山东大学学报(理学版)2024 年 2 月 第 59 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.59, No.2, 2024

E-mail:xblxb@ sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2024)02-0110-10　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.592

一类 Riemann-Liouville 分数阶发展方程 mild 解的存在性与近似可控性

冯玉欣,杨和*
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:用线性算子余弦族理论和 Schauder 不动点定理证明 Banach 空间中一类 Riemann-Liouville 分数阶半线性发展方程 mild 解的存在性,并建立相应的控制系统的近似可控性结果。最后给出抽象结果的应用举例。
关键词:分数阶发展方程;mild 解;近似可控性;余弦族
中图分类号:O175.15　　**文献标志码**: A
引用格式:冯玉欣,杨和.一类 Riemann-Liouville 分数阶发展方程 mild 解的存在性与近似可控性[J].山东大学学报(理学版),2024,59(2):110-119.

Existence and approximate controllability of mild solutions for a class of Riemann-Liouville fractional evolution equations

FENG Yuxin, YANG He*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: The existence of mild solutions for a class of Riemann-Liouville fractional semilinear evolution equations in Banach space is proved by utilizing the cosine family theory of linear operators and Schauder′s fixed point theorem. The approximate controllability result is also established for the related control systems. An example is given to illustrate the application of abstract conclusions in the end.
Key words: fractional evolution equation; mild solution; approximate controllability; cosine family

0 引言

近年来,分数阶微积分理论已被广泛应用于自然科学的各个领域,成为了许多工程和物理问题极有利的数学工具。分数阶微分方程解的存在性和可控性已成为微分方程理论中的热点问题而受到众多学者的广泛关注。2013 年,Fěckan 等[1]利用 Schauder 不动点定理证明一类 Sobolev 型 Caputo 分数阶发展方程 mild 解的存在性和精确可控性。后来,常永奎等[2-3]运用预解算子理论给出了两类分数阶发展方程 mild 解的定义,并证明其近似可控性和最优控制结果。2021 年,周勇等[4]利用 Laplace 变换、余弦族理论和 Mainardi′s Wright 型函数给出一类 $\alpha\in(1,2)$ 阶 Caputo 分数阶发展方程 mild 解的新概念,并证明该系统的精确可控性结果。Riemann-Liouville 分数阶微分系统比 Caputo 分数阶微分系统更适合描述黏弹性材料的性质,且被广泛的应用于流体力学、黏弹性力学等领域,具有实际意义[5-6]。由于使用余弦族理论和 Schauder 不动点定理证明 Riemann-Liouville 分数阶半线性发展方程可解性和近似可控性的研究相对较少,所以本文加以补充和

收稿日期:2022-11-09;**网络出版时间**:2023-05-29 13:45:06
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms2/detail/37.1389.N.20230526.0919.004.html
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12061062)
第一作者简介:冯玉欣(1998—),女,硕士研究生,研究方向为非线性泛函分析. E-mail:fengyuxin202211@ 163.com
＊**通信作者简介**:杨和(1982—),男,教授,博士,研究方向为非线性泛函分析. E-mail:yanghe@ nwnu.edu.cn

丰富。

受上述文献启发,本文考虑 Riemann−Liouville 分数阶发展方程初值问题

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t)=Au(t)+f(t,u(t))+By(t), \quad t\in(0,b], \\ (g_{2-\alpha}*u)(0)=u_0, \quad (g_{2-\alpha}*u)'(0)=u_1 \end{cases} \tag{1}$$

mild 解的存在性和近似可控性,其中 D_t^α 为 $\alpha\in(1,2)$ 阶 Riemann−Liouville 分数阶导数算子。状态 $u(\cdot)$ 取值于 Banach 空间 E。$J=[0,b]$,$J'=(0,b]$,$b>0$ 为常数。$A:\mathscr{D}(A)\subset E\to E$ 生成 E 中强连续余弦族 $\{C(t)\}_{t\geqslant 0}$,$\mathscr{D}(A)$ 表示算子 A 的定义域,按图像范数 $\|u\|_A=\|u\|+\|Au\|$ 构成 Banach 空间。控制函数 $y\in L^2(J,U)$,U 是一个自反 Banach 空间,$B:U\to E$ 是线性有界算子。$f:J\times E\to E$ 是给定函数,$u_0\in\mathscr{D}(A)$,$u_1\in E$。

符号 $*$ 表示卷积,对 $\alpha>0$,记

$$g_\alpha(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}, & t>0, \\ 0, & t\leqslant 0, \end{cases}$$

其中 $\Gamma(\alpha)$ 是 Gamma 函数。一般地,函数 f 和 g 的卷积定义为

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-s)g(s)\mathrm{d}s。$$

1　预备知识

设 E 为 Banach 空间,其范数用 $\|\cdot\|$ 表示,$\mathfrak{L}(E)$ 为 E 中的线性有界算子全体构成的 Banach 空间。设 $(C(J,E),\|\cdot\|_C)$ 为通常的 E 值连续函数空间,其范数用 $\|u\|_C=\sup\limits_{t\in J}\|u(t)\|$ 表示。定义

$$C^\alpha(J,E)=\{u\in C(J',E),\ \lim_{t\to 0}t^{2-\alpha}u(t)\text{存在且有限}\},$$

则 $C^\alpha(J,E)$ 按范数 $\|u\|_{C^\alpha}=\sup\limits_{t\in J}\|t^{2-\alpha}u(t)\|$ 构成 Banach 空间。

令

$$B_r(J)=\{v\in C(J,E)\mid \|v\|_C\leqslant r\},$$
$$B_r^\alpha(J')=\{u\in C^\alpha(J,E)\mid \|u\|_{C^\alpha}\leqslant r\},$$

则 B_r、B_r^α 分别是 $C(J,E)$、$C^\alpha(J,E)$ 中的有界闭凸子集。

定义 1[7-8]　函数 $f:[0,+\infty)\to E$ 的 $\varrho>0$ 阶 Riemann−Liouville 分数阶积分可定义为

$$I_{0+}^\varrho f(t)=(g_\varrho*f)(t)=\frac{1}{\Gamma(\varrho)}\int_0^t(t-s)^{\varrho-1}f(s)\mathrm{d}s, \quad t>0, \quad \varrho>0。$$

定义 2[9]　设 E 是 Banach 空间,称从 E 到 E 的线性有界算子单参数族 $\{C(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 为强连续余弦族,当且仅当

(ⅰ) $C(s+t)+C(s-t)=2C(s)C(t), \quad s,t\in\mathbf{R}$;

(ⅱ) $C(0)=I$;

(ⅲ) 对于 $\forall x\in E$, $C(t)x$ 在 $\mathbf{R}$ 上关于 t 连续。

记 $\{S(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是与强连续余弦族 $\{C(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 相关联的正弦族,具体形式为

$$S(t)u=\int_0^t C(s)u\mathrm{d}s, \quad u\in E, \quad t\in\mathbf{R}。 \tag{2}$$

引理 1[9]　设 $\{C(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是 E 上的强连续余弦族,则

(ⅰ) 对于 $\forall u\in E$, $S(t)u$ 在 $\mathbf{R}$ 上关于 t 连续;

(ⅱ) 如果 $u\in E$,则 $S(t)u\in\mathscr{D}(A)$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(t)u=AS(t)u$;

(ⅲ) 如果 $u\in\mathscr{D}(A)$,则 $S(t)u\in\mathscr{D}(A)$ 且 $AS(t)u=S(t)Au$;

(ⅳ) $S(s+t)+S(s-t)=2S(s)C(t)$, $s,t\in\mathbf{R}$;

(Ⅴ) 对所有的 $s,t\in\mathbf{R}$,存在常数 $K\geqslant 1,\omega\geqslant 0$,使得 $\|C(t)\|\leqslant K\mathrm{e}^{\omega|t|}$,则

$$\|S(t)-S(s)\|\leqslant K\left|\int_s^t \mathrm{e}^{\omega|s|}\mathrm{d}s\right|。$$

引理 2[9] 设 $\{C(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是 E 上的强连续余弦族,满足 $\|C(t)\|\leqslant K\mathrm{e}^{\omega|t|}$,$t\in\mathbf{R}$,$A$ 是 $C(t)$ 的无穷小生成元,则对 $u\in E$ 和 $\{\lambda^2:\mathrm{Re}\ \lambda>\omega\}\subset\rho(A)$,有

$$\lambda(\lambda^2\mathrm{I}-A)^{-1}u=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}C(t)u\mathrm{d}t,\quad (\lambda^2\mathrm{I}-A)^{-1}u=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)u\mathrm{d}t, \tag{3}$$

其中 $\rho(A)$ 是算子 A 的预解集。

本文假设条件:

(H1) 算子 A 生成强连续余弦族 $\{C(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$,且当 $t\geqslant 0$ 时,余弦族 $\{C(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 一致有界。

显然,由条件(H1)可知,当 $t\geqslant 0$ 时,存在常数 $M\geqslant 1$,使得 $\|C(t)\|\leqslant M$。

记 $q=\dfrac{\alpha}{2}$,则 $q\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$。

引理 3[10] 设 $u_0\in\mathscr{D}(A)$, $u_1\in E$, $f\in L^1([0,\infty),E)$,如果 u 是问题

$$\begin{cases}\mathrm{D}_t^\alpha u(t)=Au(t)+f(t), & t\in[0,\infty),\quad \alpha\in(1,2),\\ (g_{2-\alpha}*u)(0)=u_0, & (g_{2-\alpha}*u)'(0)=u_1\end{cases} \tag{4}$$

的 mild 解,则 u 满足方程

$$u(t)=g_{2q-1}(t)u_0+(g_{2q-1}*AT_q)(t)u_0+T_q(t)u_1+\int_0^t T_q(t-s)f(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,\infty),$$

其中

$$T_q(t)=t^{q-1}\int_0^\infty q\theta M_q(\theta)S(t^q\theta)\mathrm{d}\theta,$$

这里,$M_q(\cdot)$ 是 Mainardi′s Wright 型函数,

$$M_q(\theta)=\sum_{k=0}^\infty \frac{(-\theta)^k}{k!\,\Gamma(1-q(k+1))},\quad q\in(0,1),$$

且满足

$$M_q(\theta)\geqslant 0,\quad \int_0^\infty \theta^\delta M_q(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+q\delta)},\quad \delta\in(-1,\infty)。$$

定义 3 设 $u_0\in\mathscr{D}(A)$,$u_1\in E$,如果 u 满足积分方程

$$\begin{aligned}u(t)=&\,g_{2q-1}(t)u_0+(g_{2q-1}*AT_q)(t)u_0+T_q(t)u_1\\&+\int_0^t T_q(t-s)By(s)\mathrm{d}s+\int_0^t T_q(t-s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,\quad t\in J',\end{aligned} \tag{5}$$

则称函数 $u\in C^\alpha(J,E)$ 是初值问题(1)的 mild 解。

引理 4 设条件(H1)成立,对任意 $t\in J$,$u\in E$,$T_q(t)$ 是线性算子,且

$$\|T_q(t)u\|\leqslant\frac{M}{\Gamma(2q)}\|u\|t^{2q-1}。$$

证明 因为当 $t\in J$ 时,$S(t)$ 是线性算子,所以 $T_q(t)$ 也是线性算子。根据条件(H1)可得

$$\begin{aligned}\|T_q(t)u\|&\leqslant t^{q-1}\int_0^\infty q\theta M_q(\theta)\|S(t^q\theta)u\|\mathrm{d}\theta\\&\leqslant t^{q-1}\int_0^\infty q\theta M_q(\theta)\left\|\int_0^{t^q\theta}C(s)u\mathrm{d}s\right\|\mathrm{d}\theta\\&=M\|u\|t^{2q-1}\int_0^\infty q\theta^2M_q(\theta)\mathrm{d}\theta\\&=M\|u\|t^{2q-1}q\frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma(1+2q)}\\&=\frac{M}{\Gamma(2q)}\|u\|t^{2q-1}。\end{aligned}$$

引理 5 设条件(H1)成立,对任意 $t\in J$,有

$$\|(g_{2q-1}*AT_q)(t)u\|\leqslant\frac{M}{\Gamma(4q-1)}t^{4q-2}\|u\|_A,\quad u\in\mathscr{D}(A)。$$

证明　对 $\forall t\in J$,根据条件(H1)可得

$$\begin{aligned}\|(g_{2q-1}*AT_q)(t)u\|&\leqslant\int_0^t g_{2q-1}(t-s)s^{q-1}\int_0^\infty q\theta M_q(\theta)\|S(s^q\theta)Au\|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\\&\leqslant M\int_0^t g_{2q-1}(t-s)s^{2q-1}\int_0^\infty q\theta^2M_q(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\|u\|_A\\&=M\int_0^t g_{2q-1}(t-s)s^{2q-1}q\frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma(1+2q)}\mathrm{d}s\|u\|_A\\&=M\int_0^t g_{2q-1}(t-s)s^{2q-1}\frac{1}{\Gamma(2q)}\mathrm{d}s\|u\|_A\\&=\frac{M}{\Gamma(2q)}\int_0^t g_{2q-1}(t-s)s^{2q-1}\mathrm{d}s\|u\|_A\\&=\frac{M}{\Gamma(4q-1)}t^{4q-2}\|u\|_A。\end{aligned}$$

引理 6　设条件(H1)成立,对任意 $u\in E,0\leqslant t_1<t_2\leqslant b$,有

$$\|T_q(t_2)u-T_q(t_1)u\|\to0,\quad t_2\to t_1。$$

证明　对于 $\forall u\in E,0\leqslant t_1<t_2\leqslant b$,根据引理 4 可得

$$\begin{aligned}\|T_q(t_2)u-T_q(t_1)u\|&\leqslant\left\|\int_0^\infty q\theta M_q(\theta)[t_2^{q-1}S(t_2^q\theta)-t_1^{q-1}S(t_1^q\theta)]u\mathrm{d}\theta\right\|\\&\leqslant\int_0^\infty q\theta M_q(\theta)[t_2^{q-1}\|S(t_2^q\theta)-S(t_1^q\theta)\|+|t_2^{q-1}-t_1^{q-1}|S(t_1^q\theta)]\|u\|\mathrm{d}\theta\\&\leqslant\frac{1}{\Gamma(2q)}Mt_2^{q-1}|t_2^q-t_1^q|\|u\|+\frac{1}{\Gamma(2q)}Mt_1^q|t_2^{q-1}-t_1^{q-1}|\|u\|,\end{aligned}$$

因此,当 $t_2-t_1\to0$ 时,$\|T_q(t_2)u-T_q(t_1)u\|\to0$。

引理 7　设条件(H1)成立,对任意 $t,s\geqslant0$,有

$$\|T_q(t)-T_q(s)\|\to0,t\to s。$$

证明　设 $T_q(t)=t^{q-1}P_q(t)$,其中 $P_q(t)=\int_0^\infty q\theta M_q(\theta)S(t^q\theta)\mathrm{d}\theta$。当 $t\in J$ 时,$S(t)$ 是线性算子,所以 $P_q(t)$ 也是线性算子。由式(2)可得

$$\begin{aligned}\|P_q(t)u\|&\leqslant\int_0^\infty q\theta M_q(\theta)\|S(t^q\theta)u\|\mathrm{d}\theta\leqslant\int_0^\infty q\theta M_q(\theta)\int_0^{t^q\theta}\|C(s)u\|\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\\&\leqslant Mq\|u\|t^q\int_0^\infty\theta^2M_q(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{M}{\Gamma(2q)}\|u\|t^q。\end{aligned}$$

对任意 $t_1,t_2\geqslant0$,根据引理 1(Ⅴ)可得

$$\begin{aligned}\|P_q(t_2)-P_q(t_1)\|&\leqslant\int_0^\infty q\theta M_q(\theta)\|S(t_2^q\theta)-S(t_1^q\theta)\|\mathrm{d}\theta\\&\leqslant\frac{M}{\Gamma(2q)}|t_2^q-t_1^q|\to0,\quad t_2\to t_1,\end{aligned}$$

则对 $\forall t,s\geqslant0,u\in E$,有

$$\lim_{t\to0}t^{q-1}P_q(t)u=0,\quad\|t^{q-1}P_q(t)-s^{q-1}P_q(s)\|\to0,\quad t\to s。$$

根据正弦族紧性的有关文献[11-13],得到引理 8。

引理 8　设条件(H1)成立,则对每个 $t\geqslant0$,$S(t)$ 在 E 上是紧算子。

引理 9[10]　对于每一个 $t>0$,若 $S(t)$ 在 E 上是紧的,则 $T_q(t)$ 在 E 上也是紧的。

2　mild 解的存在性

对 $\forall u\in C^\alpha(J,E)$,定义算子 $\mathscr{P}$:

$$(\mathscr{P}u)(t)=g_{2q-1}(t)u_0+(g_{2q-1}*AT_q)(t)u_0+T_q(t)u_1+\int_0^t T_q(t-s)By(s)\mathrm{d}s+\int_0^t T_q(t-s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,\ t\in J'。\tag{6}$$

易证

$$\lim_{t\to 0^+} t^{2-\alpha}(\mathscr{P}u)(t)=\frac{u_0}{\Gamma(\alpha-1)}。$$

对 $\forall v\in C(J,E)$,令 $u(t)=t^{\alpha-2}v(t)$,则 $u\in C^{\alpha}(J,E)$。定义算子 p:

$$(pv)(t)=\begin{cases} t^{2-\alpha}(\mathscr{P}u)(t), & t\in(0,b],\\ \dfrac{u_0}{\Gamma(\alpha-1)}, & t=0。\end{cases}\tag{7}$$

由定义可知,如果 $v(\cdot)=\cdot^{2-\alpha}u(\cdot)\in C(J,E)$ 满足算子方程 $v=pv$,则 $u\in C^{\alpha}(J,E)$ 是初值问题(1)的 mild 解。

定理 1 设条件(H1)成立,且满足

(H2) 对任意 $t\in J$,函数 $f(t,\cdot):E\to E$ 连续,对每个 $u\in E$,函数 $f(\cdot,u):J\to E$ 是强可测的,且存在函数 $m\in L^2(J,\mathbf{R}^+)$,使得

$$\mathrm{I}_{0+}^{\alpha}m\in C(J',\mathbf{R}^+),\quad \lim_{t\to 0^+} t^{2-\alpha}\mathrm{I}_{0+}^{\alpha}m(t)=0,$$
$$\|f(t,u)\|\leqslant m(t),\quad u\in E,\quad t\in J;$$

(H3) 存在函数 $\psi(t)\in L^2(J,\mathbf{R}^+)$,使得对每个 $y(\cdot)\in L^2(J,U)$,有 $\|By(t)\|\leqslant\psi(t)$, $t\in J$。

则初值问题(1)至少有一个 mild 解。

证明 设 $B_r(J)=\{v\in C(J,E)\mid \|v\|_C\leqslant r\}$,下面分 4 步证明算子方程 $v=pv$ 在某个 $B_r(J)\subseteq C(J,E)$ 中至少有一个解。

第 1 步:证明存在 $r>0$,使得 $p:B_r(J)\to B_r(J)$。

取 $r>0$ 充分大,使得

$$r\geqslant\frac{M}{\Gamma(4q-1)}b^{\alpha}\|u_0\|_A+\frac{M}{\Gamma(2q)}\left[b\|u_1\|_C+b(\|m\|_{L^2(J,\mathbf{R}^+)}+\|\psi\|_{L^2(J,\mathbf{R}^+)})\right]。$$

对 $\forall v\in B_r(J)$,根据引理 4、5 可得

$$\begin{aligned}\|(pv)(t)\|&=\|t^{2-\alpha}(\mathscr{P}u)(t)\|\\&\leqslant\|t^{2-\alpha}g_{2q-1}(t)u_0\|+\|t^{2-\alpha}(g_{2q-1}*AT_q)(t)u_0\|+\|t^{2-\alpha}T_q(t)u_1\|\\&\quad+\left\|\int_0^t t^{2-\alpha}T_q(t-s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right\|+\left\|\int_0^t t^{2-\alpha}T_q(t-s)By(s)\mathrm{d}s\right\|\\&\leqslant\frac{M}{\Gamma(4q-1)}t^{\alpha}\|u_0\|+\frac{M}{\Gamma(2q)}t\|u_1\|+\frac{M}{\Gamma(2q)}t\int_0^t[m(s)+\psi(s)]\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{M}{\Gamma(4q-1)}b^{\alpha}\|u_0\|_A+\frac{M}{\Gamma(2q)}b\|u_1\|_C+\frac{M}{\Gamma(2q)}b(\|m\|_{L^2(J,\mathbf{R}^+)}+\|\psi\|_{L^2(J,\mathbf{R}^+)})\\&\leqslant r,\end{aligned}$$

因此,对 $\forall v\in B_r(J)$, $\|pv\|_C\leqslant r$。

第 2 步:证明 $p:B_r(J)\to B_r(J)$ 连续。

设 $\{u_n\}_{n\geqslant 1}\subset B_r(J)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$,由 f 的连续性,有

$$\lim_{n\to\infty}f(t,u_n(t))=f(t,u(t)),\quad t\in J。$$

对 $t\in J'$,由条件(H2)可得

$$(t-s)^{\alpha-1}\|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\|\leqslant 2(t-s)^{\alpha-1}m(s),\quad s\in[0,t)。$$

因为函数 $s\to 2(t-s)^{\alpha-1}m(s)$ 是可积的,所以根据 Lebesgue 控制收敛定理,可得

$$\|(pv_n)(t)-(pv)(t)\|=\|t^{2-\alpha}(\mathscr{P}u_n)(t)-t^{2-\alpha}(\mathscr{P}u)(t)\|$$
$$\leqslant\int_0^t t^{2-\alpha}\,T_q(t-s)\,\|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \frac{M}{\Gamma(2q)} t^{2-\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \| f(s,u_n(s)) - f(s,u(s)) \| \mathrm{d}s$$
$$\to 0, \quad n \to \infty,$$

因此,$p: B_r(J) \to B_r(J)$ 是连续算子。

第 3 步:证明 $\{pv : v \in B_r(J)\}$ 等度连续。

对 $v \in B_r(J)$,设 $t_1 = 0, 0 < t_2 \leqslant b$,由式(6)和(7)可得

$$\begin{aligned}
&\| (pv)(t_2) - (pv)(0) \| \\
&= \| t_2^{2-\alpha} (\mathscr{P}u)(t_2) - t_1^{2-\alpha} (\mathscr{P}u)(0) \| \\
&= \| t_2^{2-\alpha} (g_{2q-1} * AT_q)(t_2) u_0 + t_2^{2-\alpha} T_q(t_2) u_1 + t_2^{2-\alpha} \int_0^{t_2} T_q(t_2 - s)[f(s,u(s)) + By(s)] \mathrm{d}s \| \\
&\leqslant \frac{M}{\Gamma(4q-1)} t_2^{\alpha} \| u_0 \|_A + \frac{M}{\Gamma(2q)} t_2 \| u_1 \|_C + \frac{M}{\Gamma(2q)} t_2 \int_0^{t_2} [m(s) + \psi(s)] \mathrm{d}s \\
&\to 0, \quad t_2 \to 0。
\end{aligned}$$

设 $0 < t_1 < t_2 \leqslant b$,对 $\forall \varepsilon \in (0, t_1)$,根据算子 p 的定义,可得

$$\begin{aligned}
&\| (pv)(t_2) - (pv)(t_1) \| = \| t_2^{2-\alpha} (\mathscr{P}u)(t_2) - t_1^{2-\alpha} (\mathscr{P}u)(t_1) \| \\
&= \| t_2^{2-\alpha} g_{2q-1}(t_2) u_0 - t_1^{2-\alpha} g_{2q-1}(t_1) u_0 \| \\
&\quad + \| t_2^{2-\alpha} (g_{2q-1} * AT_q)(t_2) u_0 - t_1^{2-\alpha} (g_{2q-1} * AT_q)(t_1) u_0 \| \\
&\quad + \| t_2^{2-\alpha} T_q(t_2) u_1 - t_1^{2-\alpha} T_q(t_1) u_1 \| \\
&\quad + \| \int_0^{t_2} t_2^{2-\alpha} T_q(t_2 - s)[f(s,u(s)) + By(s)] \mathrm{d}s \\
&\quad - \int_0^{t_1} t_1^{2-\alpha} T_q(t_1 - s)[f(s,u(s)) + By(s)] \mathrm{d}s \| \\
&\leqslant (t_2^{2-\alpha} - t_1^{2-\alpha}) \int_0^{t_1} \| (g_{2q-1}(t_2 - s) - g_{2q-1}(t_1 - s)) AT_q(s) u_0 \| \mathrm{d}s \\
&\quad + t_2^{2-\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \| g_{2q-1}(t_2 - s) AT_q(s) u_0 \| \mathrm{d}s + t_2^{2-\alpha} \| T_q(t_2) u_1 - T_q(t_1) u_1 \| \\
&\quad + t_2^{2-\alpha} \int_0^{t_1-\varepsilon} \| T_q(t_2 - s) - T_q(t_1 - s) \| [f(s,u(s)) + By(s)] \mathrm{d}s \\
&\quad + (t_2^{2-\alpha} - t_1^{2-\alpha}) \int_0^{t_1-\varepsilon} \| T_q(t_1 - s) \| [f(s,u(s)) + By(s)] \mathrm{d}s \\
&\quad + t_2^{2-\alpha} \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} \| T_q(t_2 - s) - T_q(t_1 - s) \| [f(s,u(s)) + By(s)] \mathrm{d}s \\
&\quad + t_2^{2-\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \| T_q(t_2 - s) \| [f(s,u(s)) + By(s)] \mathrm{d}s \\
&\leqslant (t_2^{2-\alpha} - t_1^{2-\alpha}) \int_0^{t_1} \| (g_{2q-1}(t_2 - s) - g_{2q-1}(t_1 - s)) AT_q(s) u_0 \| \mathrm{d}s \\
&\quad + t_2^{2-\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \| g_{2q-1}(t_2 - s) AT_q(s) u_0 \| \mathrm{d}s + t_2^{2-\alpha} \| T_q(t_2) u_1 - T_q(t_1) u_1 \| \\
&\quad + t_2^{2-\alpha} \sup_{s \in [0, t_1-\varepsilon]} \| T_q(t_2 - s) - T_q(t_1 - s) \| \int_0^{t_1-\varepsilon} [m(s) + \psi(s)] \mathrm{d}s \\
&\quad + t_2^{2-\alpha} \sup_{s \in [t_1-\varepsilon, t_1]} \| T_q(t_2 - s) - T_q(t_1 - s) \| \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} [m(s) + \psi(s)] \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(2q)} t_1^{\alpha-1} (t_2^{2-\alpha} - t_1^{2-\alpha}) \int_0^{t_1-\varepsilon} [m(s) + \psi(s)] \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(2q)} t_2 \int_{t_1}^{t_2} [m(s) + \psi(s)] \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

因此,由引理 6、7 可知当 $t_2-t_1\to 0$ 且 $\varepsilon\to 0$ 时,有

$$\|(pv)(t_2)-(pv)(t_1)\|\to 0,\quad t_2\to t_1,$$

所以$\{pv:v\in B_r(J)\}$是等度连续的。

第 4 步:证明对$\forall t\in J$,$\mathscr{H}(t)=\{(pv)(t),v\in B_r(J)\}$在 E 中相对紧。

显然,$\mathscr{H}(0)$在 E 中相对紧。

设 $0<t\leqslant b$,$0<\varepsilon<t$,定义算子 p_ε:

$$(p_\varepsilon v)(t)=\frac{u_0}{\Gamma(\alpha-1)}+t^{2-\alpha}\int_0^t g_{2q-1}(t-s)AT_q(s)u_0\mathrm{d}s+t^{2-\alpha}T_q(t)u_1$$
$$+t^{2-\alpha}\int_0^{t-\varepsilon}T_q(t-s-\varepsilon)[By(s)+f(s,v(s))]\mathrm{d}s。$$

与第 1、3 步证明类似,可验证$\{p_\varepsilon v:\varepsilon\in(0,t-s),v\in B_r(J)\}$一致有界且等度连续,故根据 Arzela-Ascoli定理可知,集合 $\mathscr{H}^\varepsilon(t):=\{(p_\varepsilon v)(t),\varepsilon\in(0,t-s),v\in B_r(J)\}$在 E 中相对紧。进一步,有

$$\begin{aligned}\|(p_\varepsilon v)(t)-(pv)(t)\|&\leqslant t^{2-\alpha}\int_{t-\varepsilon}^t T_q(t-s)[By(s)+f(s,v(s))]\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{M}{\Gamma(2q)}t\int_{t-\varepsilon}^t[By(s)+f(s,v(s))]\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{M}{\Gamma(2q)}t\left[\int_{t-\varepsilon}^t m(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\varepsilon}^t\psi(s)\mathrm{d}s\right]\\&\to 0,\quad\varepsilon\to 0。\end{aligned}$$

因此,对$\forall t\in J'$,存在一个相对紧的集合 $\mathscr{H}^\varepsilon(t)$任意逼近 $\mathscr{H}(t)$,故 $\mathscr{H}(t)$在 E 中相对紧。由 Arzela-Ascoli 定理可知,集合$\{pv,v\in B_r(J)\}$相对紧,故 p 为 $C(J,E)$中的全连续算子。根据 Schauder 不动点定理,算子 p 有不动点,则初值问题(1)至少有一个 mild 解。

3 近似可控性

设 $y\in L^2(J,U)$是给定的控制函数,$u(t;y)$为系统(1)相应于控制函数 y 的 mild 解,称集合 $\mathscr{K}_b(f)=\{u(b;y)\in E:y\in L^2(J,U),u$ 为系统(1)相应于 y 的 mild 解$\}$为系统(1)的可达集。

定义 4 如果$\overline{\mathscr{K}_b(f)}=E$,其中$\overline{\mathscr{K}_b(f)}$表示 $\mathscr{K}_b(f)$的闭包,则称系统(1)在区间 J 上是近似可控的。

由定义 4 可知,对给定的状态值$\bar{u}_b\in E$ 和$\forall\varepsilon>0$,如果存在控制函数 $y\in L^2(J,U)$,使得控制系统(1)的 mild 解 $u(t;y)$满足

$$\|u(b;y)-\bar{u}_b\|<\varepsilon,$$

则称控制系统(1)在区间 J 上近似可控。

定义算子 Γ_0^b:

$$\Gamma_0^b=\int_0^b T_q(b-s)BB^*T_q^*(b-s)\mathrm{d}s,$$

其中 B^*、$T_q^*(b-s)$分别表示 B、$T_q(b-s)$的共轭算子。记

$$R(\mu,\Gamma_0^b)=(\mu\mathrm{I}+\Gamma_0^b)^{-1},\quad\mu>0。$$

定理 2 设条件(H1)—(H3)成立,且满足

(H4) 在强算子拓扑意义下,有

$$\mu R(\mu,\Gamma_0^b)\to 0,\quad\mu\to 0^+,$$

则分数阶控制系统(1)在 J 上近似可控。

证明 对 $\mu>0$,定义算子 $\mathscr{P}_\mu$:

$$(\mathscr{P}_\mu u)(t)=g_{2q-1}(t)u_0+(g_{2q-1}*AT_q)(t)u_0+T_q(t)u_1$$
$$+\int_0^t T_q(t-s)[By_\mu(s)+f(s,u(s))]\mathrm{d}s,\tag{8}$$

其中

$$y_\mu(t)=B^*T_q(b-t)R(\mu,\Gamma_0^b)p(u(\cdot)),$$

$$p(u(\cdot))=\bar{u}_b-g_{2q-1}(b)u_0-(g_{2q-1}*AT_q)(b)u_0-T_q(b)u_1-\int_0^b T_q(b-s)f(s,u(s))\mathrm{d}s。$$

由定理 1 知,算子 p_μ 在 $B_r(J)$ 中存在不动点,设为 $v_\mu(t)$,则对 $t\in J'$,有

$$v_\mu(t)=(p_\mu v_\mu)(t)=t^{2-\alpha}(\mathscr{P}_\mu u_\mu)(t)。$$

令 $u_\mu(t)=t^{\alpha-2}v_\mu(t)$,则由式(8)知

$$\begin{aligned}u_\mu(t)&=(\mathscr{P}_\mu u_\mu)(t)\\&=g_{2q-1}(t)u_0+(g_{2q-1}*AT_q)(t)u_0+T_q(t)u_1\\&\quad+\int_0^t T_q(t-s)[By_\mu(s)+f(s,u_\mu(s))]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中

$$y_\mu(t)=B^*T_q(b-t)R(\mu,\Gamma_0^b)p(u_\mu(\cdot)),$$

$$p(u_\mu(\cdot))=\bar{u}_b-g_{2q-1}(b)u_0-(g_{2q-1}*AT_q)(b)u_0-T_q(b)u_1-\int_0^b T_q(b-s)f(s,u_\mu(s))\mathrm{d}s。$$

直接计算可得

$$u_\mu(b)=\bar{u}_b-\mu R(\mu,\Gamma_0^b)p(u_\mu(\cdot))。$$

由条件(H2)可得

$$\left(\int_0^b \|f(s,u_\mu(s))\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|m\|_{L^2(J,\mathbf{R}^+)}<\infty,$$

所以序列$\{f(\cdot,u_\mu(\cdot)):\mu>0\}$在 $L^2(J,U)$ 中有界。存在$\{f(\cdot,u_\mu(\cdot)):\mu>0\}$的子序列,仍然记作$\{f(\cdot,u_\mu(\cdot)):\mu>0\}$,在 $L^2(J,U)$ 中弱收敛到函数 $\mathscr{F}(\cdot)\in L^2(J,U)$。

令

$$\omega=\bar{u}_b-g_{2q-1}(b)u_0-(g_{2q-1}*AT_q)(b)u_0-T_q(b)u_1-\int_0^b T_q(b-s)\mathscr{F}(s)\mathrm{d}s,$$

则

$$\|p(u_\mu(\cdot))-\omega\|=\left\|\int_0^b T_q(b-s)[f(s,u_\mu(s))-\mathscr{F}(s)]\mathrm{d}s\right\|。\tag{9}$$

因为当 $t>0$ 时,$T_q(t)$ 是紧算子,与定理 1 中算子 p 的紧性证明类似,可验证

$$\int_0^b T_q(b-s)[f(s,u_\mu(s))-\mathscr{F}(s)]\mathrm{d}s\to0,\quad\mu\to0^+,\tag{10}$$

所以根据式(9)和(10)可得

$$\|p(u_\mu(\cdot))-\omega\|\to0,\quad\mu\to0^+。\tag{11}$$

结合式(11)以及条件(H4)可得

$$\begin{aligned}\|u_\mu(b)-\bar{u}_b\|&=\|\mu R(\mu,\Gamma_0^b)p(u_\mu(\cdot))\|\\&\leqslant\|\mu R(\mu,\Gamma_0^b)\omega\|+\|\mu R(\mu,\Gamma_0^b)\|\cdot\|p(u_\mu(\cdot))-\omega\|\\&\to0,\ \mu\to0^+,\end{aligned}$$

故由定义 4 可知,分数阶控制系统(1)在区间 J 上近似可控。

4　应用

例 1　考虑分数阶发展方程初边值问题

$$\begin{cases}\mathrm{D}_t^\alpha u(t,x)=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)+By(t,x)+f(t,u(t,x)), & t\in J,x\in[0,\pi],\\ u(t,0)=u(t,\pi)=0, & t\in J,x\in[0,\pi],\\ \mathrm{I}_{0+}^{2-\alpha}u(0,x)=u_0(x),(\mathrm{I}_{0+}^{2-\alpha}u(0,x))'=u_1(x), & x\in[0,\pi]\end{cases}\tag{12}$$

其中 $J=[0,b]$,$y\in L^2(J,L^2(0,\pi;\mathbf{R}))$。

设 $E=L^2[0,\pi]$，记 $e_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin(nx)$，则 $\{e_n:n=1,2,\cdots\}$ 是 E 中的一组完备正交基。定义算子 A：$\mathscr{D}(A)\subset E\to E$，具体形式为

$$Au=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''(x),$$

其中 $\mathscr{D}(A)=\{u\in E:u''\in E,u(0)=u(\pi)=0\}$。算子 A 可表示为

$$Au=\sum_{n=1}^{\infty}-n^2(u,e_n)e_n,\quad u\in\mathscr{D}(A)。$$

易知，算子 A 是 E 中强连续余弦族 $\{C(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 的无穷小生成元，并且

$$C(t)u=\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nt)(u,e_n)e_n,\quad u\in E。$$

在 E 中与其相关联的正弦族 $\{S(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ 表示为

$$S(t)u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nt)(u,e_n)e_n,\quad u\in E。$$

定义空间 U 为

$$U=\left\{y=\sum_{n=2}^{\infty}y_ne_n(x)\mid\sum_{n=2}^{\infty}y_n^2<\infty\right\}\subset L^2[0,\pi],$$

其范数为 $\|y\|=\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}y_n^2}$。

定义线性算子 $B:U\to E$，具体形式为

$$(By)(t)=2y_2e_1(x)+\sum_{n=2}^{\infty}y_ne_n(x),\quad y=\sum_{n=2}^{\infty}y_ne_n(x)\in U。$$

由计算可得 $\|B\|$ 有界，则 B 是线性有界算子，条件(H3)成立。

设

$$u(t)(x)=u(t,x),\quad f(t,u(t))(x)=f(t,u(t,x)),\quad t\in J,\quad x\in[0,\pi],$$

故分数阶微分系统(12)可化为抽象分数阶发展系统(1)。

定理3 初边值问题(12)在 J 上是近似可控的，如果下列条件成立：

(i) 函数 $f:J\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续，且存在Lebesgue可测函数 $h_r(t)$，使得对任意 $t\in J,x\in[0,\pi],u\in L^2[0,\pi]$，有 $|f(t,u(t,x))|\leqslant h_r(t)$；

(ii) $\mu R(\mu,\Gamma_0^b)\to 0,\mu\to 0^+$。

证明 设 $u(t)(x)=u(t,x)$，$y(t)(x)=y(t,x)$，$f(t,u(t))(x)=f(t,u(t,x))$，则初边值问题(12)可转化为抽象分数阶发展方程初值问题(1)。由定理3的条件可知，条件(H1)—(H4)成立，所以由定理2可知，初边值问题(12)在 J 上是近似可控的。

参考文献：

[1] FECKAN M, WANG Jinrong, ZHOU Yong. Controllability of fractional functional evolution equations of Sobolev type via characteristic solution operators[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2013, 156(1):79-95.

[2] CHANG Y K, PEI Y T, PONCE R. Existence and optimal controls for fractional stochastic evolution equations of Sobolev type via fractional resolvent operators[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2019, 182(2):558-572.

[3] CHANG Y K, PEREIRA A, PONCE R. Approximate controllability for fractional differential equations of Sobolev type via properties on resolvent operators[J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2017, 20(4):963-987.

[4] ZHOU Yong, HE Jiawei. New results on controllability of fractional evolution systems with order $\alpha\in(1,2)$[J]. Evolution Equations and Control Theory, 2021, 10(3):491-509.

[5] DU Maolin, WANG Zaihua. Initialized fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional-order derivative[J]. The European Physical Journal Special Topics, 2011, 193(1):49-60.

[6] HEYMANS N, PODLUBNY I. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives[J]. Rheologica Acta, 2006, 45(5):765-771.

[7] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006:69-70.

[8] LIU Zhenhai, LI Xiuwen. Approximate controllability of fractional evolution systems with Riemann-Liouville fractional derivatines[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2015, 53(4):1920-1933.

[9] TRAVIS C C, WEBB G F. Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations[J]. Acta Mathematica Hungarica, 1978, 32(1):75-96.

[10] HE Jiawei, PENG Li. Approximate controllability for a class of fractional stochastic wave equations[J]. Computers Mathematics with Applications, 2019, 78(5):1463-1476.

[11] FATTORINI H O. Ordinary differential equations in linear topological spaces[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 1968, 5:72-105.

[12] GOU Haide, LI Yongxiang. Existence and approximate controllability of Hilfer fractional evolution equations in Banach spaces [J]. Journal of Applied Analysis Computation, 2021, 11(6):2895-2920.

[13] TRAVIS C C, WEBB G F. Compactness, regularity, and uniform continuity properties of strongly continuous consine families[J]. Houston Journal of Mathematics, 1977, 3(4):555-567.

(编辑:甄鹏)

(上接第 104 页)

由引理 2.2 可知,$\begin{pmatrix} X_1 \\ \mathscr{F}(X_1) \end{pmatrix} \in \mathrm{Add}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}(C)$,故 $\mathrm{Hom}_{(\mathscr{F},\mathfrak{B})}\left(L^{\cdot}, \begin{pmatrix} X_1 \\ \mathscr{F}(X_1) \end{pmatrix}\right)$是正合的。又因为 $\mathscr{F}$是相容的,并且 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(P^{\cdot}, \mathrm{Add}_{\mathfrak{B}}(C_2))$是正合的,所以 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(P^{\cdot}, \mathscr{F}(X_1))$是正合的,因此,$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(Q^{\cdot}, X_1)$是正合的,说明$M_1 \in G_{C_1}\mathrm{Proj}(\mathfrak{A})$。

参考文献:

[1] FOSSUM R M, GRIFFITH P A, REITEN I. Trivial extensions of Abelian categories[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

[2] HU Jiangsheng, ZHU Haiyan. Special precovering classes in comma categories[J]. Science China Mathematics, 2022, 65(5): 933-950.

[3] PENG Yeyang, ZHU Rongmin, HUANG Zhaoyong. Gorenstein projective objects in comma categories[J]. Periodica Mathematica Hungarica, 2022, 84:186-202.

[4] BENNIS D, GARCÍAROZAS J R, OYONARTE L. Relative Gorenstein dimensions [J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2016, 13:65-91.

[5] BENNIS D, EL MAAOUY R, GARCÍA ROZAS J R, et al. Relative Gorenstein dimensions over triangular matrix rings[J]. Mathematics, 2021, 9:2676.

(编辑:李艺)