山东大学学报(理学版)2025 年 5 月 第 60 卷 第 5 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.5, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)05-0009-04 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.304

关于有限群中非 σ-次正规子群数量的探讨

马小箭,毛月梅*
(山西大同大学数学与统计学院, 山西 大同 037009)

摘要:设 G 是一个有限群,$n_\sigma(G)$ 表示 G 中所有非 σ-次正规子群共轭类的个数。利用极小阶反例的证明方法和 σ-次正规的一些性质,比较 $n_\sigma(G)$ 与 $|\sigma(G)|$ 的数量关系,给出了 σ-可解群的一个新的结论,并由此推广了已有的一些成果。

关键词:σ-可解群;非 σ-次正规子群;Hall σ_i-子群;Sylow 型的 σ-完全群
中图分类号:O152 **文献标志码**:A
引用格式:马小箭,毛月梅.关于有限群中非 σ-次正规子群数量的探讨[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):9-12,19.

Discussion on the number of non σ-subnormal subgroups in finite groups

MA Xiaojian, MAO Yuemei*
(School of Mathematics and Statistics, Shanxi Datong University, Datong 037009, Shanxi, China)

Abstract: Let G be a finite group and $n_\sigma(G)$ be the number of conjugacy classes of all non σ-subnormal subgroups. Applying the proof method of minimal order counterexamples and some σ-subnormal properties, new conclusions of σ-solvable groups and generalize some previous results are given by comparing quantitative relationships between $n_\sigma(G)$ and $|\sigma(G)|$.
Key words: σ-solvable groups; non σ-subnormal subgroups; Hall σ_i-subgroups; σ-full group of Sylow type

0 引言

有限群中某些特定子群的共轭类个数是影响有限群结构的因素之一。比如,在有限群 G 中,$\nu(G)$ 表示 G 的非正规子群共轭类的个数,$\pi(G)$ 表示所有能整除 G 的阶的素数的集合, $\nu(G)=0$ 的充要条件是 G 同构于一个 Dedekind 群。文献[1]证明了如果有限群 G 非可解, 那么 $\nu(G)\leqslant 2|\pi(G)|+1$。同样, $n(G)$ 表示 G 的非次正规子群的共轭类个数,文献[2]对 $n(G)=2$ 的有限群给出了完全分类;文献[3]又通过讨论 $n(G)$ 与 $\pi(G)$ 的数量关系,给出可解群的一些新的结论。文献[4]提出了 σ-群的相关理论,将次正规子群推广为 σ-次正规子群;文献[5-7]应用 σ 次正规子群的特性给出 σ-可解群许多新的成果。本文讨论有限群中非 σ-次正规子群共轭类的个数,给出 σ-可解群新的刻画,这一成果推广了文献[3]中定理 3.1(1)的结论:设 G 是有限群,如果 $n(G)\leqslant 2|\pi(G)|$,那么 G 是可解的。

首先介绍 σ-可解群理论中的一些基本概念和符号[4-5]。设 $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$ 是所有素数集合 $\mathbf{P}$ 的一个划分,符号 Π 表示 σ 的任一非空子集。设 G 是一个群,通常记 $\sigma(G)=\sigma(|G|)=\{\sigma_i \mid \sigma_i\cap\pi(G)\neq\varnothing\}$。如果 $G=1$ 或 $|\sigma(G)|=1$,则称 G 是 σ-准素的。设 $H\leqslant G$,如果 $|H|$ 是一个 Π-数,则称 H 是 G 的 Π-子群;如果 H 是 G 的一个 Π-子群且 $|G:H|$ 是一个 Π'-数,其中 $\Pi'=\sigma\backslash\Pi$,则称 H 是 G 的 Hall Π-子群。设 $\mathscr{H}$ 是群 G 的子群集满足 $1\in\mathscr{H}$,如果对于某个 $\sigma_i\in\Pi$,$\mathscr{H}$ 中的每个元素都是 G 的一个 Hall σ_i-子群,并且对于每一个 $\sigma_i\in\Pi\cap\sigma(G)$,$\mathscr{H}$ 包含且只包含 G 的一个 Hall σ_i-子群,则称 $\mathscr{H}$ 为 G 的完备 Hall Π-集。特别地,如果 $\Pi=\sigma$,则

收稿日期:2024-09-04; **网络出版时间**:2025-03-26 10:42:30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371021)
第一作者:马小箭(1979—),男,副教授,硕士,研究方向为群论. E-mail:mxj790808@163.com
*通信作者:毛月梅(1979—),女,教授,硕士生导师,博士,研究方向为群论. E-mail:maoyuemei@126.com

称 $\mathscr{H}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集;如果存在 G 的子群链 $H=H_0\leqslant H_1\leqslant\cdots\leqslant H_n=G$,满足 $H_{i-1}\trianglelefteq H_i$ 或 $H_i/(H_{i-1})_{H_i}$ 是 σ-准素的,其中 $i=1,2,\cdots,n$,则称 H 是 G 的 σ-次正规子群。如果 G 有一个完备的 Hall σ-集,则称 G 是 σ-完全群。如果 G 的每个子群都是 D_{σ_i}-群,其中 $\sigma_i\in\Pi\cap\sigma(G)$,则称 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群。文中符号 $n_\sigma(G)$ 表示群 G 中非 σ-次正规子群共轭类的个数。

本文所讨论的群均是有限群,未交待的概念和符号参见文献[8-10]。

1　预备知识

引理 1[4]　设 $K\leqslant G$, $N\trianglelefteq G$, A 是 G 的 σ-次正规子群,则

(1) $K\cap A$ 是 K 的 σ-次正规子群。

(2) 如果 K 也是 G 的 σ-次正规子群,那么 $\langle K,A\rangle$ 是 G 的 σ-次正规子群。

(3) AN/N 是 G/N 的 σ-次正规子群。

(4) 如果 G 是 Π-完全群,并且 A 是一个 Π-群,那么 $A\leqslant O_\Pi(G)$。

引理 2　假定 H 是群 G 的一个正规 Hall σ_i-子群,如果 $H\leqslant K$, $L\leqslant G$ 并且 K 与 L 是同构的,那么 K/H 与 L/H 也是同构的。

证明　假设 $\varphi:K\to L$ 是 K 到 L 一个同构映射,那么 $\varphi(H)=H$。易见

$$\bar{\varphi}:K/H\to L/H,\quad kH\mapsto\varphi(k)H$$

是 φ 诱导的 K/H 到 L/H 的一个同构映射,其中 $k\in K$。

引理 3　设 G 是一个具有 Sylow 型的 σ-完全群,K 是 G 的正规子群,H 是 K 的 Hall σ_i-子群,那么 $G=N_G(H)K$。

证明　显然对任意的 $x\in G$,有 $H^x\leqslant K$。因为 $|H^x|=|H|$,所以 H^x 和 H 均是 K 的 Hall σ_i-子群。由 Sylow 型的 σ-完全群的定义知,K 是 D_{σ_i}-群,因此存在元素 $y\in K$,使得 $H^x=H^y$,即 $xy^{-1}\in N_G(H)$,知 $x=(xy^{-1})y\in N_G(H)K$, $G=N_G(H)K$。

引理 4　设 G 是一个具有 Sylow 型的 σ-完全群,$\mathscr{H}=\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集,如果 $G=K\rtimes H_i$,其中 H_i 是 G 的 Hall σ_i-子群,K 是 G 正规 Hall σ_i'-子群,那么 K 中存在 G 的 H_i-不变 Hall σ_j-子群,其中 $j=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,t$。

证明　假设 H 是 K 的一个 Hall σ_j-群,由引理 3 知 $G=N_G(H)K$。因为

$$H_i\cong G/K=N_G(H)K/K\cong N_G(H)/N_G(H)\cap K=N_G(H)/N_K(H),$$

即 $|N_G(H):N_K(H)|$ 是 σ_i-数,所以 $N_K(H)$ 是 $N_G(H)$ 的正规 Hall σ_i'-子群,从而令 B 是 $N_K(H)$ 在 $N_G(H)$ 中的补,即 $N_G(H)=N_K(H)\rtimes B$,易见,

$$|G:B|=|G:N_G(H)|\ |N_G(H):B|$$

是一个 σ_i'-数,因此 B 也是 G 的 Hall σ_i-子群。因为 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群,所以 G 中存在元素 x 使得 $H_i=B^x\leqslant N_G(H^x)$,显然 H^x 也是 K 的 Hall σ_j-子群,因此 K 中存在 H_i-不变的 Hall σ_j-子群。

引理 5[4]　假定 G 是 σ-可解群,那么 G 中存在 σ-基 $\mathscr{H}=\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$。

2　主要结果

文献[9]的第Ⅱ章第 5 节给出转移映射的概念和相关性质,应用转移映射的概念和性质证明了著名的 Bunrside 定理:设 G 是有限群,P 是 G 的 Sylow p-子群。若 $N_G(P)=C_G(P)$,则 G 是 p-幂零群,即 G 有正规 p-补。因此,在 σ-可解理论中,当把 Sylow p-子群推广到 Hall σ_i-子群后[4],将转移映射的概念应用到 σ-完全群中,从而给出下面的命题,事实上这也是 Burnside 定理的推广。

命题 1　设 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群,H 是 G 的 Hall σ_i-群,若 $N_G(H)=C_G(H)$,那么 G 有正规的 Hall σ_i'-子群。

证明　因为 $H\leqslant N_G(H)=C_G(H)$,所以 H 是交换群。考虑从 G 到 H 的转移映射 $V_{G\to H}$,只要证明

$V_{G\to H}(G)=H$，那么由同态基本定理知 Ker $V_{G\to H}$ 就是 G 的正规的 Hall σ_i'-子群。事实上证明 $V_{G\to H}(H)=H$ 即可。取 $1\neq g\in H$，由于 $H'=1$，由文献[9]中的式(5.1)，有

$$V_{G\to H}(g)=\prod_{i=1}^{t} x_i g^{f_i} x_i^{-1}。$$

因为元素 g^{f_i} 和 $x_i g^{f_i} x_i^{-1}$ 均属于 H，并且 H 是交换的，所以 $H\leqslant C_G(g^{f_i})\cap C_G(x_i g^{f_i} x_i^{-1})$，从而有 $H^{x_i}\leqslant C_G(g^{f_i})$，这表明在 $C_G(g^{f_i})$ 中有 G 的 2 个 Hall σ_i-子群。因为 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群，所以存在 $u\in C_G(g^{f_i})$ 使得 $H^{x_i}=H^u$，于是

$$x_i u^{-1}\in N_G(H)=C_G(H)\leqslant C_G(g^{f_i}),$$

故 $x\in C_G(g^{f_i})$，即 $x_i g^{f_i} x_i^{-1}=g^{f_i}$，从而有

$$V_{G\to H}(g)=\prod_{i=1}^{t} x_i g^{f_i} x_i^{-1}=\prod_{i=1}^{t} g^{f_i}=g^{\sum_{i=1}^{t} f_i}=g^{|G:H|},$$

由 $g\in H$ 知，g 是一个 σ_i-数，而 $|G:H|$ 是 σ_i'-数，因此由 $g\neq 1$ 推得 $V_{G\to H}(g)\neq 1$，表明 $V_{G\to H}$ 限制在 H 上是 H 到 H 的单射。易见，$V_{G\to H}$ 也是一个满射，从而知 $V_{G\to H}(H)=H$。

$l_\sigma(G)$ 表示 G 的所有非 σ-次正规子群同构类的个数，因为 2 个共轭子群一定是同构的，所以 $l_\sigma(G)\leqslant n_\sigma(G)$，可以通过 $l_\sigma(G)$ 刻画群 G 的 σ-可解性。

定理 1　假定 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群，$\mathscr{H}=\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集，如果 $l_\sigma(G)\leqslant 2|\sigma(G)|$，那么 G 是 σ-可解的。

证明　设 G 是极小阶反例，下面通过证明 $l_\sigma(G)\geqslant 2|\sigma(G)|+1$ 得到与已知矛盾，按照以下 3 个步骤证明。

(1) G 中不存在正规的 Hall σ_i-子群。

假设 G 中存在正规的 Hall σ_i-子群 H_i，那么 $H_i\in\mathscr{H}$。记 $H_i=H$，显然，G/H 是一个 Sylow 型的 σ-完全群，并且

$$\bar{\mathscr{H}}=\{H_1H/H,H_2H/H,\cdots,H_tH/H\}$$

是 G/H 的一个完备 Hall σ-集。若 G/H 是 σ-可解的，那么 G 是 σ-可解的，与假设矛盾。因此 G/H 不是 σ-可解的，由 G 的极小阶反例知 $l_\sigma(G/H)\geqslant 2|\sigma(G/H)|+1$。令 $K_1/H,K_2/H,\cdots,K_s/H$ 是 G/H 的所有非 σ-次正规子群同构类的代表元，其中 $s=l_\sigma(G/H)$，由引理 2 知，当 $i\neq j$ 时，K_i 和 K_j 是不同构的，又由 Schur-Zassenhause定理[9]知，H 在 K_i 中有补 V_i，即 $K_i=H\rtimes V_i$，若 V_i 是 G 的 σ-次正规子群，由引理 1(2)知，V_iH 是 G 的 σ-次正规子群，由引理 1(3)知 K_i/H 是 G/H 的 σ-次正规子群，但这是不可能的，因此 V_i 是 G 的非 σ-次正规子群，并且 V_i 和 V_j 是不同构的，故 G 中至少有 $2s$ 个不同构的非 σ-次正规子群。又因为 $|\sigma(G/H)|=|\sigma(G)|-1$，并且 $|\sigma(G)|>1$，所以有

$$\begin{aligned} l_\sigma(G)\geqslant 2s &\geqslant 4|\sigma(G/H)|+2\\ &=4|\sigma(G)|-2\\ &=2|\sigma(G)|+2(|\sigma(G)|-1)\\ &\geqslant 2|\sigma(G)|+2,\end{aligned}$$

显然 $l_\sigma(G)\geqslant 2|\sigma(G)|+1$。

(2) 对每一个 $H_i\in\mathscr{H}$，G 中不存在正规的 Hall σ_i'-子群，即 G 中不存在正规的 Hall σ_i-补子群。

假定对某个 $H_i\in\mathscr{H}$，G 中存在正规的 Hall σ_i'-群 K，即 $G=K\rtimes H_i$。显然，K 是不可解的，可知 $|\sigma(G)|\geqslant 3$，$l_\sigma(K)\geqslant 2|\sigma(K)|+1$。因为 $|\sigma(K)|=|\sigma(G)|-1$，并且由引理 1(1)知，若 G 中有子群在 K 中是非 σ-次正规的，那么在 G 中也一定是非 σ-次正规的，所以有

$$l_\sigma(G)\geqslant l_\sigma(K)\geqslant 2|\sigma(G)|-1。$$

再由引理 4 知，K 中存在 H_i-不变的 Hall σ_j-子群 H_j，其中 $j=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,t$，即 $H_i\leqslant N_G(H_j)$，从而有 $H_j\trianglelefteq H_iH_j$。若 H_iH_j 在 G 中是 σ-次正规的，那么 H_j 在 G 中也是 σ-次正规的，并由此知 H_j 在 G 中正规，这与(1)矛盾，故对每一个 j，子群 H_iH_j 在 G 中都是非 σ-次正规的，因此 G 中又存在不同构于前面的 $|\sigma(G)|-1$ 个非 σ-次正规子群的同构类，又因为 $|\sigma(G)|\geqslant 3$，推得 $l_\sigma(G)\geqslant 2|\sigma(G)|+1$。

（3）给出最后矛盾。

因为 G 不是 σ-可解的，所以不失一般性，可设 $2\in\sigma_1$。由(1)推得每个 H_i 是 G 的非 σ-次正规子群。当 $i=2,3,\cdots,t$ 时，如果 H_i 是非循环的，那么 H_i 中至少存在一个极大子群 M_i 是 G 的非 σ-次正规子群，否则，由引理 1 (2)知，H_i 是 G 的 σ-次正规子群，矛盾。下面考虑 H_i(其中 $i=2,3,\cdots,t$)是循环的情况。若$N_G(H_i)=C_G(H_i)$，由命题 1 知 G 有正规的 Hall σ_i'-子群，这与(2)矛盾，因此 $C_G(H_i)<N_G(H_i)$。又因为 $H_i\leqslant C_G(H_i)$，所以 G 中存在 σ_i'-元素 $x_i\in N_G(H_i)\setminus C_G(H_i)$。令 $M_i=H_i\langle x_i\rangle$，显然，$H_i$ 是 M_i 的正规子群，若 M_i 是 G 的 σ-次正规子群，则 H_i 是 G 的 σ-次正规子群，矛盾，因此 M_i 是 G 的非 σ-次正规子群，并且当 $i\neq j$ 时，M_i 与 M_j 是不同构的。当 $i=2,3,\cdots,t$ 时，G 中至少存在 $2|\sigma(G)|-2$ 个不同构的非 σ-次正规子群。

下面讨论 H_1 中 G 的非 σ-次正规子群的情况。设 P 是 G 的 Sylow 2-子群，由上面假设知 $P\leqslant H_1$。若 H_1 是循环的，则 P 是循环的，G 是可解的，矛盾，故 H_1 是非循环的。类似于上面的讨论，H_1 中至少存在一个极大子群 D_1 是 G 的非 σ-次正规子群。若能够证明 G 中至少还存在一个不同构于 H_1 和 D_1 的非 σ-次正规子群，那么就有 $l_\sigma(G)\geqslant 2|\sigma(G)|+1$。下面分 2 种情况说明 H_1 中至少还有一个 G 的非 σ-次正规子群与 H_1 和 D_1 均不同构。

首先考虑 $P=H_1$ 的情况。若 $P<N_G(P)$，那么 $N_G(P)$一定是 G 的非 σ-次正规子群。若否，能推得 P 是 G 的 σ-次正规子群，这与(1)矛盾，因此 $N_G(P)$是 G 的非 σ-次正规子群，并且显然 $N_G(P)$与 H_1 和 D_1 均不同构。现假定 $P=N_G(P)$，若 P 是交换的，则 $P\leqslant C_G(P)$，从而有 $C_G(P)=N_G(P)$，由 Burnside 定理知 G 是 2-幂零，则 G 是可解的，矛盾，故 P 是非交换的，因此$|P|>4$。设 D_2 是 D_1 的极大子群，若 D_2 是 G 的 σ-次正规子群，则由引理 1(4)知 $D_2\leqslant O_{\sigma_1}(G)$。因为 $P=H_1$，所以 $O_{\sigma_1}(G)=O_p(G)$。又因为 $D_2\neq 1$，所以 $O_{\sigma_1}(G)\neq 1$。记 $V=O_{\sigma_1}(G)$，并考虑 G/V，显然，P/V 是 G/V 的 Sylow 2-子群，由 D_1 是 G 的非 σ-次正规子群知$|P/V|=|P/D_2|=2^2$。因为 $P=N_G(P)$，所以

$$N_{G/P}(P/V)=N_G(P)/V=P/V\leqslant C_{G/P}(P/V),$$

从而有 $N_{G/P}(P/V)=C_{G/P}(P/V)$，再一次由 Burnside 定理知 G/V 是 2-幂零，那么 G/V 是可解的，G 是 σ-可解的，矛盾，故 D_2 是 G 的非 σ-次正规子群，并且 D_2 与 H_1 和 D_1 均不同构。

其次考虑 $P\neq H_1$ 的情况。若 $P=D_1$ 是 H_1 的极大子群，因为 H_1 是非循环的，所以 H_1 中存在不同构于 D_1 的极大子群，设为 M_1。若 M_1 是 G 的 σ-次正规子群，那么 $M_1\leqslant O_{\sigma_1}(G)\leqslant H_1$。因为 H_1 非正规于 G，所以 $M_1=O_{\sigma_1}(G)$，即 M_1 是 H_1 的正规极大子群，得 $H_1=PM_1$，推得$|H_1/M_1|=2$，这说明 H_1/M_1 是 G/M_1 的循环的 Sylow 2-子群，类似于上面的讨论有 G/M_1 是 σ-可解的，从而知 G 是 σ-可解的，矛盾，因此 M_1 是 G 的非 σ-次正规子群，并且 M_1 与 H_1 和 D_1 均不同构。假定 $P\neq D_1$，显然 P 是 G 的非 σ-次正规子群，若否，则 $P\leqslant O_{\sigma_1}(G)$，那么 $G/O_{\sigma_1}(G)$是奇阶群，从而 $G/O_{\sigma_1}(G)$是可解的，推得 G 是 σ-可解的，矛盾。显然，P 与 H_1 和 D_1 均不同构。定理 1 证毕。

推论 1[3]　设 G 是有限群，如果 $n(G)\leqslant 2|\pi(G)|$，那么 G 是可解的。

定理 2　假定 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群，如果 $l_\sigma(G)\leqslant 2|\sigma(G)|-2$，那么 G 中存在正规的 Hall σ-子群。

证明　由已知 $l_\sigma(G)\leqslant 2|\sigma(G)|$，由定理 1 知 G 是 σ-可解群，从而由引理 5 知，G 中存在 σ-基 $\mathscr{H}=\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$。当 $t=1$ 时，结论显然成立。考虑 $t>1$ 的情况，假设 G 的所有 Hall σ_i-子群都是非 σ-次正规的。令集合 $S_i=\{H_iH_{i+1},H_iH_{i+2},\cdots,H_iH_t\}$，其中 $i=1,2,\cdots,t-2$，在每个 S_i 中至少存在一个子群在 G 中是非 σ-次正规的，否则，将会出现正规的 Hall σ_i-子群，与假设矛盾。因此断定 $l_\sigma(G)\geqslant 2|\sigma(G)|-2$，再结合题设有 $l_\sigma(G)=2|\sigma(G)|-2$，使得每个 H_i 中有唯一极大子群，所以 H_i 是循环群，故 G 的所有 Sylow 子群是循环的，知 G 中存在正规的 Sylow 子群，这使得 $l_\sigma(G)>2|\sigma(G)|-2$，与已知矛盾，故 G 中存在正规的 Hall σ_i-子群。

3　结论

讨论了具有 Sylow 型的 σ-完全群 G，当 G 的所有非 σ-次正规子群同构类的个数不大于 $2|\sigma(G)|$时，给出了 σ-可解群一个新的判定。这一结论推广了文献[3]中定理 3.1 的可解群的结论，为进一步通过判断非 σ-次正规子群的数量关系研究有限群的结构提供了新的思路。

（下转第 19 页）