山东大学学报(理学版)2025 年 5 月 第 60 卷 第 5 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.5, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)05-0005-04 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.510

平坦 S-系满足条件(E)的幺半群

乔虎生[1,2],刘媛君[1,2]

(1.西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070; 2.甘肃省数学与统计学基础学科研究中心, 甘肃 兰州 730070)

摘要:设 S 是幺半群,A 是左 S-系,研究了所有平坦 S-系满足条件(E)的幺半群,得到新的幺半群类,并证明了在新的幺半群条件下,所有平坦 S-系满足条件(E)当且仅当 S 是左零半群添加幺元构成的幺半群,或者 S 是平凡幺半群。

关键词:左 S-系;平坦;条件(E);条件(P)

中图分类号:O152 **文献标志码**:A

引用格式:乔虎生,刘媛君.平坦 S-系满足条件(E)的幺半群[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):5-8.

Monoids over which all flat S-acts satisfy condition (E)

QIAO Husheng[1,2], LIU Yuanjun[1,2]

(1. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China; 2. Gansu Provincial Research Center for Basic Disciplines of Mathematics and Statistics, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: Let S be a monoid, A a left S-act. The monoids over which all flat S-acts satisfy condition (E) are studied. Some new classes of monoids are obtained, and it is proved that under the new monoid condition, all flat S-acts satisfy Condition (E) if and only if S is a monoid formed by adding an identity element to a left zero semigroup, or S is a trivial monoid.

Key words: left S-act; flatness; condition (E); condition (P)

0 引言

设 S 是幺半群,1 是其单位元,A 是非空集合,若有 $S\times A$ 到 A 的映射 $f:S\times A\to A$, $(s,a)\mapsto sa$,满足

$$t(sa)=(ts)a,\quad 1a=a,\quad \forall s,t\in S,\quad \forall a\in A,$$

则称(A,f)是左 S-系[1],或称 S 左作用于 A 上。

称 S-系 A 满足条件(E)[1],如果对任意的 $s,t\in S$, $a\in A$,若 $sa=ta$,则存在 $a'\in A$, $u\in S$,使得 $a=ua'$, $su=tu$。

称 S-系 A 满足条件(P)[2],如果对任意的 $s,s'\in S$,任意的 $a,a'\in A$,若 $sa=s'a'$,则存在 $a''\in A$, $u,v\in S$,使得 $su=s'v$, $a=ua''$, $a'=va''$。

称一个幺半群 S 为左 P(P)[3]的,如果 S 的每一个主左理想作为左 S-系满足条件(P)。$u\in S$ 叫右拟半可消元[3],若对任意的 $s,t\in S$,有 $su=tu$,则存在 $r_1,r_2\in S$,使得 $sr_1=tr_2$, $u=r_1u=r_2u$。

称一个幺半群 S 为左 PSF[1]的,如果 S 的任意主左理想作为左 S-系是强平坦的。

称 S 为左 PP[1]幺半群当且仅当对 S 的任意元 a,存在幂等元 $e\in S$,使得 $a=ea$,并且若 $xa=ya$,则 $xe=ye$。

Liu[4]研究了当 S 为左 PSF 幺半群时,得出平坦 S-系的三条等价关系。由于左 PP 幺半群一定是左 PSF 的,因此对左 PP 幺半群上述等价关系也成立。Liu[5]研究了所有满足条件(E)的 S-系是平坦的当且仅当 S 是正则幺半群,并提出问题:如何刻画平坦左 S-系满足条件(E)的幺半群?

收稿日期:2023-12-01; **网络出版时间**:2024-09-25 13:26:27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11961058); 甘肃省科技厅基础研究创新群体资助项目(23JRRA684)

第一作者:乔虎生(1974—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为半群代数理论. E-mail:gsqiaohsh@163.com

1 主要结论及证明

引理 1[3] 设 S 是幺半群,下述条件等价:

(1) S 是左 P(P)的;

(2) S 的每一个主左理想由 S 的一个右拟半可消元生成;

(3) S 的每一个元素是右拟半可消元。

引理 2[1] 对于幺半群 S,以下几条等价:

(1) 任意弱平坦循环左 S-系是投射的;

(2) 任意弱平坦循环左 S-系是强平坦的;

(3) 任意平坦循环左 S-系是投射的;

(4)任意平坦循环左 S-系是强平坦的;

(5) 任意 $x\in S$, $x\neq 1$,存在自然数 n,使得 x^n 是 S 的左零元,称 S 为左诣零幺半群。

引理 3[1] 对于幺半群 S,以下几条等价:

(1) 所有平坦 S-系是正则的;

(2) 所有弱平坦 S-系是正则的;

(3) 任意平坦 S-系的循环子系是强平坦的;

(4) 任意弱平坦 S-系的循环子系是强平坦的;

(5) $S=N^1$,其中 $N=\varnothing$或 N 是左零半群。

定理 1 设 S 是左 P(P)幺半群,则以下几条等价:

(1) 所有平坦左 S-系满足条件(E);

(2) 所有弱平坦左 S-系满足条件(E);

(3) $S=N^1$,其中 $N=\varnothing$或 N 是左零半群。

证明 (2)⇒(1)显然成立。

(1)⇒(3)。设所有平坦左 S-系满足条件(E),因为循环 S-系是强平坦等价于满足条件(E),所以每个平坦的循环左 S-系是强平坦的。由引理 2 得 S 为左诣零幺半群,即对任意 $x\in S$, $x\neq 1$,存在自然数 n,使得 x^n 是 S 的左零元。S 是左 P(P)幺半群,由引理 1 得 S 的任意元都是右拟半可消元。

设 $x\neq 1$, $x\in S$,假定 n 是使得 x^n 为左零元的最小正整数。

如果 $n=1$,即 x 为左零元。

设 $n>1$,因为

$$x^n x=x^n=x^{n-1}x,$$

而 x 是右拟半可消元,所以存在 $r_1,r_2\in S$,使得

$$x^n r_1=x^{n-1}r_2,\quad x=r_1x=r_2x。$$

如果 $r_1=r_2=1$,那么 $x^n=x^{n-1}$与 n 是使得 x^n 为左零元的最小正整数矛盾,所以 r_1,r_2 中至少有一个不为 1,不妨设 $r_1\neq 1$。又因为 S 是左诣零幺半群,存在自然数 m,使得 r_1^m 为 S 的一个左零元,有

$$x=r_1x=r_1(r_1x)=r_1^2x=r_1^3x=\cdots=r_1^m x=r_1^m,$$

所以 x 也为 S 的左零元,即 $S=N^1$,其中 $N=\varnothing$,或 N 是左零半群。

(3)⇒(2)。$S=N^1$,其中 $N=\varnothing$或 N 是左零半群。由引理 3 得到所有弱平坦 S-系是正则的,根据文献[1]中命题 7.1.12,所有的正则 S-系满足条件(E),因此所有弱平坦左 S-系满足条件(E)。

引理 4[4] 设 S 为左 PSF 幺半群,则以下几条等价:

(1) 所有平坦左 S-系满足条件(E);

(2) 所有弱平坦左 S-系满足条件(E);

(3) S 中除 1 以外的元素都是左零元。

推论 1 假设幺半群 S 是左 PP 的,则以下几条等价:

(1) 所有平坦左 S-系满足条件(E);

(2) 所有弱平坦左 S-系满足条件(E);

(3) S 中除 1 以外的元素都是左零元。

证明　因为左 PP 幺半群一定是左 PSF 的,所以由引理 4 得结论成立。

定义 1[6]　称幺半群 S 是弱左 P(P) 幺半群,如果对任意的 a、b、x、y、$s\in S$,若 $as=bs$, $xb=yb$,那么存在 $r\in S$使得 $xar=yar$, $rs=s$。

定理 2　假设幺半群 S 是弱左 P(P) 的,则以下几条等价:

(1) 所有平坦左 S-系满足条件(E);

(2) 所有弱平坦左 S-系满足条件(E);

(3) S 中除 1 以外的元素都是左零元。

证明　(2)⇒(1) 显然成立。

(1)⇒(3)。设所有平坦左 S-系满足条件(E),因为循环 S-系是强平坦等价于满足条件(E),所以每个平坦的循环左 S-系是强平坦的。由引理 2 得 S 为左诣零幺半群,即对任意 $x\in S$, $x\neq 1$,存在自然数 n,使得 x^n 是 S 的左零元。

设 $x\neq 1$, $x\in S$,假定 n 是使得 x^n 为左零元的最小正整数。

如果 $n=1$,即 x 为左零元。

设 $n>1$,由 x^n 是 S 的左零元,得

$$x^{n-1}x=x^n=x^nx,\quad xx^n=x^{n+1}=x^nx=x^n=1\cdot x^n,$$

又因为 S 是弱左 P(P) 的,所以存在 $r\in S$,使得

$$xx^{n-1}r=1\cdot x^{n-1}r,\quad rx=x。$$

若 $r=1$,则 $xx^{n-1}=x^{n-1}$,即 $x^n=x^{n-1}$,这与 n 是使得 x^n 为左零元的最小正整数矛盾,故 $r\neq 1$。又因为 S 是左诣零幺半群,存在自然数 m,使得 r^m 为 S 的一个左零元,有

$$x=rx=r(rx)=r^2x=r^3x=\cdots=r^mx=r^m,$$

所以 x 也为 S 的左零元,即 $S=N^1$,其中 $N=\varnothing$,或 N 是左零半群。

(3)⇒(2)。$S=N^1$,其中 $N=\varnothing$或 N 是左零半群。由引理 3 得到所有弱平坦 S-系是正则的,根据文献[1]中命题 7.1.12,所有的正则 S-系满足条件(E),因此所有弱平坦左 S-系满足条件(E)。

定义 2　称幺半群 S 是左稳定的,如果对任意的 $1\neq s\in S$,存在 $1\neq l\in S$,使得 $ls=s$。

下面举例说明左 P(P) 幺半群和左稳定幺半群是不同的幺半群类,说明本文主要结论之间是没有蕴含关系,但是相互独立的。

例 1　(1) 设 S 是右可消幺半群,例如群,显然 S 是左 P(P) 幺半群,但不是左稳定幺半群。

(2) 由文献[6],令

$$S=\langle x_0,x_1,\cdots|x_ix_{i+1}=x_{i+1}x_i=x_i,\ i=1,2,\cdots,n\cdots\rangle\cup\{1\},$$

那么 S 中的元素总写成了某个 x_i 正整数次幂,S 是左稳定幺半群,对任意的 $x_i^k=x_{i+1}x_i^k$,但 S 不是左 P(P) 的,例如 $x_2x_1=x_3x_1$,但不存在 r_1、$r_2\in S$,使得 $x_2r_1=x_3r_2$, $x_1=r_1x_1=r_2x_1$。

定理 3　对左稳定的幺半群 S,以下几条等价:

(1) 所有平坦左 S-系满足条件(E);

(2) 所有弱平坦左 S-系满足条件(E);

(3) $S=N^1$,其中 $N=\varnothing$或 N 是左零半群。

证明　(2)⇒(1) 显然成立。

(1)⇒(3)。设所有平坦左 S-系满足条件(E),因为循环 S-系是强平坦等价于满足条件(E),所以每个平坦的循环左 S-系是强平坦的。由引理 2 得 S 为左诣零幺半群,即对任意 $x\in S$, $x\neq 1$,存在自然数 n,使得 x^n 是 S 的左零元。S 是左稳定的,由定义 2,对任意的 $s\in S\backslash\{1\}$,存在 $l\in S\backslash\{1\}$使得 $ls=s$。

因为 $l\neq 1$,假定 n 是使得 l^n 为左零元的最小正整数,有

$$s=ls=l(ls)=l^2s=l^3s=\cdots=l^ns=l^n,$$

所以 s 为 S 的左零元,即 $S=N^1$,其中 $N=\varnothing$,或 N 是左零半群。

(3)⇒(2)。$S=N^1$,其中 $N=\varnothing$ 或 N 是左零半群,由引理 3 得所有弱平坦 S-系是正则的,根据文献[1]中命题 7.1.12,所有的正则 S-系满足条件(E),因此所有弱平坦左 S-系满足条件(E)。

推论 2 设 S 是左可消幺半群,则以下几条等价:

(1) 所有平坦左 S-系满足条件(E);

(2) 所有弱平坦左 S-系满足条件(E);

(3) $S=\{1\}$。

注 1 在定理 1、2 中,如果取幺半群为右 P(P) 幺半群或者弱右 P(P) 幺半群,那么等价性仍然成立。在定理 3 中,若定义右稳定幺半群的概念,定理 3 等价性依然成立。下面以右 P(P) 幺半群为例说明,与定理 1 证明类似,得到

$$r_1x^n=r_2x^{n-1},\quad x=xr_1=xr_2,$$

不妨设 $r_1\neq 1$,那么有 $x=xr_1^n$,任取 $s\in S$,因为 r_1^n 为左零元,所以 $xs=(xr_1^n)s=x(r_1^ns)=xr_1^n=x$, x 就是左零元。

参考文献:

[1] 刘仲奎,乔虎生. 半群的 *S*-系理论[M]. 北京:科学出版社, 2008:183-279.
LIU Zhongkui, QIAO Husheng. The *S*-act theory of semigroups[M]. Beijing: Science Press, 2008:183-279.

[2] 乔虎生,刘仲奎. 半群引论[M]. 北京:科学出版社,2019:125-126.
QIAO Husheng, LIU Zhongkui. An introduction to semigroups[M]. Beijing: Science Press, 2019:125-126.

[3] 乔虎生. C(P)系对幺半群的刻画[J]. 数学研究与评论,2004,24(1):119-126.
QIAO Husheng. Characterization of monoids by C(P) acts[J]. Mathematical Research and Review, 2004, 24(1):119-126.

[4] LIU Zhongkui. Monoids over which all flat left acts are regular[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 1996, 111(1/2/3): 199-203.

[5] LIU Zhongkui. A characterization of regular monoids by flatness of left acts[J]. Semigroup Forum, 1993, 46(1):85-89.

[6] SEDAGHATJOO M, LAAN V, ERSHAD M. Principal weak flatness and regularity of diagonal acts[J]. Communications in Algebra, 2012, 40(11):4019-4030.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 4 页)

例 2 设 Q_8是四元数群, 则 $Q_8=\langle t,s\mid t^4=1,t^2=s^2,t^s=t^{-1}\rangle$, 即 $Q_8=\{1,t,t^2,t^3,s,s^3,ts,ts^3\}$。由引理 2 知, 如果 $\theta\in P(Q_8)$, 那么 θ 把 Q_8 中的二阶元映到自身。只考虑 θ 在 Q_8 中的四阶元的作用,得到 Q_8 的幂自同构只有以下 4 种:

$$\theta_1(a)=a,\quad \theta_1(b)=b;$$
$$\theta_2(a)=a,\quad \theta_2(b)=b^3;$$
$$\theta_3(a)=a^3,\quad \theta_3(b)=b;$$
$$\theta_4(a)=a^3,\quad \theta_4(b)=b^3。$$

于是 $P(Q_8)=\{\theta_1=1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}\cong\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$。

参考文献:

[1] LEVI F W. The ring of endomorphisms for which every subgroup of an abelian group is invariant[J]. Journal of the Indian Mathematical Society, 1946, 10:29-31.

[2] COOPER C D H. Power automorphisms of a group[J]. Mathematische Zeitschrift, 1968, 107:335-356.

[3] MORIGI M. Power automorphisms of finite *p*-groups[J]. Communications in Algebra, 1999, 27(10):4853-4877.

[4] WANG Junxin, GUO Xiuyun. Finite group with its power automorphism groups having small indices[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2009, 25(7):1097-1108.

[5] WINTER D. The automorphism group of an extraspecial *p*-group[J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1972, 2:159-168.

[6] HUPPERT B. Zur sylowstruktur aufslöbarer gruppen[J]. Archiv Der Mathematik, 1961, 12:161-169.

(编辑:陈丽萍)