

图的限制性燃烧连通度

薛睿滢, 魏宗田, 翟美娟

(西安建筑科技大学理学院, 陕西 西安 710055)

摘要: 连通度是度量网络抗毁性的一个重要指标, 从图燃烧的角度将该参数推广, 提出图的限制性燃烧连通度概念。在给出若干基本图类的限制性燃烧连通度的基础上, 用数学规划方法研究路的笛卡尔积图、蜘蛛图的限制性燃烧连通度计算问题。通过分析限制性燃烧连通度与图结构的关系, 阐明该参数在刻画网络抗毁性方面的优势。

关键词: 图; 网络抗毁性; 限制性燃烧连通度; 笛卡尔积图; 蜘蛛图; 燃烧数

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A

引用格式: 薛睿滢, 魏宗田, 翟美娟. 图的限制性燃烧连通度[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(2): 91-99, 109.

Restricted burning connectivity of graphs

XUE Ruiying, WEI Zongtian, ZHAI Meijuan

(School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, Shaanxi, China)

Abstract: Connectivity is an important indicator to measure the invulnerability of a network. This parameter is generalized from the perspective of graph burning, and the concept of restricted burning connectivity of graphs is proposed. On the basis of giving some basic graphs' restricted burning connectivity, the restricted burning connectivity calculation problems of the Cartesian product graph of paths and the spider graphs are studied by the mathematical programming method. By analyzing the relationship between restricted burning connectivity and graph structures, the advantages of this parameter in characterizing the invulnerability of networks are clarified.

Key words: graph; network invulnerability; restricted burning connectivity; Cartesian product graph; spider graph; burning number

0 引言

社会网络是以节点代表个人或组织、节点之间的边代表社会关系的一类图。社会影响的传播是社会网络分析中的一个重要课题, 主要集中在情感、信息或病毒的传播方面, 如高危病毒(新型冠状病毒、SARS 冠状病毒等)、社会信息(谣言、行为、情感等)、互联网表情包等在社会网络上的传播。为了模拟这一过程, Bonato 等^[1]使用了一种简化的、确定性的新方法——图的燃烧。给定一个图 G , 在图 G 上的燃烧是一个离散时间的图的演化过程, 与图 G 上顶点的传播过程有关, 它可以解释为影响在社会网络中传播的模型, 并用燃烧数衡量图的顶点集上火蔓延的速度^[2]。

然而, 一旦病毒携带者将病毒传给接触者, 这种病毒会随着时间推移而传播。若目标是最小化病毒传播到剩余网络所需的时间, 那么该如何选取病毒携带者以控制病毒传播? 或如何将未感染数量控制在某个范围或是更小? 如果用图燃烧方法模拟此类问题, 则是选择一个最佳火源, 经过一段时间燃烧, 用最少的时间将图燃烧到某个范围或是更小的剩余子图。显然, 已有的抗毁性参数不能很好地解决此类问题。

本文将燃烧数定义的思想与连通度相结合,提出一个新的网络抗毁性参数——限制性燃烧连通度。给出图的限制性燃烧连通度的定义,研究若干类图的参数计算和该参数与图结构的关系。

本文仅考虑简单无向图,未定义的概念和术语参见文献[3]。

设 $G=(V,E)$ 是一个图,在步骤 $i=0$ 时, $V(G)$ 中所有顶点都未被燃烧;在第 $i(i \geq 1)$ 步中,选择 $V(G)$ 中一个未被燃烧的顶点 x_i 燃烧(如果这样的顶点存在),并且该顶点称为图 G 的第 i 个火源。一旦某个顶点在第 i 步被燃烧,则在 $i+1$ 步,它的所有未燃烧的邻点都会自动被燃烧。当所有的顶点全部被燃烧时,燃烧过程结束。如果一个顶点被燃烧,那么它将一直保持燃烧状态,直到 G 的燃烧过程结束。假设图 G 的顶点最多在 k 步内被烧完,则称 G 是 k -可燃的。

定义 1^[1] 图 G 的燃烧过程结束所需要的最小步数称为 G 的燃烧数,记作 $b(G)$,选作火源的顶点序列 (x_1, x_2, \dots, x_k) 称为 G 的燃烧序列。最短燃烧序列的长度等于图 G 的燃烧数。

定义 2^[4] 设 $G=(V,E)$ 是连通图,若存在 $S \subset V$,使 G 的子图 $G-S$ 的连通分支数大于 G 的连通分支数,即 $\omega(G-S) > \omega(G)$,而删除 S 的任何真子集 S' 时, $\omega(G-S') = \omega(G)$,则称 S 为 G 的点割集。若点割集中只有一个顶点,则称此顶点为割点。

定义 3^[5] 设 G 是一个非完全连通图,其连通度为 $\kappa(G) = \min \{ |S| : S \subset V(G) \}$,其中 S 为 G 的点割集。若 $\kappa(G) \geq k$,则称 G 为 k -连通的。对于完全图 K_n ,有 $\kappa(K_n) = n-1$;对于非连通图 G ,有 $\kappa(G) = 0$ 。

设 $G=(V,E)$ 是一个图, $v \in V(G)$,称 $N(v) = \{u : u \in V(G), u \neq v, \text{且 } v \text{ 与 } u \text{ 相邻}\}$ 为 v 的开邻域, $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ 为 v 的闭邻域。给定一个正整数 m ,定义 v 的 m 闭邻域为 $\{u \in V(G) : d(u, v) \leq m\}$,记作 $N_m[v]$,其中 $d(u, v)$ 表示 u 与 v 之间的距离。若将 $N[v]$ 中的顶点都从 G 中删除,则称 v 颠覆了 G 。类似地,设 $S \subset V(G)$,定义 S 的开邻域 $N(S) = \{v \in V \setminus S : v \text{ 与 } u \text{ 相邻}, u \in S\}$, $N[S] = N(S) \cup S$ 称为 S 的闭邻域。若将 $N[S]$ 中的每一顶点都从 G 中删除,则称 S 为 G 的一个颠覆策略,记 $G-N[S]$ 为 G/S 。若 G/S 不连通,或是团,或是 \emptyset ,其中 \emptyset 表示空集,则称 S 为 G 的一个邻域点割集。

定义 4^[5] 设 G 是一个非完全连通图,其邻域连通度为 G 的最小邻域点割所含的顶点数,记为 $VNC(G)$,若 $VNC(G) \geq k$,则称 G 是 k -邻域连通的。

下面给出新的燃烧规则:

- (1) $i=0$,图 G 的所有顶点都未燃烧;
- (2) $i=1$,选择一个顶点燃烧,称之为火源,记为 x ;
- (3) $i>1$,不再增加火源,若在第 i 步中被燃烧的顶点集为 B_i ,未被燃烧的顶点集为 A_i ,则在第 $i+1$ 步, $N(B_i) \cap A_i$ 中的每个顶点都将被燃烧。

定义 5 设 $G=(V,E)$ 是一个非完全连通图,假设按上述燃烧规则经过 k 步燃烧后的剩余子图为 G_k ,已燃烧顶点集序列为 (B_1, B_2, \dots, B_k) 。对于给定的非负整数 c ,称使得 G_k 不连通且 $m(G_k) \leq c$ 或 $G_k = \emptyset$ 的最小 k 为 G 的限制性燃烧连通度,记为 $\kappa_b^c(G)$,其中 $m(G_k)$ 表示 G_k 的最大分支的阶,称与 $\kappa_b^c(G)$ 对应的第一个被燃烧的顶点为最佳火源。

设 $\kappa_b^c(G) = k$,最佳火源为 x , (B_1, B_2, \dots, B_k) 是与之对应的燃烧顶点集序列,则 $B_1 = \{x\}$, $G_k = V(G) - \bigcup_{i=1}^k B_i$ 。若 $c=0$,则有 $\bigcup_{i=1}^k B_i = V(G)$;若 $c>0$,则 G_k 不连通,且 $\bigcup_{i=1}^k B_i \subset V(G)$ 。

特别地,对于完全图 K_n ,任一顶点均为最佳火源,有 $\kappa_b^c(K_n) = 2$ 。

定义 6^[1] 设 $G=(V,E)$ 是一个非完全连通图, $u, v \in V(G)$,定义 v 的离心率为 $e(v) = \max \{d(u, v) : u \in V(G)\}$, G 的直径是 G 的顶点集上最大的离心率, G 的半径是 G 的顶点集上最小的离心率,即 $\text{diam}(G) = \max_{u \in V(G)} \max_{v \in V(G)} d(u, v)$, $r(G) = \min_{u \in V(G)} \max_{v \in V(G)} d(u, v)$, G 的中心是 G 中离心率最小的顶点集合。如图 1, $e(v_1) = e(v_7) = e(v_3) = e(v_5) = e(v_4) = 3$, $e(v_2) = e(v_6) = 2$,所以图 G 的中心为 v_2 或 v_6 。

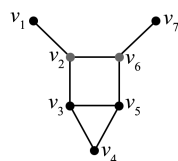


图 1 有 2 个中心的图 G
Fig.1 A graph G with two centers

1 几类基本图的限制性燃烧连通度

在本节中,主要讨论路、圈、完全二部分图等几类基本图的限制性燃烧连通度的计算问题。

定理 1 设 $P_n (n \geq 3)$ 是 n 阶路, $c \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, 则

$$\kappa_b^c(P_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n+1}{2} \rceil - c, & 0 \leq c \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor; \\ 1, & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < c \leq n-2. \end{cases}$$

证明 记 $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, v_i 与 v_{i+1} 相邻, $i = 1, 2, \dots, n-1$ 。下面分 2 种情形讨论。

情形 1 $0 \leq c \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 。当 n 为奇数时,显然,以 P_n 的中心 $v_{\frac{n+1}{2}}$ 为火源。经过 $k (k \geq 1)$ 步燃烧后, $(P_n)_k$ 是阶为 $\frac{n-(2k-1)}{2}$ 的 2 条路。当 n 为偶数时,以 P_n 的中心 $v_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ 或 $v_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$ 为火源,经过 $k (k \geq 1)$ 步燃烧后, $(P_n)_k$ 是阶分别为 $\lfloor \frac{n-(2k-1)}{2} \rfloor$ 和 $\lceil \frac{n-(2k-1)}{2} \rceil$ 的 2 条路。令 $m((P_n)_k) \leq c$, 即有 $k \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil - c$, 所以 $\kappa_b^c(P_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil - c$ 。

情形 2 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < c \leq n-2$ 。显然以中心为火源,经过 1 步燃烧后,有 $m((P_n)_1) \leq c$, 所以 $\kappa_b^c(P_n) = 1$ 。证毕。

定理 2 设 $C_n (n \geq 3)$ 是 n 阶圈, $c \in \{0, 1, \dots, n\}$, 则 $\kappa_b^c(C_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 。

证明 记 $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $v_n v_1, v_i v_{i+1} \in E(C_n)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ 。显然, C_n 是 2-正则图,以 C_n 中任一顶点为火源,经过 $k (1 \leq k < \lceil \frac{n+1}{2} \rceil)$ 步燃烧后, $(C_n)_k$ 都是连通的。由限制性燃烧连通度的定义知,对任意的 $c \in \{0, 1, \dots, n\}$, 当 $k = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 时, $(C_n)_k = \emptyset$, 所以 $\kappa_b^c(C_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 。证毕。

定理 3 设 $K_{m,n} (m \geq n \geq 3)$ 是完全二部分图, $c \in \{0, 1, \dots, m\}$, 则

$$\kappa_b^c(K_{m,n}) = \begin{cases} 3, & c = 0; \\ 2, & c \geq 1. \end{cases}$$

证明 显然,以 $K_{m,n}$ 中任一顶点为火源,经过 2 步燃烧后,剩余子图为 $m-1$ (或 $n-1$) 个孤立顶点。由限制性燃烧连通度的定义知,当 $c \geq 1$ 时, $\kappa_b^c(K_{m,n}) = 2$; 当 $c = 0$ 时, $\kappa_b^c(K_{m,n}) = 3$ 。

定义 7^[6] 在轮图 $W_{1,n} (n \geq 3)$ 的每个 3 度顶点(除中心外)上,各添加一条悬挂边所得的图称为舵图,记为 $H_{1,n}$ 。如图 2 所示的是舵图 $H_{1,6}$ 。

定理 4 设 $H_{1,n} (n \geq 3)$ 是 $2n+1$ 阶舵图, $c \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$, 则

$$\kappa_b^c(H_{1,n}) = \begin{cases} 3, & c = 0; \\ 2, & 1 \leq c < 2n-1; \\ 1, & c = 2n-1. \end{cases}$$

证明 设 $V(H_{1,n}) = \{u, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$, u 是 $H_{1,n}$ 的中心, (u_i, v_i) 为悬挂边, $i = 1, 2, \dots, n$ 。显然,当 $c = 2n-1$ 时,以任一 u_i 为火源,经过 1 步燃烧后,就有 $m((H_{1,n})_k) \leq c$, 所以 $\kappa_b^c(H_{1,n}) = 1$ 。当 $1 \leq c < 2n-1$ 时,显然顶点 u 为最佳火源,经过 2 步燃烧后,就有 $m((H_{1,n})_2) \leq c$, 所以 $\kappa_b^c(H_{1,n}) = 2$; 当 $c = 0$ 时,以 u 为火源,经过 3 步燃烧后,有 $(H_{1,n})_3 = \emptyset$, 所以 $\kappa_b^c(H_{1,n}) = 3$ 。证毕。

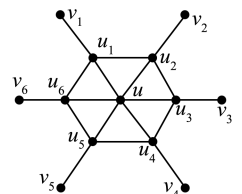


图 2 舵图 $H_{1,6}$
Fig.2 The helm graph $H_{1,6}$

2 2 类特殊图的限制性燃烧连通度

在本节中,讨论路的笛卡尔积图、蜘蛛图的限制性燃烧连通度的计算问题。通过建立数学规划模型并求

解,给出参数计算公式。

定义 8^[5] 设 G 和 H 是 2 个不交的图,则 G 和 H 的笛卡尔积 $G \square H$ 定义为: $V(G \square H) = V(G) \square V(H)$, 并且对 $v_1, u_1 \in V(G)$, $v_2, u_2 \in V(H)$, $((v_1, v_2), (u_1, u_2)) \in E(G \square H) \Leftrightarrow$ 或者 $v_1 = u_1$ 且 $(v_2, u_2) \in E(H)$, 或者 $v_2 = u_2$ 且 $(v_1, u_1) \in E(G)$ 。

定理 5 设 $P_m \square P_n$ 是路 $P_m, P_n (n \geq m \geq 2)$ 的笛卡尔积, $c \in \{0, 1, \dots, mn-4\}$, 则:

(1) $m=n=2$ 时, $\kappa_b^0(P_m \square P_n) = 3$ 。

(2) $n \geq 3$, $mn - \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor^2 + \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1 \leq c \leq mn - 6$ 时, $\kappa_b^c(P_m \square P_n) = \min \left\{ \left\lceil \frac{1}{10} (5 + \sqrt{40mn - 40c - 15}) \right\rceil, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right\}$ 。

(3) $n \geq 3$, $0 \leq c \leq mn - \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor^2 + \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2$, 且 $m=n$ 时,

$$\kappa_b^c(P_m \square P_n) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{m+1}{2}, \left\lceil \frac{1}{2} (2m+1 - \sqrt{1+8c}) \right\rceil \right\}, & 0 \leq c \leq m^2 - \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor^2 + \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2, \text{ 且 } m \text{ 为奇数}; \\ \max \left\{ \frac{m}{2} + 1, \left\lceil \frac{1}{2} (2m+3 - \sqrt{1+8c}) \right\rceil \right\}, & 3 \leq c \leq \frac{3}{8} m^2 + \frac{5}{4} m - 2, \text{ 且 } m \text{ 为偶数}; \\ m+1, & 0 \leq c \leq 2, \text{ 且 } m \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

(4) $n \geq 3$, $0 \leq c \leq mn - \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor^2 + \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2$, 且 $m < n$ 时, 若 n 为奇数, 则:

$$\kappa_b^c(P_m \square P_n) = \begin{cases} \max \left\{ \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{1}{4} \left(m+2n+2 - \frac{1+4c}{m} \right) \right\rceil \right\}, & \left\lfloor \frac{1}{4} (m^2+4m) \right\rfloor \leq c \leq mn - \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor^2 + \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2; \\ \max \left\{ \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil + \frac{n - \sqrt{1+8c}}{2}, \frac{n+1}{2} \right\}, & 0 \leq c < \left\lfloor \frac{1}{4} (m^2+4m) \right\rfloor. \end{cases}$$

若 n 为偶数, 则:

$$\kappa_b^c(P_m \square P_n) = \begin{cases} \max \left\{ \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{1}{4} \left(m+2n+4 - \frac{1+4c}{m} \right) \right\rceil \right\}, & \left\lfloor \frac{1}{4} (m^2+4m) \right\rfloor \leq c \leq mn - \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor^2 + \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2; \\ \max \left\{ \left\lceil \frac{1}{2} (m+n+2 - \sqrt{1+8c}) \right\rceil, \frac{n}{2} + 1 \right\}, & 0 \leq c < \left\lfloor \frac{1}{4} (m^2+4m) \right\rfloor, \text{ 且 } m \text{ 为奇数}; \\ \max \left\{ \left\lceil \frac{1}{2} (m+n+3 - \sqrt{1+8c}) \right\rceil, \frac{n}{2} + 1 \right\}, & 3 \leq c < \left\lfloor \frac{1}{4} (m^2+4m) \right\rfloor, \text{ 且 } m \text{ 为偶数}; \\ \frac{m+n}{2} + 1, & 0 \leq c \leq 2, \text{ 且 } m \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

证明 记 $G = P_m \square P_n$, $V(G) = \{v_{ij} : i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$, 如图 3 所示。当 $m=n=2$ 时, 结论显然成立。当 $n \geq m \geq 2$ 时, 根据 c 的取值范围分情形讨论。

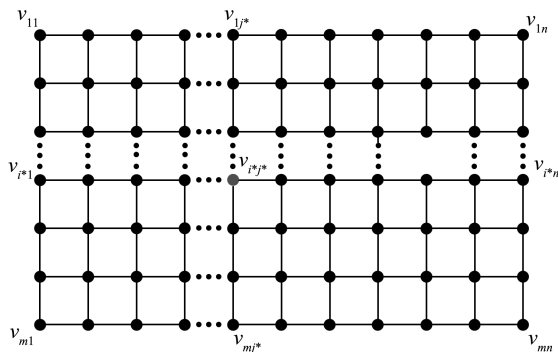


图 3 笛卡尔积图 $P_m \square P_n$
Fig.3 The Cartesian product graph $P_m \square P_n$

情形 1 $mn - \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor^2 + \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1 \leq c \leq mn - 6$ 。若以 v_{i^*, j^*} 为火源, 则当燃烧到第 k 步时, 与 v_{i^*, j^*} 距离小

于或等于 $k-1$ 的顶点全部被燃烧。于是有

$$\begin{cases} d(v_{i^*j^*}, v_{lj^*}) = i^* - 1, & \text{当 } k=i^* \text{ 时, } v_{lj^*} \text{ 被燃烧;} \\ d(v_{i^*j^*}, v_{mj^*}) = m-i^*, & \text{当 } k=m-i^*+1 \text{ 时, } v_{mj^*} \text{ 被燃烧;} \\ d(v_{i^*j^*}, v_{i^*1}) = j^* - 1, & \text{当 } k=j^* \text{ 时, } v_{i^*1} \text{ 被燃烧;} \\ d(v_{i^*j^*}, v_{i^*n}) = n-j^*, & \text{当 } k=n-j^*+1 \text{ 时, } v_{i^*n} \text{ 被燃烧。} \end{cases}$$

由 $P_m \square P_n$ 的对称性,不妨设火源在左上角 $1/4$ 区域内,即 $i^* \leq \frac{m+1}{2}$ 且 $j^* \leq \frac{n+1}{2}$,如图 3 所示。显然,要使 G_k 不连通,须有 $k \geq \max\{i^*, j^*\}$ 。再由限制性燃烧连通度的定义,若 $v_{i^*j^*}$ 是最佳火源,则应满足 $i^* = j^*$ 。于是,当以 $v_{i^*j^*}$ 为火源($i^* = j^* > 1$),燃烧到第 $k(k=i^*)$ 步,才有 $\omega(G_k) = 2$,这时 $|N_{k-1}[v_{i^*j^*}]| = 2k^2 - 2k + 1$,即前 k 步中总共燃烧的顶点数。因为 $d(v_{i^*j^*}, v_{11}) = d(v_{kk}, v_{11}) = 2k - 2$,所以,当 $k = 2i^* - 1$ 时, $\omega(G_k) = 1$;当 $i^* \leq k \leq 2i^* - 2$ 时, $\omega(G_k) = 2$,其中较小分支的阶为 $\frac{k(k-1)}{2}$,较大分支的阶为

$$m(G_k) = mn - \frac{5}{2}k^2 + \frac{5}{2}k - 1. \tag{1}$$

令 $mn - \frac{5}{2}k^2 + \frac{5}{2}k - 1 \leq c$,且 $k \geq 1$,得 $k \geq \frac{1}{10}(5 + \sqrt{40mn - 40c - 15})$ 。因为当 $k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 时, G_k 的最大分支是式(1),所以,当 $mn - \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor^2 + \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1 \leq c \leq mn - 6$ 时, $\kappa_b^c(G) = \min\left\{ \left\lceil \frac{1}{10}(5 + \sqrt{40mn - 40c - 15}) \right\rceil, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right\}$ 。

情形 2 $0 \leq c \leq mn - \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor^2 + \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2$ 。由 G 的结构对称性,选 G 的中心为火源,在情形 1 的基础上继续燃烧,则计算 $\kappa_b^c(G)$ 可描述为如下数学规划问题:

$$\begin{aligned} & \min k \\ \text{s.t. } & \begin{cases} m(G_k) \leq c, \\ k > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, k \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

情形 2.1 $m=n$ 。选中心 $v_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ 为火源,下面关于 m 的奇偶性分情形讨论。

情形 2.1.1 m 为偶数,则当 $k = \frac{m}{2} + d (1 \leq d \leq \frac{m}{2} - 1)$ 时, $\omega(G_k) \geq 3$, $m(G_k) = \frac{1}{8}(m+2-2d)(m+4-2d)$,

将 $d = k - \frac{m}{2}$ 代入上式得, $m(G_k) = \frac{1}{2}(m+1-k)(m+2-k)$ 。令 $m(G_k) \leq c$,即

$$k^2 - (2m+3)k + (m+1)(m+2) - 2c \leq 0. \tag{2}$$

注意到 $m=n$ 且 m 为偶数,则当 $3 \leq c \leq \frac{3}{8}m^2 + \frac{5}{4}m - 2$ 时,有 $1+8c < (2m+3)^2$,所以,当 $k \geq \frac{1}{2}(2m+3 - \sqrt{1+8c})$

时,不等式(2)成立。此时,有 $\kappa_b^c(G) = \max\left\{ \frac{m}{2} + 1, \left\lceil \frac{1}{2}(2m+3 - \sqrt{1+8c}) \right\rceil \right\}$ 。

当 $d = \frac{m}{2} - 1$ 时, $\omega(G_k) = 3$, $m(G_k) = 3$,所以,当 $0 \leq c \leq 2$ 时,必须有 $k = m+1$,即 $G_k = \emptyset$, $\kappa_b^c(G) = m+1$ 。

情形 2.1.2 m 为奇数,则 G 的中心是 $v_{\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}}$ 。当 $k = \frac{m-1}{2} + d (1 \leq d \leq \frac{m-1}{2})$ 时, $\omega(G_k) = 4$,与情形 2.1.1

类似,由 $m(G_k) = \frac{1}{8}(m+3-2d)(m+1-2d) \leq c$,解得 $k \geq \frac{1}{2}(2m+1 - \sqrt{1+8c})$,从而,当 $0 \leq c \leq m^2 - \frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor^2 +$

$\frac{5}{2} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2$ 时,有 $\kappa_b^c(G) = \max\left\{ \frac{m+1}{2}, \left\lceil \frac{1}{2}(2m+1 - \sqrt{1+8c}) \right\rceil \right\}$ 。

情形 2.2 $m < n$ 。显然,最佳火源应为中心(之一),下面关于 m 与 n 的奇偶性分情形讨论。

情形 2.2.1 m 与 n 均为奇数,选中心 $v_{\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}}$ 为火源,则有:

(1) 经过 $k = \frac{m-1}{2} + d \left(1 \leq d \leq \frac{n-m}{2} \right)$ 步燃烧后, $\omega(G_k) = 2$, $m(G_k) = \frac{1}{4}(2mn - m^2 - 1) - (d-1)m$, 将 $d = k - \frac{m-1}{2}$ 代入上式, 并令 $m(G_k) \leq c$, 解得 $k \geq \frac{1}{4} \left(m + 2n + 2 - \frac{1+4c}{m} \right)$ 。当 $d = \frac{n-m}{2}$, 即 $k = \frac{n-1}{2}$ 时, $m(G_k) = \frac{1}{4}(m^2 + 4m - 1)$, 所以, 当 $\frac{1}{4}(m^2 + 4m - 1) \leq c \leq mn - \frac{5}{2} \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor^2 + \frac{5}{2} \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 2$ 时, $\kappa_b^c(G) = \max \left\{ \frac{m+1}{2}, \left\lceil \frac{1}{4} \left(m + 2n + 2 - \frac{1+4c}{m} \right) \right\rceil \right\}$ 。

(2) 经过 $k = \frac{n-1}{2} + d \left(1 \leq d \leq \frac{m-1}{2} \right)$ 步燃烧后, $\omega(G_k) = 4$, $m(G_k) = \frac{1}{8}(m+3-2d)(m+1-2d)$, 将 $d = k - \frac{n-1}{2}$ 代入上式, 并令 $m(G_k) \leq c$, 解得 $k \geq \frac{1}{2}(m+n+1 - \sqrt{1+8c})$, 所以, 当 $0 \leq c < \frac{1}{4}(m^2 + 4m - 1)$ 时, $\kappa_b^c(G) = \max \left\{ \left\lceil \frac{1}{2}(m+n+1 - \sqrt{1+8c}) \right\rceil, \frac{n+1}{2} \right\}$ 。

情形 2.2.2 m 为奇数, n 为偶数, 选中心 $v_{\frac{m+1}{2}, \frac{n}{2}}$ 为火源, 则:

(1) 经过 $k = \frac{m-1}{2} + d \left(1 \leq d \leq \frac{n-m-1}{2} \right)$ 步燃烧后, $\omega(G_k) = 2$, 与情形 2.2.1(1) 类似, 由 $m(G_k) = \frac{1}{4}(2mn - (m+1)^2) - (d-2)m \leq c$, 解得 $k \geq \frac{1}{4} \left(m + 2n + 4 - \frac{1+4c}{m} \right)$, 所以, 当 $\frac{1}{4}(m^2 + 4m - 1) \leq c \leq mn - \frac{5}{2} \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor^2 + \frac{5}{2} \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 2$ 时, $\kappa_b^c(G) = \max \left\{ \frac{m+1}{2}, \left\lceil \frac{1}{4} \left(m + 2n + 4 - \frac{1+4c}{m} \right) \right\rceil \right\}$ 。

(2) 经过 $k = \frac{n}{2} + d \left(1 \leq d \leq \frac{m-1}{2} \right)$ 步燃烧后, $\omega(G_k) \geq 2$, 与情形 2.2.1(2) 类似, 由 $m(G_k) = \frac{1}{8}(m+3-2d)(m+1-2d) \leq c$, 解得 $k \geq \frac{1}{2}(m+n+2 - \sqrt{1+8c})$, 所以, 当 $0 \leq c < \frac{1}{4}(m^2 + 4m - 1)$ 时, $\kappa_b^c(G) = \max \left\{ \left\lceil \frac{1}{2}(m+n+2 - \sqrt{1+8c}) \right\rceil, \frac{n}{2} + 1 \right\}$ 。

情形 2.2.3 m 为偶数, n 为奇数, 选中心 $v_{\frac{m}{2}, \frac{n+1}{2}}$ 为火源, 则:

(1) 经过 $k = \frac{m}{2} + d \left(1 \leq d \leq \frac{n-m-1}{2} \right)$ 步燃烧后, $\omega(G_k) = 2$, 与情形 2.2.1(1) 类似, 由 $m(G_k) = \frac{1}{4}(2mn - m^2 - 2m) - (d-1)m \leq c$, 解得 $k \geq \frac{1}{4} \left(m + 2n + 2 - \frac{4c}{m} \right)$, 所以, 当 $\frac{1}{4}(m^2 + 4m) \leq c \leq mn - \frac{5}{2} \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor^2 + \frac{5}{2} \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 2$ 时, $\kappa_b^c(G) = \max \left\{ \frac{m+2}{2}, \left\lceil \frac{1}{4} \left(m + 2n + 2 - \frac{4c}{m} \right) \right\rceil \right\}$ 。

(2) 经过 $k = \frac{n-1}{2} + d \left(1 \leq d \leq \frac{m}{2} \right)$ 步燃烧后, $\omega(G_k) \geq 2$, 与情形 2.2.1(2) 类似, 由 $m(G_k) = \frac{1}{8}(m+2-2d)(m+4-2d) \leq c$, 解得 $k \geq \frac{1}{2}(m+n+2 - \sqrt{1+8c})$, 所以, 当 $0 \leq c < \frac{1}{4}(m^2 + 4m)$ 时, $\kappa_b^c(G) = \max \left\{ \left\lceil \frac{1}{2}(m+n+2 - \sqrt{1+8c}) \right\rceil, \frac{n+1}{2} \right\}$ 。

情形 2.2.4 m 与 n 均为偶数, 选中心 $v_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}}$ 为火源, 则:

(1) 经过 $k = \frac{m}{2} + d \left(1 \leq d \leq \frac{n-m}{2} \right)$ 步燃烧后, $\omega(G_k) \geq 2$, 与情形 2.2.1(1) 类似, 由 $m(G_k) = \frac{1}{4}(2mn - m^2) - (d-1)m \leq c$, 解得 $k \geq \frac{1}{4} \left(m + 2n + 4 - \frac{4c}{m} \right)$, 所以, 当 $\frac{1}{4}(m^2 + 4m) \leq c \leq mn - \frac{5}{2} \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor^2 + \frac{5}{2} \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 2$ 时, $\kappa_b^c(G) = \max \left\{ \frac{m+2}{2}, \left\lceil \frac{1}{4} \left(m + 2n + 4 - \frac{4c}{m} \right) \right\rceil \right\}$ 。

(2) 经过 $k = \frac{n}{2} + d \left(1 \leq d \leq \frac{m}{2} - 1 \right)$ 步燃烧后, $\omega(G_k) \geq 3$, 与情形 2.2.1(2) 类似, 由 $m(G_k) = \frac{1}{8}(m+2-$

$2d)(m+4-2d) \leq c$, 解得 $k \geq \frac{1}{2}(m+n+3-\sqrt{1+8c})$, 所以, 当 $3 \leq c < \frac{1}{4}(m^2+4m)$ 时, $\kappa_b^c(G) = \max\left\{\left\lceil \frac{1}{2}(m+n+3-\sqrt{1+8c}) \right\rceil, \frac{n}{2}+1\right\}$ 。当 $0 \leq c \leq 2$ 时, $\kappa_b^c(G) = \frac{m+n}{2}+1$ 。

综上所述, 结论成立。

以上讨论了路、圈、完全二部分图、舵图、路的笛卡尔积图的限制性燃烧连通度。由于树中以某一顶点为火源, 剩余子图的最大分支的阶很难计算, 因此接下来用数学规划方法研究 2 类特殊的树——蜘蛛图和星图的限制性燃烧连通度的计算问题。

定义 9^[7] 只有一个度不小于 3 的节点的树称为蜘蛛图, 其最大度点称为蜘蛛的头。在蜘蛛图中, 蜘蛛的手臂指的是从蜘蛛头到每个叶子点的一条路, $s(s \geq 3)$ 条手臂的蜘蛛图可看作 s 条路的并, 记作 $P^{(1)} \cup P^{(2)} \cup \dots \cup P^{(s)}$, 其中 $P^{(j)}$ 是边不交的路, 并且它们有一个公共顶点 u 。下文中, 用 n_j 表示 $P^{(j)}$ 中(除 u 外)的顶点数, 蜘蛛图记作 $SP(n_1, n_2, \dots, n_s)$, 并假设 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s \geq 1$ 。如图 4 所示的是蜘蛛图 $SP(7, 4, 4, 3)$ 。

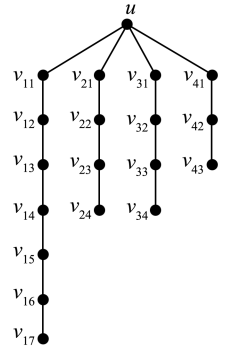


图 4 蜘蛛图 $SP(7, 4, 4, 3)$
Fig.4 The spider graph $SP(7, 4, 4, 3)$

定理 6 设 $SP(n_1, n_2, \dots, n_s) (s \geq 3)$ 是蜘蛛图, $c \in \{0, 1, \dots, \sum_{j=1}^s n_j - 2\}$, 则

$$\kappa_b^c(SP(n_1, n_2, \dots, n_s)) = \begin{cases} \min_{i \in N_1} \max\{n_1 - i + 1 - c, n_2 + i + 1 - c, i + 1\}, & 0 \leq c < n_1, \text{ 且 } n_1 > n_2; \\ n_1 + 1 - c, & 0 \leq c < n_1, \text{ 且 } n_1 = n_2; \\ \min_{i \in N_1} \max\{n_1 - i + 1 - c, \sum_{j=2}^s n_j + i + 1 - c\}, & \sum_{j=2}^s n_j + 1 \leq c < n_1, \text{ 且 } n_1 > \sum_{j=2}^s n_j; \\ 1, & n_1 \leq c \leq \sum_{j=1}^s n_j - 2. \end{cases}$$

其中, $N_1 = \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}$ 。

证明 记 $G = SP(n_1, n_2, \dots, n_s)$, G 的第 j 条手臂的顶点集为 $\{u, v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{jn_j}\}$, $v_{ji}v_{j(i+1)} \in E(G)$, $j = 1, 2, \dots, s$, $i = 1, 2, \dots, n_j - 1$, 其中 u 为 G 的头。下面根据 c 的取值与火源选取分情形讨论。

情形 1 $c \geq n_1$ 。显然, 以 u 为(最佳)火源。由限制性燃烧连通度的定义知, $\kappa_b^c(G) = 1$ 。

情形 2 $0 \leq c < n_1 \leq \sum_{j=2}^s n_j$ 。

情形 2.1 当 $n_1 > n_2$ 时, u 必须被燃烧, 故应在 P_{n_1} 上选顶点 $v_{1i}, i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$ 为火源, 且 $k \geq i + 1$ 。经过 k 步燃烧后, G_k 由路 $P_{n_1-i+1-k}$ 和另 $s-1$ 条路 $P_{n_j+i+1-k}, j = 2, 3, \dots, s$ 组成, 令 $m(G_k) \leq c$, 则 $\kappa_b^c(G)$ 的计算可描述为求解数学规划问题, 为此, 建立如下数学模型。

$$(L_1) \quad \min_k \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} n_1 \leq \sum_{j=2}^s n_j, \\ 0 \leq c < n_1, \\ i + 1 \leq k \leq n_1 - i + 1, \\ n_1 - i + 1 - k \leq c, \\ 0 < n_j + i + 1 - k \leq c, \quad j = 2, 3, \dots, s. \end{cases}$$

求解 L_1 可归结为找到最小的 k , 使得 $k \geq \max\{n_1 - i + 1 - c, n_2 + i + 1 - c, i + 1\}$ 。由限制性燃烧连通度的定义, 有 $\kappa_b^c(G) = \min_i \max\{n_1 - i + 1 - c, n_2 + i + 1 - c, i + 1\}$ 。

情形 2.2 当 $n_1 = n_2$ 时, 显然, 以 u 为火源, 经过 $k (\geq 1)$ 步燃烧后, G_k 由 2 条路 P_{n_1+1-k} 和 $s-2$ 条路 $P_{n_j+1-k}, j = 3, 4, \dots, s$ 组成, 令 $m(G_k) \leq c$, 解得 $k \geq n_1 + 1 - c$, 所以, 由限制性燃烧连通度定义知, $\kappa_b^c(G) = n_1 + 1 - c$ 。

情形 3 $\sum_{j=2}^s n_j < n_1$ 。

情形 3.1 当 $\sum_{j=2}^s n_j + 1 \leq c < n_1$ 时,在 $P^{(1)}$ 上选顶点 v_{i_1} , $i_1 = 1, 2, \dots, n_1 - 1$ 为火源,经过 k 步燃烧后, G_k 共有 2 个分支,由路 $P_{n_1-i_1-k}$ 和蜘蛛图 $SP(i-k, n_2, \dots, n_s)$ 组成,令 $m(G_k) \leq c$,则 $\kappa_b^c(G)$ 的计算可描述为求解数学规划问题,建立如下数学模型:

$$(L_2) \quad \min_i k \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=2}^s n_j < n_1, \\ \sum_{j=2}^s n_j + 1 \leq c < n_1, \\ 1 \leq k \leq i, \\ k < n_1 - i + 1, \\ n_1 - i + 1 - k \leq c, \\ 0 < \sum_{j=2}^s n_j + i + 1 - k \leq c. \end{cases}$$

求解 L_2 即寻找最小的 k ,使得 $k \geq \max \{n_1 - i + 1 - c, \sum_{j=2}^s n_j + i + 1 - c\}$ 。由限制性燃烧连通度的定义,有

$$\kappa_b^c(G) = \min_i \max \{n_1 - i + 1 - c, \sum_{j=2}^s n_j + i + 1 - c\}。$$

情形 3.2 当 $0 \leq c \leq \sum_{j=2}^s n_j$ 时, u 必须被燃烧,且 $i + 1 \leq k \leq n_1 - i + 1$,类似于情形 2,有

$$\kappa_b^c(G) = \min_i \max \{n_1 - i + 1 - c, n_2 + i + 1 - c, i + 1\}。$$

综上所述,结论成立。

注 1 当 $n_1 + n_2$ 为奇数时, $\kappa_b^1(SP(n_1, n_2, \dots, n_s)) = \kappa_b^0(SP(n_1, n_2, \dots, n_s))$ 。

例 1 求蜘蛛图 $SP(9, 5, 5, 4)$ 的限制性燃烧连通度与最佳火源。

在 $SP(9, 5, 5, 4)$ 中, $n_1 = 9$, $\sum_{j=2}^4 n_j = 14$ 。当 $c \geq 9$ 时, $\kappa_b^c(SP(9, 5, 5, 4)) = 1$; 当 $0 \leq c \leq 8$ 时,由定理 6, $\kappa_b^c(SP(9, 5, 5, 4)) = \min_i \max \{10 - i - c, 6 + i - c, i + 1\}$ 。对于不同的 c 值,如表 1 所示,列出了 $SP(9, 5, 5, 4)$ 的限制性燃烧连通度与最佳火源。

表 1 $c \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$ 时的参数值与最佳火源
Table 1 Parameter value and optimal fire source when $c \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$

c 的取值	$\kappa_b^c(SP(9, 5, 5, 4))$	最佳火源
0	8	v_{12}
1	7	v_{12}
2	6	v_{12}
3	5	v_{12}
4	4	v_{12}
5	3	v_{12}
6	3	v_{11} 或 v_{12}
7	2	v_{11}

推论 1 设 $S_{1, n-1} (n \geq 3)$ 是 n 阶星图,则

$$\kappa_b^c(S_{1, n-1}) = \begin{cases} 2, & c = 0; \\ 1, & c \geq 1. \end{cases}$$

证明 显然, $S_{1, n-1}$ 是特殊的蜘蛛图,有 $n-1$ 条手臂,其中 $n_1 = n_2 = \dots = n_s = 1$ 。由定理 6,当 $c \geq 1$ 时, $\kappa_b^c(S_{1, n-1}) = 1$; 当 $c = 0$ 时, $\kappa_b^c(S_{1, n-1}) = 2$ 。

3 限制性燃烧连通度与图结构的关系

由上述讨论可知, 限制性燃烧连通度与连通度、燃烧数不同, 本节讨论限制性燃烧连通度与燃烧数、连通度、邻域连通度及图结构之间的关系。

例 2 计算图 5 的燃烧数、连通度、邻域连通度和限制性燃烧连通度。

易知, $\kappa(G) = \text{VNC}(G) = 1$, $b(G) = 3$, 当 $c = 0$ 时, $\kappa_b^c(G) = 3$; 当 $1 \leq c < 3$ 时, $\kappa_b^c(G) = 2$; 当 $3 \leq c < n$ 时, $\kappa_b^c(G) = 1$ 。此例表明, 限制性燃烧连通度比其他 3 个参数的区分度好。此外, 由定义不难知道, c 的值增大, $\kappa_b^c(G)$ 减小, 反之亦然。

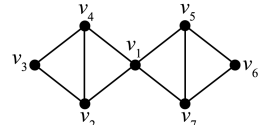


图 5 图 G
Fig.5 The graph G

下面通过比较不同类型图的限制性燃烧连通度与燃烧数、连通度之间的关系, 深入分析该参数与图结构的关系。如表 2, 当 $c = 0$ 时, $\kappa_b^c(G) \geq b(G)$; 当 c 足够大时, $\kappa_b^c(G) < b(G)$ 。然而, 当 $\kappa(G) \leq 2$ 时, $\kappa_b^c(G) \geq \kappa(G)$, 特别地, 对于完全二部分图 $K_{m,n}$, 当 $m \geq n \geq 3$ 时, $\kappa(G) \geq \kappa_b^c(G)$ 。

表 2 几类基本图参数之间的关系
Table 2 The relationship between the parameters of several basic graphs

参数	$P_n(n \geq 3)$	$C_n(n \geq 3)$	$K_{m,n}(m \geq n \geq 3)$	$H_{1,n}$ 或 $S_{1,n-1}(n \geq 3)$
$\kappa_b^c(G)$ 与 $b(G)$	$\begin{cases} \kappa_b^c(G) \geq b(G), & c \leq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - \lceil \sqrt{n} \rceil; \\ \kappa_b^c(G) < b(G), & c > \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - \lceil \sqrt{n} \rceil. \end{cases}$	$\kappa_b^c(G) \geq b(G)$	$b(G) \geq \kappa_b^c(G)$	$\begin{cases} \kappa_b^c(G) = b(G), & c = 0; \\ \kappa_b^c(G) < b(G), & c \geq 1. \end{cases}$
$\kappa_b^c(G)$ 与 $\kappa(G)$	$\kappa_b^c(G) \geq \kappa(G)$	$\kappa_b^c(G) \geq \kappa(G)$	$\kappa(G) \geq \kappa_b^c(G)$	$\kappa_b^c(G) \geq \kappa(G)$

定理 7 设 G 是一个 n 阶连通图, 其最大顶点度为 Δ , 则有 $\kappa_b^c(G) \leq n - (\Delta + 1)$ 。

证明 设 (B_1, B_2, \dots, B_k) 是 G 的已燃烧顶点集序列, 其中 $B_1 = \{x\}$ 为火源。由限制性燃烧连通度的定义, 以最大度顶点为火源, 经过 2 步燃烧后, 剩余子图 G_2 的阶是 $n - (\Delta + 1)$ 。再经过 $n - (\Delta + 1)$ 步燃烧后, 剩余子图是 \emptyset , 所以, $\kappa_b^c(G) \leq n - \Delta + 1$ 。

对于 $n (\geq 3)$ 阶星图 $S_{1,n-1}$ 、 $n (\geq 4)$ 阶完全图 K_n 和轮形图 W_n , 等号成立, 表明定理中的上界可以达到。

定理 8 设 G 是半径为 r 的连通图, 则有 $\kappa_b^c(G) \leq r + 1$ 。

证明 设 v 是 G 的中心, 以 v 为火源, 经过 $r + 1$ 步燃烧后, 剩余子图是 \emptyset , 所以, $\kappa_b^c(G) \leq r + 1$ 。

4 结论

本文提出了一个新参数——限制性燃烧连通度, 该参数既反映了破坏网络的难度, 又反映了剩余网络的连通状态。运用数学规划方法研究了路的笛卡尔积图、蜘蛛图的计算问题。总体来看, 限制性燃烧连通度的大小与图的结构、 c 的大小、火源的选取均有关。该参数能刻画不同网络在抗毁性上的细微差异, 然而, 对于一般的图, 该参数值的计算较为复杂。

在接下来的研究中, 将考虑树的限制性燃烧连通度算法设计与复杂性分析、多火源情形下限制性燃烧连通度及其相关问题, 为限制性燃烧连通度条件下网络抗毁性优化提供理论和方法支撑。

参考文献:

[1] BONATO A, JANSSEN J, ROSHANBIN E. How to burn a graph[J]. Internet Mathematics, 2016, 12(1/2):85-100.
[2] LIU Huiqing, HU Xuejiao, HU Xiaolan. Burning number of caterpillars[J]. Discrete Applied Mathematics, 2020, 284:332-340.
[3] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. London: Springer, 2008.