

# 单位区间图的半配对 $k$ -不相交路覆盖研究

朱莉, 李鹏, 王爱法

(重庆理工大学理学院, 重庆 400054)

**摘要:** 研究单位区间图上的半配对多对多  $k$ -不相交路覆盖 ( $k$ -disjoint path cover,  $k$ -DPC) 的容错性问题, 利用路覆盖的结构特点, 结合单位区间图顶点序的结构性质, 刻画具有半配对 1-DPC 和  $k$ -DPC 性质的单位区间图。同时得到单位区间图  $G$  任意删去点集  $W$  且任意经过边集  $F$  的相关结果:  $G-W$  且经过  $F$  具有半配对 1-DPC 性质当且仅当  $G$  是  $(2+r)$ -连通, 其中  $|W|=p, |F|=q, p+q \leq r$ ;  $G-W$  且经过  $F$  具有半配对  $k$ -DPC 性质当且仅当  $G$  是  $(2k+r-1)$ -连通, 其中  $k \geq 2$ 。结果表明: 图中不相交路覆盖的存在与顶点连通度和哈密顿性质密切相关。研究方法的结果为进一步研究区间图及其他相关图类的路覆盖问题提供理论依据。

**关键词:** 单位区间图; 半配对  $k$ -DPC; 容错性; 路覆盖

**中图分类号:** O157.5 **文献标志码:** A

**引用格式:** 朱莉, 李鹏, 王爱法. 单位区间图的半配对  $k$ -不相交路覆盖研究[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(2): 80-90.

## Study on semi-paired $k$ -disjoint path cover of unit interval graphs

ZHU Li, LI Peng, WANG Aifa

(College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

**Abstract:** The fault tolerance problem of semi-paired, many to many and  $k$ -disjoint path cover ( $k$ -DPC) on unit interval graphs is studied. Using the structural characteristics of the path cover and the structural properties of the vertex order of the unit interval graphs, the unit interval graphs with semi-paired 1-DPC and  $k$ -DPC properties are characterized. At the same time, we obtain the relevant results of the unit interval graph  $G$ : for any vertex set  $W$  and any edge set  $F$ ,  $G-W$  passing through  $F$  has the semi-paired 1-DPC property if and only if  $G$  is  $(2+r)$ -connected, where  $|W|=p, |F|=q, p+q \leq r$ ;  $G-W$  passing through  $F$  has the semi-paired  $k$ -DPC property if and only if  $G$  is  $(2k+r-1)$ -connected, where  $k \geq 2$ . It is shown that the existence of disjoint path covers in graphs is closely related to vertex connectivity and Hamiltonian properties. The research methods and results provide a theoretical basis for further study of the path coverage of interval graphs and other related graphs.

**Key words:** unit interval graph; semi-paired  $k$ -DPC; fault tolerance; path cover

## 0 引言

随着大数据时代的来临, 各种路覆盖 (path cover, PC) 问题成为了图论的重要研究方向, 不相交路覆盖 (disjoint path cover, DPC) 的概念是在研究并行和分布式网络中的路径、可靠性及容错性等问题时自然产生的。DPC 问题可以帮助解决程序代码优化、软件测试、网络以及将并程序映射到并行结构等各种问题。PC 问题在一般图中是 NP-完全的, 对于超立方体<sup>[1]</sup>、余可比较图<sup>[2]</sup> 和单位区间图<sup>[3]</sup> 等是多项式时间可解的, 因此 PC 的大部分研究仍是关于特殊图的结果<sup>[4-6]</sup>。Li 等分别于 2017 和 2020 年研究了  $n$  维环面的配对 2-

收稿日期: 2022-07-28; 网络出版时间: 2023-07-14 11:28:00

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20230714.0916.002>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11701059); 重庆市自然科学基金资助项目(cstc2020jcyj-msxmX0272); 重庆市教委科学技术研究计划项目(KJQN202001130, KJQN202101130); 重庆理工大学研究生教育高质量发展行动计划资助项目(gzlcx20222080)

第一作者简介: 朱莉(1998—), 女, 硕士研究生, 研究方向为图论及其应用。E-mail: zll28math@163.com

DPC 问题<sup>[7]</sup>和二分  $k$ -元  $n$ -立方网络  $Q_n^k$  的未配对多对多  $m$ -DPC 容错性问题<sup>[8]</sup>。2018 年 Park 研究二分圆柱网格的不相交路覆盖特性<sup>[9]</sup>,第二年他和 Ihm 提出一种有效线性时间算法,在连通图的立方体中建立一对多 3-不相交的路覆盖<sup>[10]</sup>。2022 年 Ćustić 和 Lendl 提出了区间图上的 Steiner 路覆盖问题的线性时间算法<sup>[11]</sup>。

区间图是直线上一组区间构成的相交图,在算法和特殊结构性质的研究中起着关键作用。若区间长度相等,那么把这个相交图称为单位区间图。区间图模型也在大量应用问题中出现,如车间调度安排<sup>[12]</sup>、无线传感器的网络优化<sup>[13]</sup>、通信软件容器的预留<sup>[14]</sup>、面部表情的识别和分类<sup>[15]</sup>等,其简单的几何表示以及优美的性质,为一般图的许多 NP-完全问题提供多项式解,如最大内点数生成树<sup>[16]</sup>、最小半全支配集<sup>[17]</sup>和最大割<sup>[18]</sup>等。近年来, Park 和他的研究团队一直致力于区间图 DPC 问题的研究并获得了许多结论:2019 年给出区间图上一对一和一对多  $k$ -不相交路覆盖 ( $k$ -disjoint path cover,  $k$ -DPC) 的刻画<sup>[19]</sup>;2020 年对未配对 2-不相交路覆盖的区间图进行刻画,并证明区间图的  $r$ -散射数可以在多项式时间内计算<sup>[20]</sup>;2021 年证明当阶数  $n \geq 2k$  区间图  $G$  的散射数  $sc(G) \leq -k$  时,对任意大小为  $k$  的源集  $S$  和汇集  $T$ ,  $G$  中存在连接  $S$  和  $T$  的未配对  $k$ -DPC<sup>[21]</sup>。

如今关于路覆盖的研究在特殊图类中已有大量成果,但对于路覆盖容错性的探讨还相对较少,2017 年 Li 和 Wu 在区间图上研究了 1-不动点的 PC 问题,对区间图标准序进一步分析,构建了区间图 1 哈密顿路径 (Hamiltonian path, HP) 问题的线性算法<sup>[22]</sup>。由于半配对  $k$ -DPC 具有更特殊的结构性性质,在 PC 问题的研究上更加直观,因此本文基于文献[22]的工作,利用单位区间图和路覆盖的结构特点,结合数学归纳法和反证法刻画了单位区间图的半配对多对多  $k$ -DPC,并研究了其删点与经过指定边后仍保持 DPC 性质的容错性问题。

### 1 预备知识

设  $G$  是简单无向图,顶点集为  $V(G)$ ,边集为  $E(G)$ ,分别用  $|V(G)|$ 、 $|E(G)|$  表示顶点和边的数目;设  $G$  是任意  $n$ -顶点图,对任意  $v \in V(G)$ ,  $v$  在  $G$  中的开邻域为  $N_G(v) = \{w \in V(G), vw \in E(G)\}$ ,闭邻域为  $N_G[v] = \{v\} \cup N_G(v)$ ;设  $S \subseteq V(G)$ ,用  $G[S]$  表示由  $S$  诱导的  $G$  的子图,用  $G-S$  表示  $G[V(G) \setminus S]$ 。

设  $i, j$  是 2 个正整数,  $i < j$ , 定义  $[i] = \{1, 2, \dots, i\}$ ,  $[i, j] = \{i, i+1, \dots, j\}$ ; 设  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  是任意排序, 定义  $\pi[i] = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i\}$ ,  $\pi[i, j] = \{\pi_i, \pi_{i+1}, \dots, \pi_j\}$ 。对任意  $i \in [n-1]$ , 用  $d_{G, \pi}(\pi_i)$  表示  $N_G(\pi_i) \cap \pi[i+1, n]$  的顶点数, 若  $\pi[i+1, n] \subseteq N_G(\pi_i)$ , 则定义  $d_{G, \pi}(\pi_i) = +\infty$ 。  $G$  的连通度  $\kappa(G)$  是最小顶点数, 使得删除这些顶点后剩下的图不连通或者只有一个顶点。如果  $\kappa(G) \geq k$ , 那么称图  $G$  是  $k$ -连通的。

#### 1.1 单位区间图

**定义 1.1** 图  $G$  的区间表示  $I$  是把所有  $x \in V(G)$ , 都对应到实数轴上闭区间  $[l_i(x), r_i(x)]$  的映射, 使得对任意  $x, y \in V(G)$ ,  $xy \in E(G)$ , 当且仅当  $x \neq y$  且  $I(x) \cap I(y) \neq \Phi$ 。若  $r_i - l_i$  为常数, 则称  $I$  是单位区间表示。存在单位区间表示的图称为单位区间图, 示例如图 1。

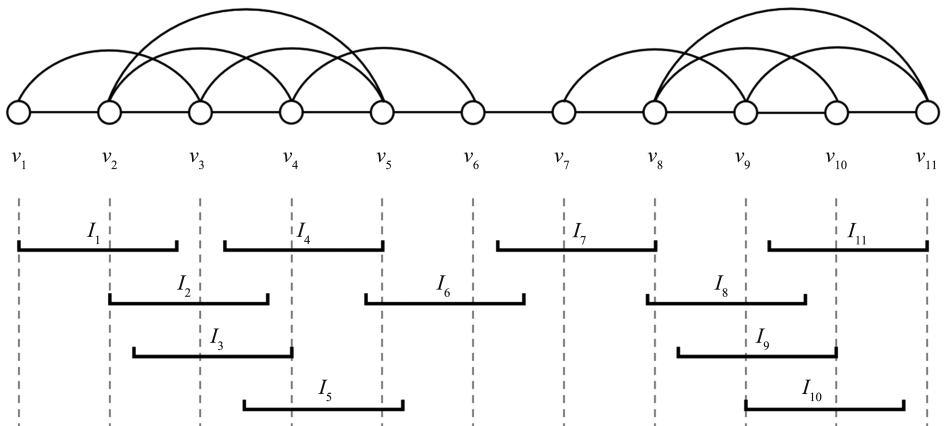


图 1 单位区间图及其区间表示  
Fig.1 A unit interval graph and its interval representation

**定义 1.2** 设  $G$  是  $n$ -顶点单位区间图,  $\pi = \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  是  $V(G)$  的一个排序, 称  $\pi$  是  $G$  的单位区间序 (unit interval ordering, UIO), 如果  $v_p v_r \in E(G)$  表示  $v_p v_q, v_q v_r \in E(G)$ , 其中  $p < q < r$ 。

**定理 1.1**<sup>[23]</sup>  $n$ -顶点简单图  $G$  是单位区间图, 当且仅当  $G$  有 UIO。

**定理 1.2**<sup>[24]</sup> 任意具有连续排序  $v_1, v_2, \dots, v_n$  的  $n$ -顶点单位区间图  $G$  是  $k$ -连通, 当且仅当  $v_i v_j \in E(G)$ , 其中  $k$  为任意正整数,  $n \geq k+1, 1 \leq |i-j| \leq k$ 。

**1.2 路覆盖**

**定义 1.3** 如果  $x_0, x_1, \dots, x_k$  是  $V(G)$  的两两不同顶点, 对任意  $i \in [k]$  有  $x_{i-1} x_i \in E(G)$ , 则称  $P = (x_0, x_1, \dots, x_k)$  是  $G$  的一条从  $x_0$  开始到  $x_k$  结束的路径, 记为  $x_0, x_k$ -路。若  $P$  包含  $G$  的所有顶点, 则称  $P$  为  $G$  的 HP。

**定义 1.4** 设  $k$  是  $[n-1]$  的任意整数, 若  $\pi$  是  $G$  的 HP, 对任意  $i \in [n-1]$  有  $d_{G,\pi}(\pi_i) \geq k$ , 那么称  $\pi$  是  $k$ -厚的 ( $k$ -thick)。

**引理 1.1** 设  $G$  是  $n$ -顶点单位区间图,  $\pi$  是  $G$  的 UIO,  $k \in [n]$ , 则以下命题等价:

- (1) 对任意  $i, j \in [n]$ , 如果  $|i-j| \leq k$ , 那么  $\pi_i \in N_G[\pi_j]$ ;
- (2)  $G$  是  $k$ -连通;
- (3)  $\pi$  是  $G$  的  $k$ -thick UIO。

**注 1.1** 设  $\pi$  是  $n$ -顶点单位区间图  $G$  的任意  $k$ -thick UIO, 其中  $k \in [n-1]$ , 则:

- (1) 对于任意  $i \in [n-1]$  和  $j \in [i+1, n]$ ,  $\pi[i, j]$  是  $G[\pi[i, j]]$  的  $k$ -thick UIO;
- (2) 任意  $S \subseteq V(G)$  且  $|S| = p, p \in [k-1]$ , 则  $G-S$  是  $(k-p)$ -连通,  $\pi-S$  是  $G-S$  的  $(k-p)$ -thick UIO。

**定义 1.5** 图  $G$  的不相交路覆盖是一组顶点不相交路径, 它们共同覆盖  $G$  的每个顶点。设  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  和  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$  是  $V(G)$  的 2 个不相交子集,  $P = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$  是  $G$  的一组 DPC。如果每条  $P^i$  是  $s_i, t_i$ -路, 则对于  $S$  和  $T$  称  $P$  是配对的多对多  $k$ -DPC。此时称  $S$  为  $P$  的源集,  $T$  为  $P$  的汇集。

**注 1.2** 本文研究的单位区间图为无向图, 因此  $s_i, t_i$ -路也表示  $t_i, s_i$ -路, 此时可称  $T$  为  $P$  的源集,  $S$  为  $P$  的汇集。

**定义 1.6** 设  $G$  是任意  $n$ -顶点单位区间图, 任意  $v \in V(G)$ , 若存在  $G$  的 UIO 从  $v$  开始, 则称  $v$  是  $G$  的一个好顶点。如果在  $G$  中, 对于任意大小为  $k$  的顶点不相交子集  $S$  和  $T$ , 其中  $S$  包含一个好顶点,  $G$  都有配对的多对多  $k$ -DPC, 则称  $G$  具有半配对  $k$ -DPC 性质。

**注 1.3** 研究路覆盖时总是指一系列路径, 其中每条路径应被视为顶点序列, 因此具有自然方向。定义本文经过的指定边  $F = \{\text{长度为 } 1 \text{ 的顶点不相交路径的边}\}$ ,  $|F|$  表示边的数目。

**2 半配对 1-DPC**

**2.1 刻画**

**定理 2.1**  $n$ -顶点单位区间图  $G$  具有半配对 1-DPC 性质, 当且仅当  $G$  是 2-连通。

**证明** 必要性。假设  $G$  具有半配对 1-DPC 性质, 则对任意  $\pi_i, G-\pi_i$  存在 HP, 因此  $\kappa(G-\pi_i) \geq 1$ 。由注 1.1 得,  $G$  是 2-连通。

充分性。假设  $G$  是 2-连通, 设  $\pi$  是  $G$  的任意 2-thick UIO, 需要找到  $G$  的  $\pi_1, \pi_t$ -HP。设  $|V(G)| = n$ , 对  $n$  采用数学归纳, 当  $n=3$  时, 图  $G$  是一个团,  $G$  显然具有半配对 1-DPC 性质, 结论成立。假设  $n > 3$ , 分以下 2 种情形。

**情形 1**  $t=n$ 。

$\pi$  是  $G$  的一个  $\pi_1, \pi_t$ -HP, 如图 2。

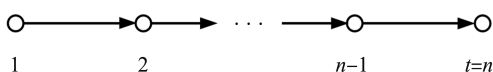


图 2  $\pi_1, \pi_t$ -HP 示意图  
Fig.2 Schematic diagram of  $\pi_1, \pi_t$ -HP

情形 2  $t < n$ .

设  $\pi' = \pi[t, n], G' = G[\pi[t, n]]$ , 由注 1.1 得,  $\pi'$  是  $G'$  的 2-thick UIO, 则  $G'$  是 2-连通. 由于  $\pi_t$  是  $G'$  的好顶点, 因此由归纳假设得存在  $G'$  的  $\pi_{t+1}, \pi_t$ -HP 称为  $\tau$ . 因为  $\pi$  是  $G$  的 2-thick UIO, 所以  $\pi_{t-1}, \pi_{t+1} \in E(G)$ , 因此  $\pi[t-1] + \pi_{t-1}\pi_{t+1} + \tau$  是  $G$  的  $\pi_1, \pi_t$ -HP, 如图 3. 证毕.

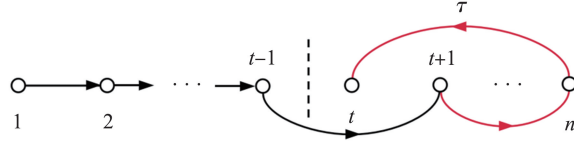


图 3  $\pi[t-1] + \pi_{t-1}\pi_{t+1} + \tau$  示意图  
Fig.3 Schematic diagram of  $\pi[t-1] + \pi_{t-1}\pi_{t+1} + \tau$

2.2 容错性

引理 2.1 设  $G$  是阶数为  $n$  的单位区间图, 对任意  $W \subseteq V(G)$ ,  $G-W$  仍具有半配对 1-DPC 性质, 当且仅当  $G$  是  $(2+p)$ -连通, 其中  $|W| \leq p, n \geq 2, 0 \leq p \leq n-2$ .

证明 必要性. 反证法, 假设  $G$  不是  $(2+p)$ -连通, 则  $\kappa(G) \leq 1+p$ . 由注 1.1 得, 存在  $M \subseteq V(G)$  且  $|M|=p$  使得  $\kappa(G-M) \leq 1$ . 由定理 2.1 得,  $G-M$  不具有半配对 1-DPC 性质, 矛盾, 因此,  $G$  是  $(2+p)$ -连通.

充分性. 设  $G$  是  $(2+p)$ -连通, 则  $\kappa(G-W) \geq 2$ . 由定理 2.1 得,  $G-W$  具有半配对 1-DPC 性质. 证毕.

定理 2.2 设  $G$  是阶数为  $n$  的单位区间图, 对任意  $W \subseteq V(G)$  和  $F, G-W$  且经过  $F$  仍具有半配对 1-DPC 性质, 当且仅当  $G$  是  $(2+r)$ -连通, 其中  $|W|=p, |F|=q, 0 \leq p \leq n-2, p+q \leq r, n \geq 2$ . 当  $n > 2$  时,  $\pi_1\pi_i \notin F$ .

证明 必要性. 假设  $G-W$  且经过  $F$  仍具有半配对 1-DPC 性质, 若  $p=r, q=0$ , 则由引理 2.1 得,  $G$  是  $(2+r)$ -连通.

充分性. 假设  $G$  是  $(2+r)$ -连通, 由注 1.1 得,  $G-W$  是  $(2+r-p)$ -连通, 即  $\kappa(G-W) \geq 2+q$ , 故只需证:  $(2+q)$ -连通图  $G$ , 存在经过  $F$  的  $\pi_1, \pi_i$ -HP. 若  $q=0$ , 则由定理 2.1 得结论成立, 因此接下来探讨  $q \geq 1$ . 设  $\pi$  是  $G$  的任意  $(2+q)$ -thick UIO,  $|V(G)|=n$ , 对  $n$  采用数学归纳, 当  $n=3+q$  时,  $G$  是一个团, 结论成立. 假设  $n > 3+q$ , 分以下 2 种情形.

情形 1 任意  $\pi_1\pi_i \notin F, i \in [2, 3+q]$ .

设  $\pi' = \pi[2, n], G' = G - \pi_1$ , 设  $j$  是  $G' - \pi_i$  中的第一个点, 即  $j \in [2, 3]$ , 则  $\pi_1\pi_j \in E(G)$ . 由注 1.1 得  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2+q)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(2+q)$ -连通. 由归纳假设得,  $G'$  中存在经过  $F$  的  $\pi_j, \pi_i$ -HP 记为  $\tau$ , 因此,  $\pi_1\pi_j + \tau$  是  $G$  中经过  $F$  的  $\pi_1, \pi_i$ -HP, 如图 4.

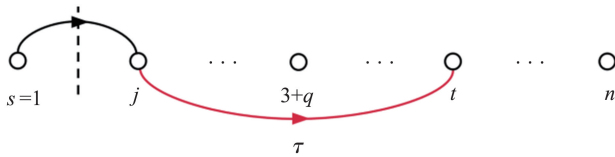


图 4  $\pi_1\pi_j + \tau$  示意图  
Fig.4 Schematic diagram of  $\pi_1\pi_j + \tau$

情形 2 存在  $\pi_1\pi_i \in F, i \in [2, 3+q]$ .

设  $\pi' = \pi[2, n] - \pi_i, G' = G - \pi_1 - \pi_i, F' = F - \pi_1\pi_i$ , 显然  $|F'| = |F| - 1 = q - 1$ . 设  $j$  是  $G' - \pi_i$  中的第一个点, 即  $j \in [2, 4]$ , 则  $\pi_1\pi_j \in E(G)$ . 由注 1.1 得,  $\pi'$  是  $G'$  的  $(1+q)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(1+q)$ -连通. 由归纳假设得,  $G'$  中存在经过  $F'$  的  $\pi_j, \pi_i$ -HP 记为  $\tau$ , 因此,  $\pi_1\pi_j + \pi_i\pi_j + \tau$  是  $G$  中经过  $F$  的  $\pi_1, \pi_i$ -HP, 如图 5. 证毕.

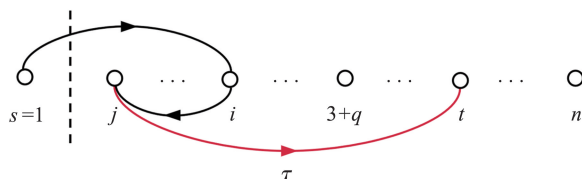


图 5 经过  $F$  的  $\pi_1, \pi_i$ -HP  
Fig.5  $\pi_1, \pi_i$ -HP pass through  $F$

### 3 半配对 $k$ -DPC

#### 3.1 刻画

**定理 3.1**  $n$ -顶点单位区间图  $G$  具有半配对  $k$ -DPC 性质,当且仅当  $G$  是  $(2k-1)$ -连通,其中  $n \geq 2k, k \geq 2$ 。

**证明** 设  $S = \{\pi_{s_1} = \pi_1, \pi_{s_2}, \dots, \pi_{s_k}\}, T = \{\pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_k}\}$  是  $V(G)$  的任意 2 个不相交子集,对任意  $j \in [k]$  有  $s_1 < s_2 < \dots < s_k, s_j < t_j$ 。

**必要性。** 假设  $G$  具有半配对  $k$ -DPC 性质,要证  $G$  是  $(2k-1)$ -连通。反证法。假设  $\kappa(G) < 2k-1$ , 则存在  $i_0 \in [n-2k+1]$  使得  $\pi_{i_0} \pi_{i_0+2k-1} \notin E(G)$ , 则对任意  $i \in [i_0]$  和  $j \in [i_0+2k-1, n]$  有  $\pi_i \pi_j \notin E(G)$ 。设  $\pi_{s_1} = \pi_1, \pi_{t_1} = \pi_{i_0+2k-1}$ , 对任意  $m \in [2, k], s_m = i_0 + m - 1, t_j = i_0 + k + m - 2$ , 则在  $G - \{\pi_{s_2}, \pi_{s_2+1}, \dots, \pi_{s_k}, \pi_{t_2}, \pi_{t_2+1}, \dots, \pi_{t_k}\} = G - \pi[i_0+1, i_0+2k-2]$  中没有任何一条从  $s_1$  到  $t_1$  路径,如图 6。

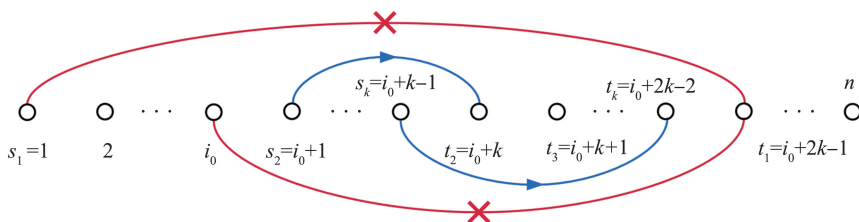


图 6  $G - \pi[i_0+1, i_0+2k-2]$  中不存在  $s_1, t_1$ -路径  
Fig.6 There is no  $s_1, t_1$ -path in  $G - \pi[i_0+1, i_0+2k-2]$

对于  $S$  和  $T$ , 由于  $G$  中没有配对的多对多  $k$ -DPC, 因此  $G$  不具有半配对  $k$ -DPC 性质, 矛盾, 因此  $G$  是  $(2k-1)$ -连通。

**充分性。** 假设  $G$  是  $(2k-1)$ -连通,  $\pi$  是  $G$  的任意  $(2k-1)$ -thick UIO, 需要找到对于  $S$  和  $T, G$  中有配对的多对多  $k$ -DPC。设  $|V(G)| = n$ , 对  $n$  采用数学归纳, 当  $n = 2k$  时,  $G$  是一个团, 结论成立。假设  $n > 2k$ , 分以下 2 种情形。

**情形 1**  $t_1 < s_2$ 。

设  $\pi' = \pi[s_2, n], G' = G[\pi[s_2, n]], S' = \{\pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = \{\pi_{t_2}, \pi_{t_3}, \dots, \pi_{t_k}\}, S'$  包含好顶点  $\pi_{s_2}$ 。由注 1.1 得,  $\pi[s_2-1]$  是  $G[\pi[s_2-1]]$  的  $(2k-1)$ -thick UIO,  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2k-1)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(2k-1)$ -连通。因为  $k \geq 2$ , 所以  $G[\pi[s_2-1]]$  是 2-连通。由定理 2.1 得, 存在  $G[\pi[s_2-1]]$  的  $\pi_1, \pi_{t_1}$ -HP, 记为  $P^1$ 。

**情形 1.1**  $k=2$ 。

$\pi'$  是  $G'$  的 3-thick UIO, 则  $G'$  是 3-连通, 因此由定理 2.1 得,  $G'$  中存在  $\pi_{s_2}, \pi_{t_2}$ -HP, 记为  $P^2$ 。那么对于  $S$  和  $T, P = \{P^1, P^2\}$  是  $G$  中配对的多对多 2-DPC, 如图 7。

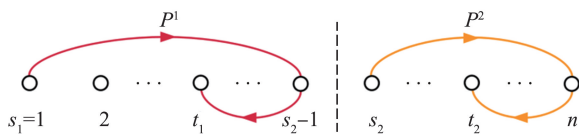


图 7  $\{P^1, P^2\}$  示意图  
Fig.7 Schematic diagram of  $\{P^1, P^2\}$

**情形 1.2**  $k > 2$ 。

由归纳假设得, 对于  $S'$  和  $T', G'$  中存在配对的多对多  $(k-1)$ -DPC, 记为  $P' = \{P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 。那么对于  $S$  和  $T, P = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$  是  $G$  中配对的多对多  $k$ -DPC, 如图 8。

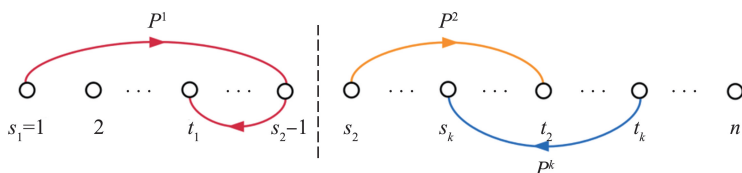


图 8 半配对  $k$ -DPC  
Fig.8 Semi-paired  $k$ -DPC

情形 2  $t_1 > s_2$ 。

由于  $\pi$  是  $G$  的  $(2k-1)$ -thick UIO, 因此对于任意  $j \in [s_2, s_2+2k-2]$  有  $\pi_j \pi_{s_2-1} \in E[G]$ 。

情形 2.1 存在  $j \in [s_2+1, s_2+2k-2] \setminus \{s_3, s_4, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k\}$ 。

设  $\pi' = \pi[s_2, n], G' = G[\pi[s_2, n]], S' = \{\pi_j, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = T, S'$  包含好顶点  $\pi_{s_2}$ , 由注 1.1 得,  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2k-1)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(2k-1)$ -连通。由归纳假设得, 对于  $S'$  和  $T'$ ,  $G'$  中存在配对的多对多  $k$ -DPC, 记为  $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ , 其中  $P^1$  是  $\pi_j, \pi_{t_1}$ -路径。设  $Q = \pi[s_2-1] + \pi_{s_2-1} \pi_j + P^1$ , 那么对于  $S$  和  $T, P = \{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  是  $G$  中配对的多对多  $k$ -DPC, 如图 9。

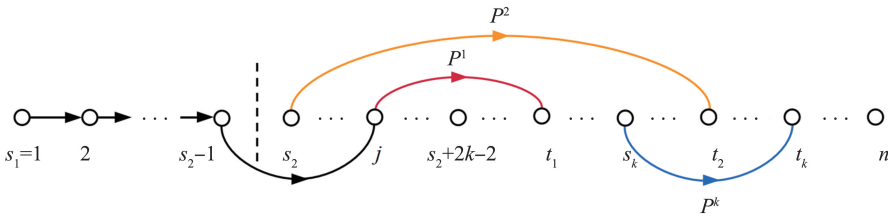


图 9  $\{\pi[s_2-1] + \pi_{s_2-1} \pi_j + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  示意图  
Fig.9 Schematic diagram of  $\{\pi[s_2-1] + \pi_{s_2-1} \pi_j + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

情形 2.2  $[s_2+1, s_2+2k-2] = \{s_3, s_4, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k\}$ 。

设  $P^1 = \pi[s_2-1] + \pi_{s_2-1} \pi_{t_1}, \pi' = \pi[s_2, n] - \pi_{t_1}, G' = G[\pi[s_2, n]] - \pi_{t_1}, S' = \{\pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = \{\pi_{t_2}, \pi_{t_3}, \dots, \pi_{t_k}\}, S'$  包含好顶点  $\pi_{s_2}$ 。由注 1.1 得,  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2k-2)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(2k-2)$ -连通。

情形 2.2.1  $k=2$ 。

$\pi'$  是  $G'$  的 2-thick UIO, 那么  $G'$  是 2-连通, 从而根据定理 2.1 知,  $G'$  中存在  $\pi_{s_2}, \pi_{t_2}$ -HP, 记为  $P^2$ , 因此在  $G$  中, 对于  $S$  和  $T, P = \{P^1, P^2\}$  是配对的多对多 2-DPC, 如图 10。

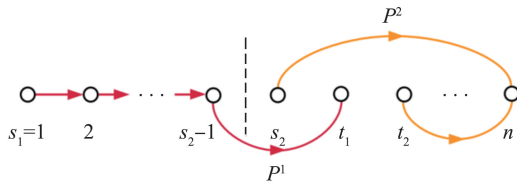


图 10  $\{\pi[s_2-1] + \pi_{s_2-1} \pi_{t_1}, P^2\}$  示意图  
Fig.10 Schematic diagram of  $\{\pi[s_2-1] + \pi_{s_2-1} \pi_{t_1}, P^2\}$

情形 2.2.2  $k > 2$ 。

根据归纳假设知, 在  $G'$  中对于  $S'$  和  $T'$  存在配对的多对多  $(k-1)$ -DPC, 记为  $P' = \{P^2, P^3, \dots, P^k\}$ , 因此在  $G$  中, 对  $S$  和  $T, P = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$  是配对的多对多  $k$ -DPC, 如图 11。证毕。

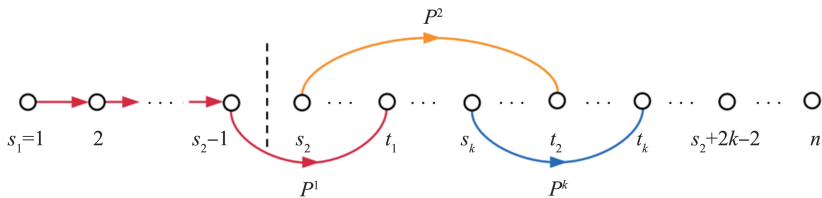


图 11  $\{\pi[s_2-1] + \pi_{s_2-1} \pi_{t_1}, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  示意图  
Fig.11 Schematic diagram of  $\{\pi[s_2-1] + \pi_{s_2-1} \pi_{t_1}, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

### 3.2 容错性

引理 3.1 设  $G$  是阶数为  $n$  的单位区间图, 对任意  $W \subseteq V(G), G-W$  仍具有半配对  $k$ -DPC 性质, 当且仅当  $G$  是  $(2k+p-1)$ -连通, 其中  $|W| \leq p, k \geq 2, n \geq 2k, 0 \leq p \leq n-2k$ 。

证明 与引理 2.1 证明过程类似, 利用定理 3.1 得到, 限于篇幅不详述证明。

定理 3.2 设  $G$  是阶数为  $n$  的单位区间图, 对任意  $W \subseteq V(G)$  和  $F, G-W$  且经过  $F$  仍具有半配对  $k$ -DPC 性质, 当且仅当  $G$  是  $(2k+r-1)$ -连通, 其中  $|W| = p, |F| = q, 0 \leq p \leq n-2k, p+q \leq r, k \geq 2, n \geq 2k$ 。当  $n > 2k$  时,  $(\pi_1 \pi_{t_1} \cup \pi_{s_2} \pi_{t_2} \cup \dots \cup \pi_{s_k} \pi_{t_k}) \not\subseteq F$ 。

**证明** 设  $S = \{\pi_{s_1} = \pi_1, \pi_{s_2}, \dots, \pi_{s_k}\}, T = \{\pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_k}\}$  是  $V(G)$  的任意 2 个不相交子集, 对任意  $j \in [k]$  有  $s_1 < s_2 < \dots < s_k, s_j < t_j$ .

**必要性.** 假设  $G-W$  且经过  $F$  具有半配对  $k$ -DPC 性质, 若  $p=r, q=0$ , 则由引理 3.1 得,  $G$  是  $(2k+r-1)$ -连通.

**充分性.** 假设  $G$  是  $(2k+r-1)$ -连通, 由注 1.1 得,  $G-W$  是  $(2k+r-p-1)$ -连通, 即  $\kappa(G-M) \geq 2k+q-1$ , 故只需证:  $(2k+q-1)$ -连通图  $G$ , 对于  $S$  和  $T$ , 存在经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC. 若  $q=0$ , 则由定理 3.1 得结论成立, 因此接下来探讨  $q \geq 1$ . 设  $\pi$  是  $G$  的任意  $(2k+q-1)$ -thick UIO,  $|V(G)| = n$ , 对  $n$  采用数学归纳. 当  $n=2k+q$  时,  $G$  是一个团, 结论成立. 假设  $n > 2k+q$ , 分以下 2 种情形.

**情形 1** 任意  $\pi_1 \pi_i \notin F, i \in [2, 2k+q]$ .

设  $\pi' = \pi[2, n], G' = G - \pi_1$ , 由注 1.1 得,  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2k+q-1)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(2k+q-1)$ -连通.

**情形 1.1**  $2 \notin \{t_1, s_2\}$ .

设  $S' = \{\pi_2, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = T, S'$  包含好顶点  $\pi_2$ , 由归纳假设得, 对于  $S'$  和  $T', G'$  中存在经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 记为  $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ , 其中  $P^1$  是  $\pi_2, \pi_{t_1}$ -路径. 设  $Q = \pi_1 \pi_2 + P^1$ , 因此对于  $S$  和  $T, P = \{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  是  $G$  中经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 如图 12.

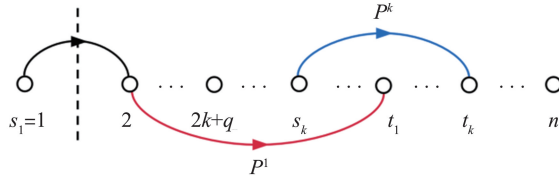


图 12  $\{\pi_1 \pi_2 + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  示意图

Fig.12 Schematic diagram of  $\{\pi_1 \pi_2 + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

**情形 1.2**  $t_1=2$ .

由于  $G$  是  $(2k+q-1)$ -连通, 且  $q \geq 1$ , 因此存在  $j \in [3, 2k+q] \setminus \{s_2, s_3, \dots, s_k, t_2, t_3, \dots, t_k\}$ , 使得  $\pi_1 \pi_j \in E(G)$ . 设  $S' = \{\pi_{t_1}, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = \{\pi_j, \pi_{t_2}, \pi_{t_3}, \dots, \pi_{t_k}\}, S'$  包含好顶点  $\pi_{t_1}$ , 由归纳假设得: 对于  $S'$  和  $T', G'$  中存在经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 记为  $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ , 其中  $P^1$  是  $\pi_{t_1}, \pi_j$ -路径. 由于  $G$  是简单图, 因此  $P^1$  也是  $\pi_j, \pi_{t_1}$ -路径. 设  $Q = \pi_1 \pi_j + P^1$ , 那么对于  $S$  和  $T, P = \{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  是  $G$  中经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 如图 13.

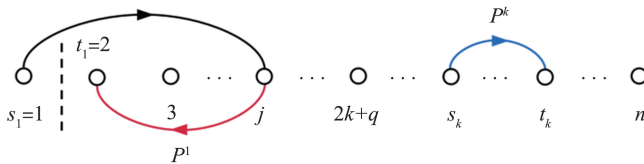


图 13  $\{\pi_1 \pi_j + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  示意图

Fig.13 Schematic diagram of  $\{\pi_1 \pi_j + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

**情形 1.3**  $s_2=2$ .

由于  $G$  是  $(2k+q-1)$ -连通且  $q \geq 1$ , 所以存在  $j \in [3, 2k+q] \setminus \{s_3, s_4, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k\}$ , 使得  $\pi_1 \pi_j \in E(G)$ . 设  $S' = \{\pi_j, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = T, S'$  包含好顶点  $\pi_{s_2}$ , 由归纳假设得, 对于  $S'$  和  $T', G'$  中存在经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 记为  $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ , 其中  $P^1$  是  $\pi_j, \pi_{t_1}$ -路径. 设  $Q = \pi_1 \pi_j + P^1$ , 那么对于  $S$  和  $T, P = \{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  是  $G$  中经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 如图 14.

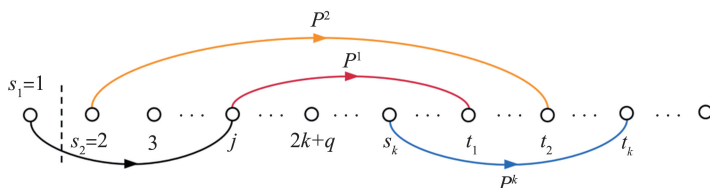


图 14  $\{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  示意图

Fig.14 Schematic diagram of  $\{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

情形 2 存在  $\pi_1 \pi_i \in F, i \in [2, 2k+q]$ , 设  $F' = F - \pi_1 \pi_i$ , 显然  $|F'| = |F| - 1 = q - 1$ 。

情形 2.1  $t_1 = i$ 。

情形 2.1.1  $2 \notin \{t_1, s_2\}$ 。

设  $P^1 = (\pi_1, \pi_i), \pi' = \pi[2, n] - \pi_i, G' = G - \pi_1 - \pi_i$ 。由注 1.1 得,  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2k+q-2)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(2k+q-2)$ -连通。设  $A = \{a/\pi_2 \pi_a \in F, a \in [3, 2k+q+1]\}$ , 由于  $G$  是  $(2k+q-1)$ -连通, 因此存在  $j \in [3, 2k+q+1] \setminus (\{s_2, s_3, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k\} \cup A)$ , 使得  $\pi_2 \pi_j \in E(G)$ 。由于  $(\pi_1 \pi_{t_1} \cup \pi_{s_2} \pi_{t_2} \cup \dots \cup \pi_{s_k} \pi_{t_k}) \not\subset F$  且  $\pi_1 \pi_{t_1} \in F$ , 因此存在  $\pi_{s_m} \pi_{t_m} \notin F, m \in [2, k]$ 。设  $S' = \{\pi_2, \pi_j, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_{m-1}}, \pi_{s_{m+1}}, \pi_{s_{m+2}}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = \{\pi_{s_m}, \pi_{t_2}, \pi_{t_3}, \dots, \pi_{t_k}\}$ ,  $S'$  包含好顶点  $\pi_2$ , 由归纳假设得: 对于  $S'$  和  $T'$ ,  $G'$  中存在经过  $F'$  的配对多对多  $k$ -DPC, 记为  $P' = \{P^2, P^3, \dots, P^{m-1}, P^{m_1}, P^{m_2}, P^{m+1}, \dots, P^k\}$ , 其中  $P^{m_1}$  是  $\pi_2, \pi_{s_m}$ -路径,  $P^{m_2}$  是  $\pi_j, \pi_{t_m}$ -路径。由于  $G$  是简单图, 因此  $P^{m_1}$  也是  $\pi_{s_m}, \pi_2$ -路径。设  $P^m = P^{m_1} + \pi_2 \pi_j + P^{m_2}$ , 则对  $S$  和  $T, P = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$  是  $G$  中过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 如图 15。

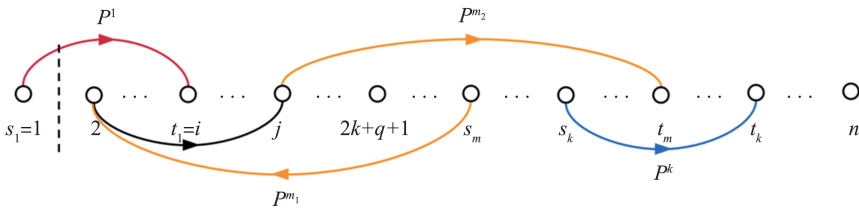


图 15  $\{P^1, P^2, \dots, P^k\}$  示意图  
Fig.15 Schematic diagram of  $\{P^1, P^2, \dots, P^k\}$

情形 2.1.2  $t_1 = 2$ 。

设  $P^1 = (\pi_1, \pi_2), \pi' = \pi[3, n], G' = G - \pi_1 - \pi_2$ , 由注 1.1 得,  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2k+q-1)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(2k+q-1)$ -连通。

情形 2.1.2.1  $s_2 = 3$ 。

设  $S' = \{\pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = \{\pi_{t_2}, \pi_{t_3}, \dots, \pi_{t_k}\}$ ,  $S'$  包含好顶点  $\pi_{s_2}$ 。

若  $k=2$ , 那么  $\pi'$  是  $G'$  的  $(3+q)$ -thick UIO,  $G'$  是  $(3+q)$ -连通, 因此由定理 2.2 得,  $G'$  中存在过  $F'$  的  $\pi_{s_2}, \pi_{t_2}$ -HP 记为  $P^2$ 。则对  $S$  和  $T, P = \{P^1, P^2\}$  是  $G$  中经过  $F$  的配对多对多 2-DPC, 如图 16。

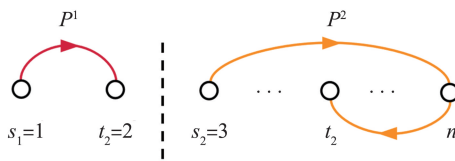


图 16  $\{\pi_1 \pi_2, P^2\}$  示意图  
Fig.16 Schematic diagram of  $\{\pi_1 \pi_2, P^2\}$

若  $k>2$ , 由归纳假设得, 对于  $S'$  和  $T'$ ,  $G'$  中存在经过  $F'$  的配对多对多  $(k-1)$ -DPC, 记为  $P' = \{P^2, P^3, \dots, P^k\}$ , 则对  $S$  和  $T, P = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$  是  $G$  中经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 如图 17。

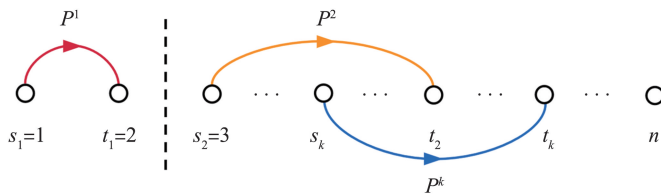


图 17  $\{\pi_1 \pi_2, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  示意图  
Fig.17 Schematic diagram of  $\{\pi_1 \pi_2, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

情形 2.1.2.2  $s_2 \neq 3$ 。

设  $A = \{a/\pi_3 \pi_a \in F, a \in [4, 2k+q+2]\}$ , 由于  $G$  是  $(2k+q-1)$ -连通, 因此存在  $\pi_3 \pi_j \in E(G)$ , 其中  $j \in [4, 2k+q+2] \setminus (\{s_2, s_3, \dots, s_k, t_2, t_3, \dots, t_k\} \cup A)$ 。由于  $(\pi_1 \pi_{t_1} \cup \pi_{s_2} \pi_{t_2} \cup \dots \cup \pi_{s_k} \pi_{t_k}) \not\subset F$  且  $\pi_1 \pi_{t_1} \in F$ , 因此存

在  $\pi_{s_m} \pi_{t_m} \notin F, m \in [2, k]$ 。设  $S' = \{\pi_3, \pi_j, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_{m-1}}, \pi_{s_{m+1}}, \pi_{s_{m+2}}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = \{\pi_{s_m}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_k}\}, S'$  包含好顶点  $\pi_3$ , 由归纳假设得, 对于  $S'$  和  $T', G'$  中存在经过  $F'$  的配对多对多  $k$ -DPC, 记为  $P' = \{P^2, P^3, \dots, P^{m-1}, P^{m+1}, P^{m+2}, \dots, P^k\}$ , 其中  $P^{m+1}$  是  $\pi_3, \pi_{s_m}$ -路径,  $P^{m+2}$  是  $\pi_j, \pi_{t_m}$ -路径。由于  $G$  是简单图, 因此  $P^{m+1}$  也是  $\pi_{s_m}, \pi_3$ -路径。设  $P^m = P^{m+1} + \pi_3 \pi_j + P^{m+2}$ , 则对  $S$  和  $T, P = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$  是  $G$  中过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 如图 18。

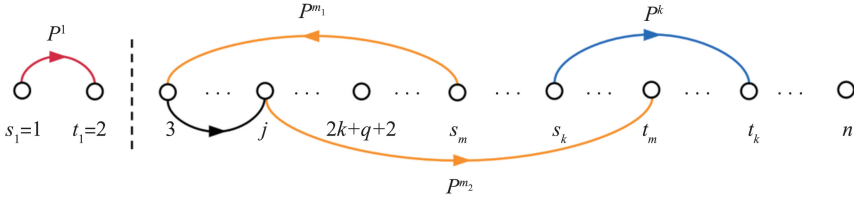


图 18 经过  $F$  的半配对  $k$ -DPC  
Fig.18 Semi-paired  $k$ -DPC pass through  $F$

情形 2.1.3  $s_2 = 2$ 。

设  $P^1 = (\pi_1, \pi_i), \pi' = \pi[2, n] - \pi_i, G' = G - \pi_1 - \pi_i$ , 由注 1.1 得,  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2k+q-2)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(2k+q-2)$ -连通。设  $S' = \{\pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = \{\pi_{t_2}, \pi_{t_3}, \dots, \pi_{t_k}\}, S'$  包含好顶点  $\pi_{s_2}$ 。

若  $k=2$ , 那么  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2+q)$ -thick UIO,  $G'$  是  $(2+q)$ -连通, 因此由定理 2.2 得,  $G'$  中存在经过  $F'$  的  $\pi_{s_2}, \pi_{t_2}$ -HP 记为  $P^2$ , 则对  $S$  和  $T, P = \{P^1, P^2\}$  是  $G$  中经过  $F$  的配对多对多 2-DPC, 如图 19。

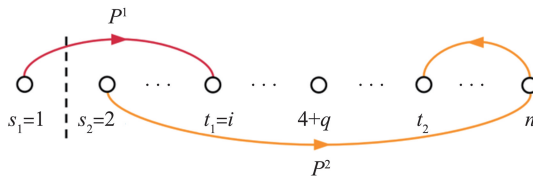


图 19  $\{\pi_1 \pi_i, P^2\}$  示意图  
Fig.19 Schematic diagram of  $\{\pi_1 \pi_i, P^2\}$

若  $k>2$ , 由归纳假设得, 对于  $S'$  和  $T', G'$  中存在经过  $F'$  的配对多对多  $(k-1)$ -DPC, 记为  $P' = \{P^2, P^3, \dots, P^k\}$ , 则对  $S$  和  $T, P = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$  是  $G$  中经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 如图 20。

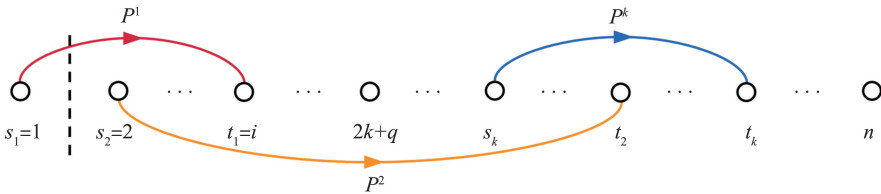


图 20  $\{\pi_1 \pi_i, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  示意图  
Fig.20 Schematic diagram of  $\{\pi_1 \pi_i, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

情形 2.2  $t_1 \neq i$ 。

情形 2.2.1  $2 \notin \{t_1, s_2\}$ 。

设  $\pi' = \pi[2, n] - \pi_i, G' = G - \pi_1 - \pi_i, S' = \{\pi_2, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = T, S'$  包含好顶点  $\pi_2$ , 由注 1.1 得,  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2k+q-2)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(2k+q-2)$ -连通, 因此由归纳假设得, 对于  $S'$  和  $T', G'$  中存在经过  $F'$  的配对多对多  $k$ -DPC, 记为  $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ , 其中  $P^1$  是  $\pi_2, \pi_{t_1}$ -路径。由于  $G$  是  $(2k+q-1)$ -连通, 因此  $\pi_i \pi_2 \in E(G)$ 。设  $Q = \pi_1 \pi_i + \pi_i \pi_2 + P^1$ , 那么对于  $S$  和  $T, P = \{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  是  $G$  中经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 如图 21。

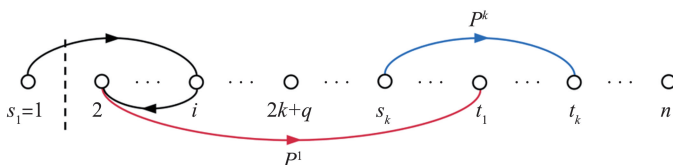


图 21  $\{\pi_1 \pi_i + \pi_i \pi_2 + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  示意图  
Fig.21 Schematic diagram of  $\{\pi_1 \pi_i + \pi_i \pi_2 + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

情形 2.2.2  $t_1=2$ 。

设  $\pi' = \pi[2, n]$ ,  $G' = G - \pi_1$ ,  $S' = \{\pi_{s_1}, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}$ ,  $T' = \{\pi_i, \pi_{t_2}, \pi_{t_3}, \dots, \pi_{t_k}\}$ ,  $S'$  包含好顶点  $\pi_{s_1}$ , 由注 1.1 得,  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2k+q-1)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(2k+q-1)$ -连通, 因此由归纳假设得, 对于  $S'$  和  $T'$ ,  $G'$  中存在经过  $F'$  的配对多对多  $k$ -DPC, 记为  $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ , 其中  $P^1$  是  $\pi_i, \pi_i$ -路径。由于  $G$  是简单图, 因此  $P^1$  也是  $\pi_i, \pi_{t_1}$ -路径。设  $Q = \pi_1 \pi_i + P^1$ , 那么对于  $S$  和  $T$ ,  $P = \{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  是  $G$  中经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 如图 22。

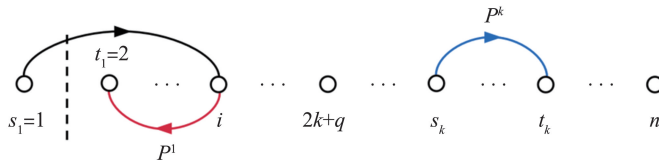


图 22 路覆盖  $\{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$   
Fig.22 Path cover  $\{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

情形 2.2.3  $s_2=2$ 。

设  $\pi' = \pi[2, n]$ ,  $G' = G - \pi_1$ ,  $S' = \{\pi_i, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}$ ,  $T' = T$ ,  $S'$  包含好顶点  $\pi_{s_2}$ , 由注 1.1 得,  $\pi'$  是  $G'$  的  $(2k+q-1)$ -thick UIO, 则  $G'$  是  $(2k+q-1)$ -连通。因此由归纳假设得, 对于  $S'$  和  $T'$ ,  $G'$  中存在经过  $F'$  的配对多对多  $k$ -DPC, 记为  $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ , 其中  $P^1$  是  $\pi_i, \pi_{t_1}$ -路径。设  $Q = \pi_1 \pi_i + P^1$ , 那么对于  $S$  和  $T$ ,  $P = \{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  是  $G$  中经过  $F$  的配对多对多  $k$ -DPC, 如图 23。证毕。

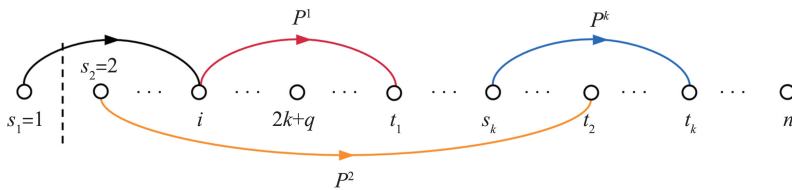


图 23  $\{\pi_1 \pi_i + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$  示意图  
Fig.23 Schematic diagram of  $\{\pi_1 \pi_i + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

4 结束语

本文讨论了具有指定源集  $S$  和汇集  $T$  的半配对多对多  $k$ -DPC 问题, 给出了具有错误顶点和边的单位区间图仍然保持不相交路覆盖性质的结构特点。结合单位区间图和路覆盖的性质定理得到以下结论:  $n$ -顶点单位区间图  $G$  任意删去  $p$  个点且任意经过  $q$  条边得到  $G'$ , 其中  $(p+q) \leq r$ ,  $G'$  具有半配对 1-DPC 性质的充要条件  $G$  是  $(2+r)$ -连通; 对于任意  $k$ -顶点不相交子集  $S$  和  $T$ ,  $S$  包含一个好顶点, 那么  $G'$  有配对多对多  $k$ -DPC 当且仅当  $G$  是  $(2k+r-1)$ -连通, 其中  $k \geq 2$ 。研究方法和结论有助于设计在单位区间图上寻找点容错和边容错的半配对  $k$ -DPC 的有效算法。接下来深入探讨的开放性课题有:

- (1) 单位区间图任意删去  $r$  条边仍具有半配对  $k$ -DPC 性质的充要条件;
- (2) 区间图任意删去  $p$  个点且经过  $q$  条边仍具有半配对  $k$ -DPC 性质的充要条件。

参考文献:

[1] WANG Fan, ZHAO Weisheng. One-to-one disjoint path covers in hypercubes with faulty edges[J]. The Journal of Supercomputing, 2019, 75(8):5583-5595.

[2] DUSART J, CORNEIL D G, HABIB M. Corrigendum: LDFS-based certifying algorithm for the minimum path cover problem on cocomparability graphs[J]. SIAM Journal on Computing, 2021, 50(3):1148-1153.

[3] PARK J H, CHOI J, LIM H S. Algorithms for finding disjoint path covers in unit interval graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 205:132-149.

[4] CHEN Xiaodong, LIU Mingda, LIU Huiqing. Minimum path cover in quasi-claw-free graphs[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2020, 46(3):815-820.

[5] YU Wei, LIU Zhaohui. Better approximability results for min-max tree/cycle/path cover problems[J]. Journal of Combinatori-

- al Optimization, 2019, 37(2):563-578.
- [6] GURSKI F, KOMANDER D, REHS C, et al. Computing directed Steiner path covers[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2022, 43(2):402-431.
- [7] LI Jing, WANG Guoren, CHEN Lichao. Paired 2-disjoint path covers of multi-dimensional torus networks with  $2n-3$  faulty edges[J]. Theoretical Computer Science, 2017, 677:1-11.
- [8] LI J, MELEKIAN C, ZUO S R, et al. Unpaired many-to-many disjoint path covers on bipartite  $k$ -ary  $n$ -cube networks with faulty elements[J]. International Journal of Foundations of Computer Science, 2020, 31(3):371-383.
- [9] PARK J H. Paired many-to-many 3-disjoint path covers in bipartite toroidal grids[J]. Journal of Computing Science and Engineering, 2018, 12(3):115-126.
- [10] PARK J H, IHM I. A linear-time algorithm for finding a one-to-many 3-disjoint path cover in the cube of a connected graph [J]. Information Processing Letters, 2019, 142(2):57-63.
- [11] ČUSTIĆ A, LENDL S. The Steiner cycle and path cover problem on interval graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2022, 43(1):226-234.
- [12] CHEN Yong, CAI Yinhui, LIU Longcheng, et al. Path cover with minimum nontrivial paths and its application in two-machine flow-shop scheduling with a conflict graph[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2022, 43(3):571-588.
- [13] KAVRA R, GUPTA A, KANSAL S. Interval graph based energy efficient routing scheme for a connected topology in wireless sensor networks[J]. Wireless Networks, 2021, 27(8):5085-5104.
- [14] PATEL Y S, BAHETI A, MISRA R. Interval graph multi-coloring-based resource reservation for energy-efficient containerized cloud data centers[J]. The Journal of Supercomputing, 2021, 77(5):4484-4532.
- [15] AVANI V S, SHAILA S G, VADIVEL A. Interval graph of facial regions with common intersection salient points for identifying and classifying facial expression[J]. Multimedia Tools and Applications, 2021, 80(3):3367-3390.
- [16] LI Xingfu, FENG Haodi, JIANG Haotao, et al. Solving the maximum internal spanning tree problem on interval graphs in polynomial time[J]. Theoretical Computer Science, 2018, 734:32-37.
- [17] PRADHAN D, PAL S. An  $O(n+m)$  time algorithm for computing a minimum semitotal dominating set in an interval graph [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2021, 66(1):733-747.
- [18] KRATOCHVÍL J, MASŘÍK T, NOVOTNÁ J. U-bubble model for mixed unit interval graphs and its applications; the maxcut problem revisited[J]. Algorithmica, 2021, 83(12):3649-3680.
- [19] PARK J H, KIM J H, LIM H S. Disjoint path covers joining prescribed source and sink sets in interval graphs[J]. Theoretical Computer Science, 2019, 776:125-137.
- [20] PARK J H, LIM H S. Characterization of interval graphs that are unpaired 2-disjoint path coverable[J]. Theoretical Computer Science, 2020, 821:71-86.
- [21] PARK J H. A sufficient condition for the unpaired  $k$ -disjoint path coverability of interval graphs[J]. The Journal of Supercomputing, 2021, 77(7):6871-6888.
- [22] LI Peng, WU Yaokun. A linear time algorithm for the 1-fixed-endpoint path cover problem on interval graphs[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2017, 31(1):210-239.
- [23] LOOGES P J, OLARIU S. Optimal greedy algorithms for indifference graphs[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1993, 25(7):15-25.
- [24] CHEN C, CHANG C C, CHANG G J. Proper interval graphs and the guard problem[J]. Discrete Mathematics, 1997, 170(1/2/3):223-230.

(编辑:李艺)