|=\Delta(T)+1$,$|S_{t+2}|=\Delta(T)$,由染色条件得多项式 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_{t+2})$。

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_{t+2})=\prod_{1\leqslant m<n\leqslant t+2}(x_m-x_n)\left(\sum_{s=1}^{t+2}x_s+\psi'(wu)-g_{T'}(u)\right)\prod_{k=1}^{i}\left(\sum_{s=1}^{t+2}x_s+\psi'(wu)-g_{T'}(z_k)\right)。$$

去掉 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_{t+2})$ 中的常数得

$$\widetilde{Q}(x_1,x_2,\cdots,x_{t+2})=\prod_{1\leqslant m<n\leqslant t+2}(x_m-x_n)\left(\sum_{s=1}^{t+2}x_s\right)^{i+1}。$$

令 $\widetilde{Q}_1(x_1,x_2,\cdots,x_{t+2})=\widetilde{Q}(x_1,x_2,\cdots,x_{t+2})\prod_{1\leqslant m<n\leqslant t+2}(x_m-x_n)\left(\sum_{s=1}^{t+2}x_s\right)^{\theta}$,则

$$\widetilde{Q}'_1(x_1,x_2,\cdots,x_{t+2})=\prod_{1\leqslant m<n\leqslant t+2}(x_m-x_n)^2\left(\sum_{s=1}^{t+2}x_s\right)^{t+2}。$$

由引理 7 得,有 $C_{\widetilde{Q}_1}((x_1x_2\cdots x_{t+2})^{t+2})=C_{\widetilde{Q}'_1}((x_1x_2\cdots x_{t+2})^{t+2})\neq 0$,则存在$s_1\in S_1$,$s_2\in S_2$,…,$s_{t+2}\in S_{t+2}$,满足 $\widetilde{Q}_1(s_1,s_2,\cdots,s_{t+2})\neq 0$,$\widetilde{Q}$ 是 Q_1 的一个因式,因此 $\widetilde{Q}(s_1,s_2,\cdots,s_{t+2})\neq 0$。$y_1$、$y_2$、…、$y_t$,$v$ 是 1^--点,都是易染的,故 $\chi''_{2-\Sigma}(T)=\Delta(T)+2$。

若 $d_T(u)=d_T(w)=\Delta(T)$,由于树 T 中与点 w 距离不超过 2 的最大度点至多有 $\Delta(T)$个,每个最大度点及其关联边需 $\Delta(T)+1$ 种颜色,$C_{\Delta+2}^{\Delta+1}=\Delta+2$,且这 $\Delta+2$ 种组合的和互不相同,因此可满足 $g(w)\neq g(z_i)$。对于点 v 的着色,由于点 v 有 $\Delta(T)$种不同颜色可选择,T 中与 v 距离不超过 2 的同度顶点有 $\Delta(T)-2$ 个,因此至少存在一种色,使得 $g(v)\neq g(y_i)$,T 满足 2-距离和可区别 $\Delta(T)+2$-全染色。

综上所述,结论成立。

参考文献:

[1] FLANDRIN E, MARCZYK A, PRZYBYLO J, et al. Neighbor sum distinguishing index[J]. Graphs and Combinatorics, 2013, 29(5):1329-1336.

[2] PILSNIAK M, WONIAK M. On the total-neighbor-distinguishing index by sums[J]. Graphs and Combinatorics, 2015, 31(3):771-782.

[3] 潘文华, 徐常青. 无 K_4-图子式的图的邻和可区别边染色[J]. 数学进展, 2017, 46(6):41-49.
PAN Wenhua, XU Changqing. Neighbor sum distinguishing edge colorings of K_4-minor free graphs[J]. Advances in Mathematics, 2017, 46(6):41-49.

[4] YU Xiaowei, WANG Guanghui, WU Jianliang, et al. Neighbor sum distinguishing edge coloring of subcubic graphs[J]. Acta Mathematica Sinica,English Series, 2017, 33(2):252-262.

[5] 田双亮,杨环,杨青,等. 路的联的邻和可区别边染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(9):29-35.
TIAN Shuangliang, YANG Huan, YANG Qing, et al. Neighbor sum distinguishing edge coloring of the join of paths[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2020, 55(9):29-35.

[6] YAO Jingjing, YU Xiaowei, WANG Guanghui, et al. Neighbor sum distinguishing total coloring of 2-degenerate graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2016, 34(1):1-7.

[7] 强会英,姚丽. 无 K_4-子式图的 2-距离和可区别边染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(11):83-86.
QIANG Huiying, YAO Li. 2-distance sum distinguishing edge coloring of K_4-minor-free graphs[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2021, 56(11):83-86.

(下转第 58 页)