

一类具有不同扩散速率的蚊媒模型的动力学

押宝,何杰

(西安电子科技大学数学与统计学院,陕西西安710126)

摘要:为研究宿主的扩散和空间异质对蚊媒疾病传播的影响,建立一类具有不同扩散速率的反应扩散蚊媒疾病模型。首先,应用下一代算子理论,定义模型的基本再生数 R_0 ,并分析大扩散和小扩散对 R_0 的影响。其次,利用动力系统的持续性理论,证明 R_0-1 的符号决定模型的全局阈值动力学。最后,数值模拟验证理论结果,并表明空间异质性可能会增加疾病传播的风险。

关键词:蚊媒疾病;空间异质性;基本再生数;阈值动力学

中图分类号: O29 **文献标志码:** A

引用格式:押宝,何杰.一类具有不同扩散速率的蚊媒模型的动力学[J].山东大学学报(理学版),2025,60(5):122-132.

Dynamics of a mosquito-borne model with distinct dispersal rates

YA Bao, HE Jie

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, Shaanxi, China)

Abstract: In order to study the impact of host dispersal and spatial heterogeneity on the spread of mosquito-borne diseases, a reactive-diffusion mosquito-borne disease model with different diffusion rates is established. Firstly, the next-generation operator theory is applied to define the basic reproduction number R_0 of the model, and the asymptotic behavior of R_0 as the diffusion coefficient tending to zero and infinity is analyzed respectively. Secondly, according to the persistence theory of dynamical systems, it is proved that the sign of R_0-1 determines the global threshold dynamics of the model. Finally, numerical simulations validate the theoretical results and show that spatial heterogeneity may increase the risk of disease transmission.

Key words: mosquito-borne diseases; spatial heterogeneity; basic reproduction number; threshold dynamics

0 引言

据世界卫生组织(WHO)报道,蚊媒疾病由寄生虫、细菌和病毒引起,并通过蚊子的叮咬进行传播,每年会导致70多万人死亡^[1]。蚊媒疾病是一种通过蚊子传播的交叉感染疾病,包括疟疾、登革热和基孔肯雅热等。其传播方式:染病的蚊子叮咬易感宿主并将病毒传染给宿主,易感的蚊子叮咬染病的宿主而致使蚊子被感染。蚊媒疾病的流行对生活120个不同国家的39亿人的生命健康构成了威胁^[2],因此利用数学方法研究蚊媒疾病的传播与控制具有重要意义。

空间异质性是指生态学过程在空间分布上的不均匀性及其复杂性,对传染病模型的基本再生数具有重要的影响^[3]。Wang和Zhao^[4]研究了一类登革热模型,他们发现通过空间平均化得到的常微分方程系统可能会低估疾病传播的风险。Zha和Jiang^[5]关于一类部分退化的登革热模型动力学的研究表明疾病传播的空间异质性可能会增加疾病感染的风险。其他关于异质环境中蚊媒疾病的研究工作,可参见文献[6-7]及其引文。

种群扩散也是影响疾病传播的一个重要因素。为了探讨扩散对蚊媒疾病传播的影响,Zhao 等^[8]研究了一类具有空间异质性和一般发病率的反应扩散模型,研究表明,大扩散和小扩散会改变基本再生数 R_0 的大小,并且在一定条件下,感染者的快速移动有利于疾病的控制。Shi 和 Zhao^[9]研究了一类空间异质环境中蚊子叮咬具有偏好性的反应扩散疟疾模型,并表明扩散会使感染者的种群密度在地区间的差距变小。对于斑块模型,宿主或蚊子的快速扩散会降低感染风险,但可能会增加染病宿主的数量^[10]。更多关于这方面的工作,可参考文献[11-12]和他们的引文。然而,尽管目前关于异质环境中蚊媒疾病的研究方兴未艾,但稳态解的稳定性及多重性、稳态解的分支、非局部扩散耦合年龄结构环境下的动力学等仍是值得进一步思考的课题。

对宿主来说,大多数蚊子的活动范围很小^[13]。基于上述讨论,本文建立一类部分退化(即仅考虑宿主扩散)的蚊媒疾病传播模型,定义了模型的基本再生数 R_0 ,并研究该模型的阈值动力学。具体地说,当 $R_0 \leq 1$ 时,疾病最终消除;而当 $R_0 > 1$ 时,模型有一个全局渐近稳定的正稳态解,疾病一直持续。此外,探讨了 R_0 关于扩散系数 D_h 的渐近性质,并通过数值模拟分析空间异质性对疾病传播的影响。研究方法主要基于动力系统的持续性理论,然而由于模型的解映射缺乏紧性,这给模型动力学的分析带来了一定的挑战如线性系统主特征值的存在性。为了克服这些困难,本文引入 Kuratowski 非紧性测度,其研究方法可推广到其他部分退化的反应扩散模型的研究之中。

1 模型构建与适定性

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的空间有界域。令 S_h 和 I_h 分别代表易感的宿主和染病的宿主, $H = S_h + I_h$ 代表宿主总密度。由于不同地区宿主的平均寿命存在一定的差异^[14],因此假设宿主的自然死亡率依赖空间变量 x 。首先考虑以下反应扩散方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = D_h \Delta H + B(x, H)H - d_h(x)H, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ 是拉普拉斯算子, ν 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量,正常数 D_h 是宿主的扩散系数, $B(x, H)$ 和 $d_h(x)$ 分别是宿主的出生率和自然死亡率,生物学文献中 2 个典型的出生率函数为

$$B(x, u) = \begin{cases} b_h(x) e^{-u/K(x)}, & \\ b_h(x) \left[1 - \frac{u}{K(x)} \right], & 0 \leq u \leq K(x), x \in \bar{\Omega}, \\ 0, & u > K(x), x \in \bar{\Omega}, \end{cases}$$

其中 $b_h(x)$ 是宿主的最大出生率,正函数 $K(x)$ 是环境容纳量。假设 $b_h(x)$ 和 $d_h(x)$ 是 $\bar{\Omega}$ 上正的 Hölder 连续函数,且满足

$$\int_{\Omega} b_h(x) dx > \int_{\Omega} d_h(x) dx。$$

由文献[15]中的定理 3.1.5 可知,方程组(1)存在唯一的全局渐近稳定的正稳态解 $H^*(x)$ 。类似地,令 S_m 和 I_m 分别代表易感的蚊子和染病的蚊子,设蚊子总密度 $N = S_m + I_m$,且满足方程:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = A(x) - d_m(x)N, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

其中 $A(x)$ 是蚊子的输入率, $d_m(x)$ 是蚊子的自然死亡率, $A(x)$ 和 $d_m(x)$ 都是 $\bar{\Omega}$ 上正的 Hölder 连续函数。容易看出,方程组(2)存在唯一的全局渐近稳定的正稳态解 $N^*(x) = \frac{A(x)}{d_m(x)}$ 。本文关注的是疾病传播的长期动力学,因此假设宿主总密度和蚊子总密度分别稳定在 $H^*(x)$ 和 $N^*(x)$ 。由于城市之间以及同一城市不同地区之间的蚊媒疾病传播水平存在较大的差异^[16],因此假设蚊子的叮咬率为 $\beta(x)$,即位置 x 处单位时间内一

只蚊子平均叮咬宿主的次数。那么,宿主和蚊子的感染率为

$$c\beta(x)\frac{H^*(x)-I_h}{H^*(x)}I_m, \quad b\beta(x)\frac{N^*(x)-I_m}{H^*(x)}I_h,$$

其中正常数 c 表示每次叮咬后易感的宿主被染病的蚊子传染的概率,正常数 b 表示每次叮咬后易感的蚊子被染病的宿主传染的概率。

通常情况下,蚊子的活动范围相对于宿主的活动范围较小。例如,埃及伊蚊在 24 天内的平均活动范围介于 28~199 m 之间^[17],而中华按蚊在短期内(如 3 d 天内)的活动范围主要限制在 100 m 内^[18]。因此,为了描述蚊虫的这一生理特征,假设蚊子的扩散系数为 0。此外,若宿主为人群,考虑到医疗资源等因素,城市地区染病的宿主比农村地区染病的宿主更容易获得治疗,因此假设染病宿主的恢复率依赖于空间位置 x ,即 $\rho_h(x)$ 。基于以上讨论,考虑如下的反应扩散方程模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial I_h}{\partial t} = D_h \Delta I_h + \frac{c\beta(x)}{H^*(x)}(H^*(x) - I_h)I_m - (d_h(x) + \rho_h(x))I_h, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial I_m}{\partial t} = \frac{b\beta(x)}{H^*(x)}(N^*(x) - I_m)I_h - d_m(x)I_m, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial I_h}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\beta(x)$ 和 $\rho_h(x)$ 是 $\bar{\Omega}$ 上正的 Hölder 连续函数。

令 $X := C(\bar{\Omega}, \mathbf{R}^2)$ 是具有最大模范数 $\|\cdot\|_X$ 的 Banach 空间,其正锥 $X^+ := \{\psi \in X : \psi \geq 0\}$ 。定义

$$\Gamma = \{(\psi_1, \psi_2) \in X^+ : 0 \leq \psi_1(x) \leq H^*(x), 0 \leq \psi_2(x) \leq N^*(x), \forall x \in \bar{\Omega}\}.$$

对任意的 $\phi \in C(\bar{\Omega}, \mathbf{R})$ 和 $t \geq 0$, 令 $T_1(t) : C(\bar{\Omega}, \mathbf{R}) \rightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbf{R})$ 是具有 Neumann 边界条件的算子 $D_h \Delta - (d_h(\cdot) + \rho_h(\cdot))$ 生成的 C_0 半群,即

$$(T_1(t)\phi)(\cdot) = \int_{\Omega} G(\cdot, y, t)\phi(y)dy,$$

其中 $G(\cdot, y, t)$ 是算子 $D_h \Delta - (d_h(\cdot) + \rho_h(\cdot))$ 在 Neumann 边界条件下的格林函数。根据文献[19]中的推论 7.2.3 和定理 7.3.1 可知, $T_1(t)$ 是紧的和强正的。令

$$(T_2(t)\phi)(\cdot) = e^{-d_m(\cdot)t}\phi(\cdot),$$

则 $T(t) = \text{diag}(T_1(t), T_2(t)) : X \rightarrow X$ 是一个强连续半群。

定义 $F = (F_1, F_2) : \Gamma \rightarrow X$ 为

$$\begin{aligned} F_1(\psi)(\cdot) &= \frac{c\beta(\cdot)}{H^*(\cdot)}(H^*(\cdot) - \psi_1(\cdot))\psi_2(\cdot), \\ F_2(\psi)(\cdot) &= \frac{b\beta(\cdot)}{H^*(\cdot)}(N^*(\cdot) - \psi_2(\cdot))\psi_1(\cdot), \end{aligned}$$

其中 $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in \Gamma$, 则系统(3)具有初始条件 $u_0 \in X^+$ 的解可以写成以下积分形式:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds,$$

这里 $u_0 = (I_h(\cdot, 0), I_m(\cdot, 0))$, $u(t) = (I_h(\cdot, t), I_m(\cdot, t))$ 。

类似文献[20]中引理 2.1 和引理 2.2 的证明,可以得到以下结论。

引理 1 对任意 $\psi \in \Gamma$, 系统(3)以 ψ 为初值的解 $u(\cdot, t, \psi)$ 在 $[0, \infty)$ 上全局存在,且对任意的 $t \in [0, \infty)$, 有 $u(\cdot, t, \psi) \in \Gamma$ 。

定义系统(4)的解映射 $\Psi_t : \Gamma \rightarrow \Gamma$ 为

$$\Psi_t(\psi) = u(\cdot, t, \psi), \quad \forall t \geq 0, \psi \in \Gamma.$$

引理 2 Ψ_t 是 κ -contraction 的,即存在连续函数 $k(t) \in C(\mathbf{R}^+, [0, 1))$, 使得对任意的 $t > 0$ 和有界集 $B \subset \Gamma$, 都有 $\{\Psi_s(B), 0 \leq s \leq t\}$ 是有界集,且满足

$$\kappa(\Psi_t(B)) \leq k(t)\kappa(B),$$

其中 $\kappa(\cdot)$ 是 Kuratowski 非紧性测度。

证明 依据文献[21]中引理 2.4 的证明思路,对每个 $t \geq 0$, 定义线性算子 $\mathbf{H}(t)$ 和非线性算子 $\mathbf{Y}(t)$ 为

$$\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-d_m(\cdot)t}\boldsymbol{\psi}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}(t)\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} I_h(\cdot, t, \boldsymbol{\psi}) \\ \int_0^t e^{-d_m(\cdot)(t-s)} \frac{b\beta(\cdot)(N^*(\cdot) - I_m(\cdot, s, \boldsymbol{\psi}))}{H^*(\cdot)} I_h(\cdot, s, \boldsymbol{\psi}) ds \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in X$ 。容易看出,

$$\Psi_t(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{H}(t)\boldsymbol{\psi} + \mathbf{Y}(t)\boldsymbol{\psi}, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in X, \quad t \geq 0,$$

且有 $\kappa(\mathbf{Y}(t)\boldsymbol{\psi}) = 0$ 。由于

$$\|\mathbf{H}(t)\| = \sup_{\boldsymbol{\psi} \in X, \boldsymbol{\psi} \neq 0} \frac{\|\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\psi}\|}{\|\boldsymbol{\psi}\|} \leq \sup_{\boldsymbol{\psi} \in X, \boldsymbol{\psi} \neq 0} \frac{\|e^{-d_m(\cdot)t}\| \|\boldsymbol{\psi}_2\|}{\|\boldsymbol{\psi}\|} \leq e^{-d_m t},$$

其中 $d_m = \min_{x \in \bar{\Omega}} d_m(x)$, 那么,对 X 中的任意有界集 B , 有

$$\kappa(\Psi_t(B)) \leq \kappa(\mathbf{H}(t)B) + \kappa(\mathbf{Y}(t)B) \leq \|\mathbf{H}(t)\| \kappa(B) \leq e^{-d_m t} \kappa(B), \quad \forall t > 0.$$

因此, Ψ_t 在 X 上是 κ -contraction 的。证毕。

2 基本再生数的渐近性质

将系统(3)在无病平衡点 $E_0 = (0, 0)$ 处线性化,得到如下的线性系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial I_h}{\partial t} = D_h \Delta I_h + c\beta(x)I_m - (d_h(x) + \rho_h(x))I_h, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial I_m}{\partial t} = \frac{b\beta(x)N^*(x)}{H^*(x)}I_h - d_m(x)I_m, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial I_h}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \quad (4)$$

令 $(I_h(x, t), I_m(x, t)) = e^{\lambda t}(\phi_1(x), \phi_2(x))$ 。将其代入系统(4)得到相应的特征值问题:

$$\begin{cases} \lambda\phi_1 = D_h \Delta \phi_1 + c\beta(x)\phi_2 - (d_h(x) + \rho_h(x))\phi_1, & x \in \Omega, t > 0, \\ \lambda\phi_2 = \frac{b\beta(x)N^*(x)}{H^*(x)}\phi_1 - d_m(x)\phi_2, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \quad (5)$$

令 $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ 是线性系统(4)在 X 上的解半流,则它是 X 上正的 C_0 半群,其生成元

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} D_h \Delta - (d_h(x) + \rho_h(x)) & c\beta(x) \\ \frac{b\beta(x)N^*(x)}{H^*(x)} & -d_m(x) \end{pmatrix} \circ$$

此外,利用文献[22]中的定理 3.12 可知, \mathbf{P} 是一个闭的预解正算子。令 $s(\mathbf{P})$ 是 \mathbf{P} 的谱界, $r(Q_t)$ 为 Q_t 的谱半径,根据文献[23]中的引理 3.1 可以得到如下结论。

引理 3 对任意的 $t \geq 0$, 有 $r(Q_t) = e^{s(\mathbf{P})t}$ 。

设 $\{\Phi(t)\}_{t \geq 0}$ 是如下系统的解半流:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} = D_h \Delta v_1 - (d_h(x) + \rho_h(x))v_1, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} = -d_m(x)v_2, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

容易看出, $\Phi(t)$ 是 X 上正的 C_0 半群, 且其指数增长界 $\omega(\Phi) < 0$ 。令

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} D_h \Delta - (d_h(x) + \rho_h(x)) & 0 \\ 0 & -d_m(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 & c\beta(x) \\ \frac{b\beta(x)N^*(x)}{H^*(x)} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 \mathbf{B} 是 $\Phi(t)$ 的生成元。假设初始感染个体的分布为 $\psi(x) := (\psi_1(x), \psi_2(x))$, 则 $\Phi(t)\psi(x)$ 表示初始的感染者经内部演化(如移动、死亡、转移等)后在 t 时刻的分布, 因此, t 时刻新感染个体的分布为 $\mathbf{F}(x)\Phi(t)\psi(x)$ 。所有新感染个体的分布为

$$L(\psi)(x) := \int_0^\infty \mathbf{F}(x)\Phi(t)\psi(x) dt, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

利用文献[22]中的定理 3.12 和定理 3.14 可得, \mathbf{B} 是一个预解正算子, $s(\mathbf{B}) = \omega(\Phi) < 0$, 且有

$$(\lambda - \mathbf{B})^{-1}\psi(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(t)\psi(x) dt, \quad \lambda > s(\mathbf{B}).$$

令 $\lambda = 0$, 可以得到

$$-\mathbf{B}^{-1}\psi(x) = \int_0^\infty \Phi(t)\psi(x) dt.$$

那么,

$$L(\psi)(x) := \mathbf{F}(x) \int_0^\infty \Phi(t)\psi(x) dt = -\mathbf{F}(x)\mathbf{B}^{-1}\psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

依据文献[24], 模型(3)的基本再生数 R_0 定义为算子 L 的谱半径, 即

$$R_0 := r(L) = r(-\mathbf{FB}^{-1}).$$

进一步, 定义模型(3)的局部基本再生数为

$$R_0(x) := \sqrt{\frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)(d_h(x) + \rho_h(x))H^*(x)}}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

由文献[22]中的定理 3.5 或文献[24]中的定理 3.1 可得如下结论。

引理 4 $R_0 - 1$ 和 $s(\mathbf{P})$ 有相同的符号。

下面将探讨 R_0 与扩散系数 D_h 之间的关系。首先考虑如下特征值问题:

$$\begin{cases} -D_h \Delta \phi - \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)}\phi + (d_h(x) + \rho_h(x))\phi = \lambda\phi, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (6)$$

根据 Krein-Rutman 定理(见文献[25]), 特征值问题(6)有唯一的主特征值 λ_0 , 该特征值是实数, 且对应一个正的特征函数 ϕ^* 。那么有

$$\begin{cases} -D_h \Delta \phi^* + J(x)\phi^* = \lambda_0\phi^*, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $J(x) = (d_h(x) + \rho_h(x)) - \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)}$ 。则 λ_0 可以由以下变分公式表示:

$$\lambda_0 = \inf \left\{ \int_\Omega (D_h |\nabla \varphi|^2 + J(x)\varphi^2) dx : \varphi \in W^{1,2}(\Omega), \int_\Omega \varphi^2 dx = 1 \right\}.$$

根据文献[26]可以证明 λ_0 和 ϕ^* 都是 D_h 的可微函数。下面给出 λ_0 的相关结论。

引理 5 以下结论成立。

- (i) λ_0 是 $D_h > 0$ 的严格递增函数。
- (ii) 当 $D_h \rightarrow 0$ 时, $\lambda_0 \rightarrow \min \{ J(x) : x \in \bar{\Omega} \}$ 。
- (iii) 当 $D_h \rightarrow \infty$ 时, $\lambda_0 \rightarrow \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega J(x) dx$ 。

(iv) 若 $\int_{\Omega} (d_h(x) + \rho_h(x)) dx \leq \int_{\Omega} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} dx$, 则对任意的 $D_h > 0$, 都有 $\lambda_0 < 0$ 。

(v) 若 $\int_{\Omega} (d_h(x) + \rho_h(x)) dx > \int_{\Omega} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} dx$, 且 $\min\{J(x) : x \in \bar{\Omega}\} < 0$, 则 $\lambda_0(D_h) = 0$ 有唯一的正根 D_h^* ; 当 $D_h < D_h^*$ 时, $\lambda_0 < 0$, 当 $D_h > D_h^*$ 时, $\lambda_0 > 0$ 。

证明 结论 (i) — (v) 的证明类似于文献 [27] 中引理 2.2 的论证, 故略去其证明。证毕。

基于以上讨论, 下面给出 R_0 与 D_h 之间的关系。

定理 1 以下结论成立。

(i) R_0 是 $D_h > 0$ 上的递减函数;

(ii) $\lim_{D_h \rightarrow 0} R_0 = \max_{x \in \bar{\Omega}} \left\{ \sqrt{\frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)(d_h(x) + \rho_h(x))H^*(x)}} \right\};$

(iii) $\lim_{D_h \rightarrow \infty} R_0 = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} dx}}{\sqrt{\int_{\Omega} (d_h(x) + \rho_h(x)) dx}};$

(iv) 若 $\frac{\sqrt{\int_{\Omega} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} dx}}{\sqrt{\int_{\Omega} (d_h(x) + \rho_h(x)) dx}} < 1$, 且 $\max_{x \in \bar{\Omega}} \left\{ \sqrt{\frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)(d_h(x) + \rho_h(x))H^*(x)}} \right\} > 1$, 则存在一个 $D_h^* >$

0, 使得当 $D_h < D_h^*$ 时, $R_0 > 1$, 当 $D_h > D_h^*$ 时, $R_0 < 1$;

(v) 若 $\frac{\sqrt{\int_{\Omega} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} dx}}{\sqrt{\int_{\Omega} (d_h(x) + \rho_h(x)) dx}} > 1$, 则当 $D_h > 0$ 时, $R_0 > 1$ 。

证明 (i) 考虑如下特征值问题:

$$\begin{cases} -D_h \Delta \varphi_1 + (d_h(x) + \rho_h(x)) \varphi_1 = \lambda c \beta(x) \varphi_2, & x \in \Omega, \\ d_m(x) \varphi_2 = \lambda \frac{b \beta(x) N^*(x)}{H^*(x)} \varphi_1, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega, \end{cases} \tag{8}$$

可以变形为

$$\begin{cases} -D_h \Delta \varphi_1 + (d_h(x) + \rho_h(x)) \varphi_1 = \lambda^2 \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} \varphi_1, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega. \end{cases} \tag{9}$$

由文献 [25] 中的注 1.6 可知, 特征值问题 (9) 有唯一对应正特征函数 φ_1^* 的正特征值 λ^* 。结合特征值问题 (8) 中的第二个方程, 可以得到特征值问题 (8) 有唯一的正特征值 λ^* 和一个正特征函数 $(\varphi_1^*, \varphi_2^*) =$

$\left(\varphi_1^*, \frac{b \lambda^* \beta(x) N^*(x) \varphi_1^*}{d_m(x) H^*(x)} \right)$ 。由文献 [24] 可知 $R_0 = r(-\mathbf{FB}^{-1}) = \frac{1}{\lambda^*}$, 且满足下式:

$$-D_h \Delta \varphi_1^* + (d_h(x) + \rho_h(x)) \varphi_1^* = \frac{1}{R_0^2} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} \varphi_1^*, \quad x \in \Omega, \tag{10}$$

其边界条件为 $\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \nu} = 0, x \in \partial \Omega$ 。与文献 [27] 类似, R_0 可以由以下变分公式表示:

$$R_0 = \sup_{\varphi \in H^1(\Omega), \varphi \neq 0} \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} \varphi^2 dx}{\int_{\Omega} (D_h |\nabla \varphi|^2 + (d_h(x) + \rho_h(x)) \varphi^2) dx}}, \tag{11}$$

因此, R_0 关于 D_h 递减。

(ii) 由式(10), 利用文献[28]中的引理 3.1 可证(ii)成立。

(iii) 不失一般性, 设 $\|\varphi_1^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi_2^*\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$, 对方程(10)的两端同时除以 D_h 可得

$$-\Delta \varphi_1^* + \frac{1}{D_h} \left[(d_h(x) + \rho_h(x)) \varphi_1^* - \frac{1}{R_0^2} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} \varphi_1^* \right] = 0, \quad x \in \Omega.$$

根据椭圆正则性, 当 $D_h \rightarrow \infty$ 时, 在 $C(\Omega)$ 上有 $\varphi_1^* \rightarrow \bar{\varphi}_1$, 其中 $\bar{\varphi}_1$ 是正的常数。将式(10)在 Ω 上积分可得

$$\int_{\Omega} (d_h(x) + \rho_h(x)) \varphi_1^* dx = \frac{1}{R_0^2} \int_{\Omega} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} \varphi_1^* dx.$$

因此, 当 $D_h \rightarrow \infty$ 时, 有 $R_0 = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} dx}{\int_{\Omega} (d_h(x) + \rho_h(x)) dx}}$ 。

(iv) 对式(7)、(10)进行简单的变换, 可得

$$D_h \Delta \phi^* + \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} \phi^* - (d_h(x) + \rho_h(x)) \phi^* + \lambda_0 \phi^* = 0, \quad x \in \Omega, \tag{12}$$

$$D_h \Delta \varphi_1^* - (d_h(x) + \rho_h(x)) \varphi_1^* + \frac{1}{R_0^2} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} \varphi_1^* = 0, \quad x \in \Omega, \tag{13}$$

其中 ϕ^* 和 φ_1^* 在 Ω 上都是正的函数, 且在边界 $\partial\Omega$ 上满足 $\frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \nu} = 0$ 。将式(12)和(13)分别乘以 φ_1^* 和 ϕ^* , 然后将这两个方程在 Ω 上进行分部积分并相减, 可得

$$\left(1 - \frac{1}{R_0^2}\right) \int_{\Omega} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} \phi^* \varphi_1^* dx + \lambda_0 \int_{\Omega} \phi^* \varphi_1^* dx = 0.$$

由于 $\int_{\Omega} \frac{bc\beta^2(x)N^*(x)}{d_m(x)H^*(x)} \phi^* \varphi_1^* dx$ 和 $\int_{\Omega} \phi^* \varphi_1^* dx$ 都是正的, 可得 $R_0^2 - 1$ 与 λ_0 的符号相反。所以当 $\lambda_0 > 0$ 时, $R_0 < 1$, 当 $\lambda_0 = 0$ 时, $R_0 = 1$, 当 $\lambda_0 < 0$ 时, $R_0 > 1$ 。最后, 结合引理 5 可以得到结论(iv)与结论(v)。证毕。

3 全局阈值动力学

本章将利用持续性理论证明模型(3)的全局阈值动力学。首先给出以下定义。

定义 1^[15] 令 M 是一个完备度量空间, $f: M \rightarrow M$ 是一个连续映射。如果对于满足 $f(B) \subset B, B \subset M$ 的任意非空闭有界集 B , 存在一个紧集 $J \subset B$ 使得 J 吸引 B , 那么称 f 是渐近光滑的。

引理 6 对任意的 $t > 0, \Psi_t$ 在 Γ 上是严格次齐性的。

证明 对任意给定的 $\phi \in \Gamma, \phi \geq 0$ 且 $\lambda \in (0, 1)$, 令 $u(x, t, \phi)$ 和 $u(x, t, \lambda\phi)$ 分别是系统(3)在初始条件 $u(x, 0, \phi) = \phi(x), x \in \bar{\Omega}$ 和 $u(x, 0, \lambda\phi) = \lambda\phi(x), x \in \bar{\Omega}$ 下的解。容易验证 $\lambda u(x, t, \phi)$ 是系统(3)满足初始条件 $u(x, 0, \lambda\phi) = \lambda\phi(x)$ 的一个下解。从而 $\lambda u(x, t, \phi) \leq u(x, t, \lambda\phi), \forall x \in \bar{\Omega}, t \geq 0$ 。因此, Ψ_t 是次齐性的。

下面证明 $y(x, t) := u(x, t, \lambda\phi) - \lambda u(x, t, \phi) > 0, \forall x \in \bar{\Omega}, t > 0$ 成立。令

$$f(x, u_1, u_2) = \frac{c\beta(x)}{H^*(x)} (H^*(x) - u_1) u_2, \quad y_1(x, t) = u_1(x, t, \lambda\phi) - \lambda u_1(x, t, \phi),$$

$$h(x, t) = f(x, \lambda u_1(x, t, \phi), \lambda u_2(x, t, \phi)) - \lambda f(x, u_1(x, t, \phi), u_2(x, t, \phi)).$$

注意到

$$\begin{aligned}
& f(x, u_1(x, t, \lambda\phi), u_2(x, t, \lambda\phi)) - \lambda f(x, u_1(x, t, \phi), u_2(x, t, \phi)) \\
= & f(x, u_1(x, t, \lambda\phi), u_2(x, t, \lambda\phi)) - f(x, \lambda u_1(x, t, \phi), \lambda u_2(x, t, \phi)) + h(x, t) \\
= & \frac{c\beta(x)}{H^*(x)} [(H^*(x) - u_1(x, t, \lambda\phi)) u_2(x, t, \lambda\phi) - \lambda(H^*(x) - \lambda u_1(x, t, \phi)) u_2(x, t, \phi)] + h(x, t) \\
\geq & \frac{-c\beta(x)}{H^*(x)} y_1(x, t) u_2(x, t, \lambda\phi) + h(x, t),
\end{aligned}$$

因此 $y_1(x, t)$ 满足

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_1(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial u_1(x, t, \lambda\phi)}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1(x, t, \phi)}{\partial t} \\
&= D_h \Delta y_1(x, t) - (d_h(x) + \rho_h(x)) y_1(x, t) + f(x, u_1(x, t, \lambda\phi), u_2(x, t, \lambda\phi)) \\
&\quad - \lambda f(x, u_1(x, t, \phi), u_2(x, t, \phi)) \\
&\geq D_h \Delta y_1(x, t) - (d_h(x) + \rho_h(x)) y_1(x, t) + h(x, t) - \frac{c\beta(x)}{H^*(x)} y_1(x, t) u_2(x, t, \lambda\phi) \\
&\geq D_h \Delta y_1(x, t) - \left[d_h(x) + \rho_h(x) + \frac{c\beta(x) N^*(x)}{H^*(x)} \right] y_1(x, t) + h(x, t) \\
&\geq D_h \Delta y_1(x, t) - M y_1(x, t) + h(x, t),
\end{aligned}$$

其中 $M = \max_{x \in \bar{\Omega}} \left[d_h(x) + \rho_h(x) + \frac{c\beta(x) N^*(x)}{H^*(x)} \right]$ 。显然, $y_1(x, t)$ 是如下系统的上解:

$$\begin{cases} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = D_h \Delta w(x, t) - M w(x, t) + h(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial w(x, t)}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ w(x, 0) = \varphi \geq 0, \neq 0, & x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{14}$$

设 $V(t)$ 是由以下系统生成的线性半群:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = D_h \Delta v(x, t) - M v(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

则系统(14)的解 $w(x, t, \varphi)$ 的积分形式可表示为

$$w(x, t, \varphi) = (V(t)\varphi)(x) + \int_0^t V(t-s)h(\cdot, s)(x) ds, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, t \geq 0.$$

由于 $f(x, u_1, u_2)$ 关于变量 (u_1, u_2) 是严格次齐性的, 因此可以得到 $h(x, t) > 0$ 。那么, 利用 $V(t)$ 的强正性可知, 系统(14)的解 $w(x, t, \varphi) > 0, \forall x \in \bar{\Omega}, t \geq 0$ 。进一步, 利用比较原理可得 $y_1(x, t) > 0, \forall x \in \bar{\Omega}, t \geq 0$ 。这表明, 对任意的 $t > 0, \Psi_t$ 在 Γ 上是严格次齐性的。证毕。

下面给出模型(3)的全局阈值动力学结果。

定理 2 (i) 如果 $R_0 \leq 1$, 那么系统(3)的无病平衡点 E_0 在 Γ 中全局渐近稳定。

(ii) 如果 $R_0 > 1$, 那么系统(3)有唯一的正稳态解 $E^*(\cdot) = (I_h^*(\cdot), I_m^*(\cdot))$, 且它在 $\Gamma \setminus \{(0, 0)\}$ 中是全局渐近稳定的。

证明 情形(i)中 $R_0 < 1$ 和情形(ii)的证明类似文献[23]和[29]中的证明过程, 这里仅给出 $R_0 = 1$ 的证明。

根据引理 1, Ψ_t 在 Γ 中的每个正向轨是有界的。又由引理 2 知, Ψ_t 是渐近光滑的。根据引理 6 和文献[30]中的引理 4 可知, Ψ_1 在 Γ 上是严格次齐性和强单调的。容易发现, $\Psi_1(0) = 0$, 且 $D\Psi_1(0) = Q_1$, 其中 D 为 Fréchet 导数。由引理 2 的证明可知, 对 X 中的任意有界集 Z , 有

$$\kappa(Q_t Z) \leq e^{-d_m t} \kappa(Z), \quad \forall t > 0,$$

所以 Q_t 在 X 上是 κ -contraction 的, 从而它是渐近光滑的。由 $R_0 = 1$ 和引理 4 可知, $s(P) = 0$ 。结合引理 3 可得

$$r_e(Q_t) \leq e^{-d_m t} < 1 = e^{s(P)t} = r(Q_t), \quad \forall t > 0,$$

其中 $r_e(Q_t)$ 表示算子 Q_t 的本质谱半径。那么,利用文献[31]中的广义 Krein-Rutman 定理可知, $s(P)$ 是系统(5)的主特征值。进而, $r(D\Psi_1(0))$ 是 $D\Psi_1(0)$ 的一个正的特征值,且 $r(Q_t) = e^{s(P)t} = 1$ 。根据文献[15]中的定理 2.3.4(a) 和注 2.1.4 可知, Ψ_1 在 Γ 中的每个正向轨都收敛到 E_0 。进一步,利用文献[15]中的引理 2.2.1 可知 E_0 在 Γ 中全局渐近稳定。证毕。

注 1 对于本文提到的 2 种出生率函数,定理 2 都是成立的。

4 数值模拟

假设空间是一维的,并选取 $\Omega = (0, \pi)$ (单位为 km)。以天为时间单位,根据文献[5-6]选取模型参数为

$$H^*(x) = 100(1.1 - 0.5 \cos(2x)), \quad N^*(x) = 200(1.1 + 0.5 \cos(2x)),$$

$$\rho_h(x) = 0.1, \quad d_h(x) = 1/(365 \times 70), \quad d_m(x) = 0.1, \quad b = 0.7, \quad c = 0.5.$$

首先,令 $\beta(x) = 0.05(1.1 + 0.5 \cos(2x))$, $D_h = 0.1$ 。根据文献[32]中的引理 2.5 和注 3.2,计算基本再生数 $R_0 = 0.6377$ 。在这种情况下疾病将会消失,如图 1 所示。其次,令 $\beta(x) = 0.1(1.1 + 0.5 \cos(2x))$, $D_h = 0.1$ 。此时 $R_0 = 1.2755$,疾病将会持续,如图 2 所示。这与定理 2 的理论结果相吻合。

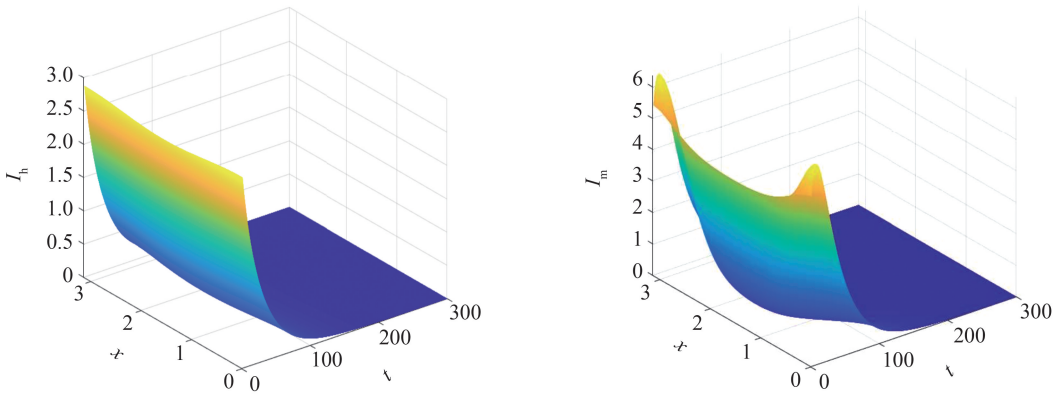


图 1 $R_0 < 1$ 时,模型(3)解的演化
Fig.1 Evolution of solutions of model (3), when $R_0 < 1$

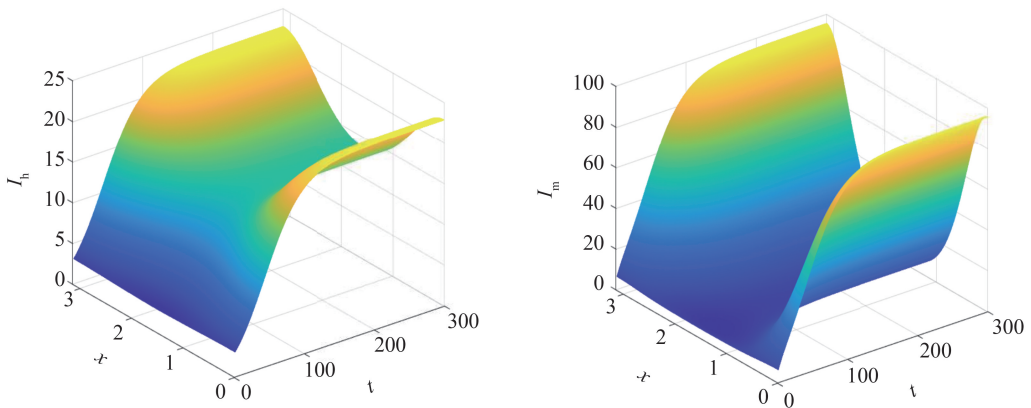


图 2 $R_0 > 1$ 时,模型(3)解的演化
Fig.2 Evolution of solutions of model (3), when $R_0 > 1$

最后探讨空间异质性对 R_0 的影响。令 $D_h = 0.1$, $H^*(x) = 110$, $N^*(x) = 220$, $\beta(x) = 0.1(1.1 + \delta \cos(2x))$, 其中 $\delta \in [0, 1]$ 表示空间异质性的程度^[33]。根据图 3 可知, R_0 是 δ 的单调递增函数,这说明叮咬率的空间异质性可能会增加疾病传播的风险。此外,当 $\delta = 0.2$ 时, $R_0 < 1$; 当 $\delta = 0.8$ 时, $R_0 > 1$, 这说明叮咬率的空间异质性可能会诱发地方病。

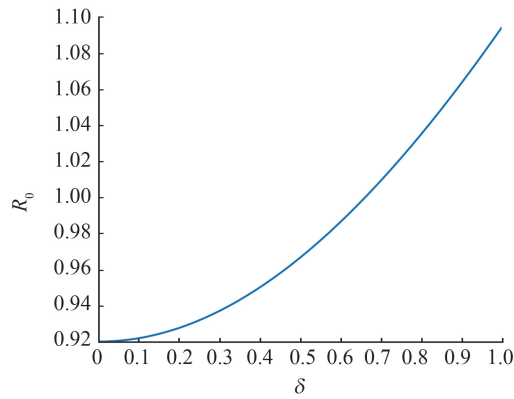


图3 δ 对 R_0 的影响
Fig.3 Effect of δ on R_0

5 总结和展望

本文考虑空间异质性与种群扩散对蚊媒疾病传播的影响,并基于蚊子活动范围有限这一事实,建立一个具有不同扩散速率的反应扩散蚊媒疾病模型。本文定义模型(3)的基本再生数 R_0 与局部基本再生数 $R_0(x)$,利用文献[15]中的定理2.3.4证明模型(3)的阈值动力学。由于定理2.3.4中的紧性条件仅用于确保主特征值的存在性,因此,如果可以利用其他方法证明主特征值的存在性,那么便不需要定理2.3.4中的紧性条件。本文利用广义的 Krein-Rutman 定理证明主特征值的存在性,进而给出了模型(3)的全局动力学结果。研究发现,当 $R_0 \leq 1$ 时,无病平衡点是全局渐近稳定的,疾病最终消失;当 $R_0 > 1$ 时,模型有唯一全局渐近稳定的正稳态解,疾病将持续存在。此外,本文研究 R_0 与宿主的扩散系数 D_h 之间的关系,研究结果表明,随着 D_h 变大, R_0 会随之变小,且当 D_h 趋于 0 时, R_0 趋于 $R_0(x)$ 的最大值。最后,数值模拟验证理论结果,并表明叮咬率的空间异质性可能会增加疾病传播的风险。

除了空间异质性与种群扩散,对流(水流、风等外部环境驱使宿主和媒介向某个特定方向移动)也是影响蚊媒疾病的一个重要因素^[34]。因此,在后续的研究中可以考虑对流因素对疾病传播的影响。

参考文献:

- [1] PATES H, CURTIS C. Mosquito behavior and vector control[J]. Annual Review of Entomology, 2005, 50(1):53-70.
- [2] SHRAGAI T, TESLA B, MURDOCK C, et al. Zika and chikungunya: mosquito-borne viruses in a changing world[J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 2017, 1399(1):61-77.
- [3] 王玮明,蔡永丽. 生物数学模型斑图动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2020:193-194.
WANG Weiming, CAI Yongli. Pattern dynamics in biological mathematical models[M]. Beijing: Science Press, 2020:193-194.
- [4] WANG Wendi, ZHAO Xiaoqiang. A nonlocal and time-delayed reaction-diffusion model of dengue transmission[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2011, 71(1):147-168.
- [5] ZHA Yijie, JIANG Weihua. Global dynamics and asymptotic profiles for a degenerate Dengue fever model in heterogeneous environment[J]. Journal of Differential Equations, 2023, 348(1):278-319.
- [6] LOU Yijun, ZHAO Xiaoqiang. A reaction-diffusion malaria model with incubation period in the vector population[J]. Journal of Mathematical Biology, 2011, 62(4):543-568.
- [7] WANG Jinliang, WU Wenjing, LI Chunyang. Dynamical analysis of a reaction-diffusion mosquito-borne model in a spatially heterogeneous environment[J]. Advances in Nonlinear Analysis, 2023, 12(1):20220295.
- [8] ZHAO Hongyong, WANG Kai, WANG Hao. Basic reproduction ratio of a mosquito-borne disease in heterogeneous environment[J]. Journal of Mathematical Biology, 2023, 86(3):32.
- [9] SHI Yangyang, ZHAO Hongyong. Analysis of a two-strain malaria transmission model with spatial heterogeneity and vector-bias[J]. Journal of Mathematical Biology, 2021, 82(4):1-44.
- [10] GAO D Z, VAN DEN DRIESSCHE P, COSNER C. Habitat fragmentation promotes malaria persistence[J]. Journal of Mathematical Biology, 2019, 79(6):2255-2280.
- [11] BAI Zhenguo, PENG Rui, ZHAO Xiaoqiang. A reaction-diffusion malaria model with seasonality and incubation period[J]. Journal of Mathematical Biology, 2018, 77(1):201-228.
- [12] SHAO Minna, ZHAO Hongyong. Dynamics and optimal control of a stochastic Zika virus model with spatial diffusion[J].

- Mathematical Biosciences and Engineering, 2023, 20(9):17520-17553.
- [13] MIDEGA J T, MBOGO C M, MWAMBI H, et al. Estimating dispersal and survival of *Anopheles gambiae* and *Anopheles funestus* along the Kenyan coast by using mark-release-recapture methods[J]. *Journal of Medical Entomology*, 2007, 44(6): 923-929.
- [14] 齐亚强,李琳. 中国预期寿命变动的地区差异及其社会经济影响因素:1981—2010[J]. *中国卫生政策研究*, 2018, 11(8):29-35.
QI Yaqiang, LI Lin. Regional differences in changes in life expectancy in China and its socioeconomic influencing factors: 1981—2010[J]. *Chinese Journal of Health Policy*, 2018, 11(8):29-35.
- [15] ZHAO Xiaoqiang. *Dynamical systems in population biology*[M]. 2nd ed. Cham: Springer, 2017:1-87.
- [16] ROBERT V, MACINTYRE K, KEATING J, et al. Malaria transmission in urban sub-Saharan Africa[J]. *The American Journal of Tropical Medicine and Hygiene*, 2003, 68(2):169-176.
- [17] HARRINGTON L C, SCOTT T W, LERDTHUSNEE K, et al. Dispersal of the dengue vector *Aedes aegypti* within and between rural communities[J]. *The American Journal of Tropical Medicine and Hygiene*, 2005, 72(2):209-220.
- [18] 刘起勇,刘小波,周广超,等. 基于标记-释放-重捕技术的中华按蚊飞行距离初步研究[J]. *中国媒介生物学及控制杂志*, 2011, 22(3):201-204.
LIU Qiyong, LIU Xiaobo, ZHOU Guangchao, et al. Primary study on the flight range of *Anopheles sinensis* based on the mark-release-recapture method in Yongcheng city, Henan province[J]. *Chinese Journal of Vector Biology and Control*, 2011, 22(3):201-204.
- [19] SMITH, H L. *Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems*[M]. Providence: American Mathematical Society, 1995:120-134.
- [20] WANG Jinliang, WU Wenjing, KUNYAB T. Analysis of a degenerated reaction-diffusion cholera model with spatial heterogeneity and stabilized total humans[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2022, 198(4):151-171.
- [21] WANG Jinliang, WU Xiaoqing. Dynamics and profiles of a diffusive cholera model with bacterial hyperinfectivity and distinct dispersal rates[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2023, 35(2):1205-1241.
- [22] THIEME H R. Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2009, 70(1):188-211.
- [23] PANG Danfeng, XIAO Yanni, ZHAO Xiaoqiang. A cross-infection model with diffusive environmental bacteria[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 2022, 505(2):125637.
- [24] WANG Wendi, ZHAO Xiaoqiang. Basic reproduction numbers for reaction-diffusion epidemic models[J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2012, 11(4):1652-1673.
- [25] DU Yihong. *Order structure and topological methods in nonlinear partial differential equations*[M]// *Maximum principles and applications*, Singapore: World Scientific, 2006:1-8.
- [26] CANTRELL R S, COSNER C. *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*[M]. Chichester, England: John Wiley & Sons, 2004.
- [27] ALLEN L J S, BOLKER B M, LOU Yuan, et al. Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic reaction-diffusion model[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2008, 21(1):1-20.
- [28] LOU Yuan, NAGYLAKI T. Evolution of a semilinear parabolic system for migration and selection without dominance[J]. *Journal of Differential Equations*, 2006, 225(2):624-665.
- [29] 何杰,褚慧洁. 一个部分退化反应扩散霍乱模型的阈值动力学[J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2023, 61(4):831-839.
HE Jie, CHU Huijie. Threshold dynamics of a partially degenerate reaction-diffusion cholera model[J]. *Journal of Jilin University(Science Edition)*, 2023, 61(4):831-839.
- [30] LI Fuxiang, ZHAO Xiaoqiang. Global dynamics of a reaction-diffusion model of Zika virus transmission with seasonality[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2021, 83(5):43.
- [31] NUSSBAUM R D. *Eigenvectors of nonlinear positive operators and the linear KreinRutman theorem*[M]// *Fixed Point Theory*. Berlin: Springer, 1981:309-330.
- [32] LIANG Xing, ZHANG Lei, ZHAO Xiaoqiang. Basic reproduction ratios for periodic abstract functional differential equations (with application to a spatial model for Lyme disease)[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2019, 31(3): 1247-1278.
- [33] WANG Wendi, ZHAO Xiaoqiang. Spatial invasion threshold of Lyme disease[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2015, 75(3):1142-1170.
- [34] WANG Kai, WANG Hao, ZHAO Hongyong. Aggregation and classification of spatial dynamics of vector-borne disease in advective heterogeneous environment[J]. *Journal of Differential Equations*, 2023, 343(6):285-331.