文章编号:1671-9352(2025)05-0107-09 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.291

分布式串行模糊关系和模糊知识结构的网格化

张纪平[1,2],吴伟志[3*],周缪娟[4],李进金[1,4]

(1.泉州师范学院数学与计算机科学学院, 福建 泉州 362000; 2.福建省大数据管理新技术与知识工程重点实验室(泉州师范学院), 福建 泉州 362000; 3.浙江海洋大学信息工程学院, 浙江 舟山 316022; 4.闽南师范大学数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘要:为了形式化模糊知识空间和模糊闭包空间的网格化,引入分布式串行模糊关系的概念,定义模糊近似空间族并的概念并给出一些基本性质,提出模糊知识空间族、模糊闭包空间族可网格化条件,得到扩展分布式技能函数和知识结构网格化的结果。

关键词:模糊知识结构;模糊知识空间;模糊闭包空间;分布式串行模糊关系;知识评估

中图分类号:TP182 **文献标志码**:A

引用格式:张纪平,吴伟志,周缪娟,等.分布式串行模糊关系和模糊知识结构的网格化[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):107-115.

Distributed serial fuzzy relations and the meshing of fuzzy knowledge structures

ZHANG Jiping[1,2], WU Weizhi[3*], ZHOU Miaojuan[4], LI Jinjin[1,4]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, Fujian, China; 2. Key Laboratory of New Technologies and Knowledge Engineering for Big Data Management in Fujian Province (Quanzhou Normal University), Quanzhou 362000, Fujian, China; 3. School of Information Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316022, Zhejiang, China; 4. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, Fujian, China)

Abstract: For formalized fuzzy knowledge space and fuzzy closure space mesh, the concept of distributed serial fuzzy relationship is introduced. The union of a fuzzy approximate space family in which some basic properties given. Conditions for the meshability of a family of fuzzy knowledge spaces are presented. The meshability of a distributed skills function and knowledge structure are obtained.

Key words: fuzzy knowledge structures; fuzzy knowledge spaces; fuzzy closure spaces; distributed serial fuzzy relations; knowledge assessment

0 引言

知识空间理论[1](knowledge space theory, KST)是 Doignon 和 Falmagne 表示某知识领域内的一个集合理论框架,用于评估学习者的知识状态。KST 已应用于辅助学习和自适应测试等领域[2-7],基于 KST 开发了计算机教育系统,例如,人类自动化教学(rapid automated teaching of humans, RATH)和知识学习的自适应学习环境(adaptive learning environment for knowledge study, ALEKS)[8-10]。对于每个个体的技能(子集),可以解决的问题集都是确定的。问题子集构成了一种可能的知识状态,所有的知识状态形成了 Doignon 和 Falmagne 的知识结构[1,11]。知识结构是知识空间理论的重要概念之一,它为建立特定领域或学科的知识之间的关系并评估学习者掌握的知识提供了依据。Doignon 等[12]基于问题与技能的关系,提出由技能映射构建知识结构的方法。Sun 等[13]考虑不同问题对技能熟练程度的不同要求,提出模糊技能映射,并给出模糊

收稿日期:2024-08-22; **网络出版时间**:2025-03-26 10:41:38

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371466,12271191,11871259)

第一作者:张纪平(1971—),男,副教授,硕士,研究方向为基础数学、模糊集理论及其应用等. E-mail:zhangmat@qq.com

* **通信作者**:吴伟志(1964—),教授,博士生导师,博士,研究方向为粗糙集与概念格、知识空间理论、近似推理等研究. E-mail:wuwz@zjou.edu.cn

技能映射下构建知识结构的方法。

粗糙集理论[14]（rough set theory, RST）是一种处理不确定性问题的数学方法，能够处理不精确、不一致以及不完整的信息与知识，现广泛应用于机器学习、模式识别、数据挖掘等领域[15-18]。受粗糙集理论的启发，王国胤等[17]使用粗糙集的方法构建了知识结构。Dubois 等[19]结合模糊集和粗糙集，将 Pawlak 粗糙集推广到模糊粗糙集。杨海龙[20]提出双论域上的粗糙集模型的变换，包括双论域上的分明粗糙集模型的变换、双论域上的模糊粗糙集模型的变换等。基于双论域上的模糊粗糙集模型，文献[21-22]中提出模糊知识状态的概念。一个模糊知识状态表示个体对知识领域中每个问题的响应值。知识领域中可能的模糊知识状态集构成了一个模糊知识结构，推广了 Doignon 和 Falmagne 的知识状态与知识结构[1,11]。在（部分）重叠的领域和技能集上聚合分布式信息是知识空间理论关注的问题，Heller 等[23]提出分布式技能函数概念，证实生成知识结构的网格化能够描述分布式技能函数的一致性。

本文引入模糊知识空间与模糊闭包空间，在（部分）重叠的知识领域和技能集上聚合分布式信息，给出分布式串行模糊关系中信息的聚合一致性与网格化操作结果，讨论这些结果的影响及相关性。

1 预备知识

假设集合 Q 和 S 是非空有限的，集合 Q 称为知识领域，即问题集或项目集，而集合 S 收集了认为与解决 Q 中的问题相关的技能。

定义 1[24] 设 A 是非空有限集合 Q 到 $[0,1]$ 的一个映射，即 $A:Q\to[0,1]$，$q\to A(q)$，称 A 是 Q 上的模糊集，$A(q)$ 表示 q 属于模糊集 A 的隶属度。

记 $\mathscr{F}(Q)=\{A\mid A:Q\to[0,1]\}$ 为 Q 上的所有模糊子集构成的集族，即 Q 的模糊幂集，非空有限集合 Q 到 $[0,1]$ 的一个映射 $A:Q\to[0,1]$ 表示为 $A=\left\{\dfrac{A(q)}{q}\mid q\in Q\right\}$。

$\mathscr{F}(Q)$ 乘运算法则如下：对于 $A\in\mathscr{F}(Q)$，$\lambda\in[0,1]$，记 $\lambda A=\left\{\dfrac{\lambda\cdot A(q)}{q}\mid q\in Q\right\}$，则 $\lambda A\in\mathscr{F}(Q)$。

对于 $A,B\in\mathscr{F}(Q)$，$\mathscr{F}(Q)$ 上的相等、并、交、补运算法则定义为

（1）$A=B\Leftrightarrow A(q)=B(q)$，$\forall q\in Q$；

（2）$(A\cup B)(q)=A(q)\vee B(q)=\max\{A(q),B(q)\}$，$\forall q\in Q$；

（3）$(A\cap B)(q)=A(q)\wedge B(q)=\min\{A(q),B(q)\}$，$\forall q\in Q$；

（4）$\sim A(q)=1-A(q)$，$\forall q\in Q$。

定义 2[25] 设 Q、S 是非空论域，称模糊子集 $R\in\mathscr{F}(Q\times S)$ 是从 Q 到 S 上的一个模糊二元关系（以后简称模糊关系），$R(q,s)$ 表示对象 q 与 s 之间有关系 R，其中 $(q,s)\in Q\times S$，若 $\forall q\in Q$，$\bigvee_{s\in S}R(q,s)=1$，称 R 是从 Q 到 S 的串行模糊关系。

定义 3[21] 设 Q 是非空有限问题域，映射 $K:Q\to[0,1]$ 为模糊知识状态，对于 $q\in Q$，$K(q)$ 表示解决问题 q 的程度或关于问题 q 的响应值，$K(q)=0$，则问题 q 没有被解决或没有被反应；$K(q)=1$，则问题 q 已完全被解决或完全被响应。对于任意 $q\in U$，$K(q)=0$，称 $K:Q\to[0,1]$ 是 0 值映射，记为空集 $\varnothing$；对于任意 $q\in Q$，$K(q)=1$，记为全集 Q。设 $\mathscr{K}$ 是模糊知识状态构成的集族，如 $\mathscr{K}$ 包含空集 $\varnothing$ 和全集 Q，则称 $(Q,\mathscr{K})$ 是模糊知识结构；若 $\mathscr{K}$ 是模糊知识结构且满足并运算封闭，则称 $\mathscr{K}$ 是模糊知识空间；若 $\mathscr{K}$ 是模糊知识结构且满足交运算封闭，则称 $\mathscr{K}$ 是模糊闭包空间；若 $\mathscr{K}$ 是模糊知识结构并且满足交运算和并运算封闭，则称 $\mathscr{K}$ 是模糊拟序空间。

注 1 一个模糊知识状态表示个体对知识领域中每个问题的响应值，而给知识领域中可能的知识状态集构成了一个知识结构。

定义 4 设 Q 是非空有限问题域，S 是非空有限技能域，R 是从 Q 到 S 的一个模糊关系，即 $R:Q\times S\to[0,1]$，(Q,S,R) 称为一个模糊近似空间。

对于一个模糊近似空间 (Q,S,R)，$A\in\mathscr{F}(S)$，A 关于模糊近似空间 (Q,S,R) 的模糊粗糙下近似 $\underline{R}(A)$

和模糊粗糙上近似 $\bar{R}(A)$ 分别定义为

$$\underline{R}(A)(q)=\bigwedge_{s\in S}((1-R(q,s))\vee A(s)),\quad \forall q\in Q;$$

$$\bar{R}(A)(q)=\bigvee_{s\in S}(R(q,s)\wedge A(s)),\quad \forall q\in Q。$$

称 $\underline{K}=\underline{R}(A)$ 为 A 的下近似模糊知识状态;称 $\underline{\mathscr{K}}=\{\underline{R}(A)\mid A\in\mathscr{F}(S)\}$ 为下近似模糊知识状态集族;称 $\bar{K}=\bar{R}(A)$ 为 A 的上近似模糊知识状态;称 $\bar{\mathscr{K}}=\{\bar{R}(A)\mid A\in\mathscr{F}(S)\}$ 为上近似模糊知识状态集族。

命题 1[25]　设 R 是从 Q 到 S 上的模糊关系,$\forall A,B\in\mathscr{F}(S)$, $\forall A_j\in\mathscr{F}(S)$, $\forall j\in J$, J 是任意指标集, $\forall M\in\mathscr{P}(S)$, $\forall(q,s)\in Q\times S$, $\forall\alpha\in[0,1]$,由定义 4 给出的模糊粗糙近似算子 $\bar{R}$ 与 $\underline{R}$ 满足下列性质:

(1) $\underline{R}(A)=\sim\bar{R}(\sim A)$;　(2) $\bar{R}(A)=\sim\underline{R}(\sim A)$;　(3) $\underline{R}(A\cup\hat{\alpha})=\underline{R}(A)\cup\hat{\alpha}$;

(4) $\bar{R}(A\cap\hat{\alpha})=\bar{R}(A)\cap\hat{\alpha}$;　(5) $\underline{R}(\bigcap_{j\in J}A_j)=\bigcap_{j\in J}\underline{R}(A_j)$;　(6) $\bar{R}(\bigcup_{j\in J}A_j)=\bigcup_{j\in J}\bar{R}(A_j)$;

(7) 若 $A\subseteq B$,则 $\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(B)$;　(8) 若 $A\subseteq B$,则 $\bar{R}(A)\subseteq\bar{R}(B)$;　(9) $\underline{R}(\bigcup_{j\in J}A_j)\supseteq\bigcup_{j\in J}\underline{R}(A_j)$;

(10) $\bar{R}(\bigcap_{j\in J}A_j)\subseteq\bigcap_{j\in J}\bar{R}(A_j)$;　(11) $\bar{R}(1_s)(q)=R(q,s)$;　(12) $\underline{R}(1_{S-\{s\}})(q)=1-R(q,s)$;

(13) $\bar{R}(1_M)(q)=\sup\{R(q,s)\mid s\in M\}$;(14) $\underline{R}(1_M)(q)=\inf\{1-R(q,s)\mid s\notin M\}$。

注 2　$\hat{\alpha}$ 为隶属度恒取 α 的常数模糊集,1_s 表示单点集 $\{s\}$ 的特征函数,$1_{S-\{s\}}$ 表示集合 $S-\{s\}$ 的特征函数。

2　分布式串行模糊关系

命题 2　设 R 是从 Q 到 S 上的模糊关系,则 R 是串行的当且仅当上近似模糊知识状态集族 $\bar{\mathscr{K}}$ 与下近似模糊知识状态集族 $\underline{\mathscr{K}}$ 都是模糊知识结构。

证明　充分性。$\underline{\mathscr{K}}$ 是模糊知识结构,$\varnothing\in\underline{\mathscr{K}}$,则 $\exists A\in\mathscr{F}(S)$,对 $\forall q\in Q$,有 $\underline{R}(A)(q)=\varnothing(q)=0$,由于 $\underline{R}(A)(q)=\bigwedge_{s\in S}((1-R(q,s))\vee A(s))$, $\exists s'\in S$, $(1-R(q,s'))\vee A(s')=0$, $R(q,s')=1$,因此 R 是从 Q 到 S 的一个串行模糊关系。

必要性。R 是从 Q 到 S 的一个串行模糊关系,即对 $\forall q\in Q$, $\exists s'\in S$,使得 $R(q,s')=1$,从而对 $\forall q\in Q$,有 $\underline{R}(\varnothing)(q)=0$, $\bar{R}(S)(q)=1$。$\forall q\in Q$, $\underline{R}(S)(q)=1$, $\bar{R}(\varnothing)(q)=0$,因此,$\underline{\mathscr{K}}$ 与 $\bar{\mathscr{K}}$ 都包含 $\varnothing$ 和 Q, $\underline{\mathscr{K}}$ 与 $\bar{\mathscr{K}}$ 都是模糊知识结构。

由命题 2 与命题 1 的(5)、(6)可得命题 3、4。

命题 3　设 (Q,S,R) 是模糊近似空间,则 R 是从 Q 到 S 的一个串行模糊关系当且仅当 $\underline{\mathscr{K}}$ 是模糊闭包空间。

命题 4　设 (Q,S,R) 是模糊近似空间,则 R 是从 Q 到 S 的一个串行模糊关系当且仅当 $\bar{\mathscr{K}}$ 是模糊知识空间。

设 $K\in\mathscr{F}(Q)$, $Q'\subset Q$,记 $K|_{Q'}(q)=\begin{cases}K(q), & q\in Q'\\ 0, & q\in Q-Q'\end{cases}$,则 $K|_{Q'}\in\mathscr{F}(Q')$。

定义 5　设 (Q,S,R) 是模糊近似空间,$\mathscr{K}$ 由某些从 Q 到 S 模糊知识状态构成的集族,$\varnothing\neq Q'\subset Q$,称 $\mathscr{K}|_{Q'}=\{K|_{Q'}\mid K\in\mathscr{K}\}$ 为 $\mathscr{K}$ 在 Q' 上的投影或迹,$\mathscr{K}|_{Q'}$ 为 $\mathscr{K}$ 的子结构,$\mathscr{K}$ 为 $\mathscr{K}|_{Q'}$ 的父结构。

定义 6　设 (Q,S,R) 和 (Q_i,S_i,R_i) 是模糊近似空间, $i\in I$, I 是指标集, $\bar{\mathscr{K}}$ 与 $\bar{\mathscr{K}}_i$ 分别是 (Q,S,R) 与 $(Q_i,S_i,R_i)(i\in I)$ 的上近似模糊知识空间族,若满足条件:(1) $Q=\bigcup_{i\in I}Q_i$;(2) 对所有 $i\in I$, $\bar{\mathscr{K}}_i=\bar{\mathscr{K}}|_{Q_i}$,称模糊近似空间 (Q,S,R) 是这个模糊知识空间族 $\{(Q_i,\bar{R}_i)\mid i\in I\}$ 的网格。另外,称这个模糊知识空间族 $\{(Q_i,\bar{R}_i)\mid i\in I\}$ 是可以被网格化的。

定义 7　设 (Q,S,R) 和 (Q_i,S_i,R_i)($i\in I$, I 是指标集)是模糊近似空间,$\underline{\mathscr{K}}$ 与 $\underline{\mathscr{K}}_i$ 分别是 (Q,S,R) 与 $(Q_i,S_i,R_i)(i\in I)$ 的下近似模糊知识空间族,若满足条件:(1) $Q=\bigcup_{i\in I}Q_i$;(2) 对所有 $i\in I$, $\underline{\mathscr{K}}_i=\underline{\mathscr{K}}|_{Q_i}$,则称模糊近似空间 (Q,S,R) 是这个模糊闭包空间族 $\{(Q_i,\underline{R}_i)\mid i\in I\}$ 的网格。另外,称这个模糊闭包空间族

$\{(Q_i,\underline{R}_i)\mid i\in I\}$是可以被网格化的。

对于一族模糊近似空间$(Q_i,S_i,R_i)(i\in I,\ I$是一个有限或无限指标集$)$,一般情况下,知识领域 Q_i 以及技能集 S_i 可能重叠或部分重叠。

定义 8 给定一族模糊近似空间(Q_i,S_i,R_i),它们的(Q,S,R)并定义为:(1) $Q=\bigcup_{i\in I}Q_i$;(2) $S=\bigcup_{i\in I}S_i$;(3) 对于任意 $q\in Q$ 和 $s\in S$,令 $R(q,s)=\bigcup_{i\in I}R_i^*(q,s)$,若 $q\in Q_i,\ s\in S_i$,令 $R_i^*(q,s)=R_i(q,s)$,否则 $R_i^*(q,s)=0$。

若每个 R_i 都是串行的,则 R 是从 Q 到 S 的一个串行模糊关系,因此,若$(Q_i,R_i)(i\in I)$都是模糊知识(闭包)空间,(Q,R)也是模糊知识(闭包)空间。

每个(Q_i,S_i,R_i)的局部层面信息与(Q,S,R)描述的全局层面信息之间的关系中:(1) 哪些条件可确保全局信息代表本地信息的一致聚合?(2) 在多大程度上可以从全局信息源中取回本地的信息?对上述问题须要进一步诠释。

例 1 设(Q_1,S_1,R_1)与(Q_2,S_2,R_2)是模糊近似空间,其中 $Q_1=\{q_1,q_2,q_3\}$,$S_1=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$,$Q_2=\{q_1,q_2,q_4\}$,$S_2=\{s_1,s_2,s_5,s_6\}$,R_1,R_2 如表 1 和表 2 所示。$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$,$S=\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6\}$,$R$ 如表 3 所示。

表 1 例 1 中的二元关系 R_1
Table 1 The binary relationship in example 1

R_1	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1	0.3	1	0.2	0.4
q_2	0.8	0.5	1	0.3
q_3	1	0.7	0.4	0.5

表 2 例 1 中的二元关系 R_2
Table 2 The binary relationship in example 1

R_2	s_1	s_2	s_5	s_6
q_1	1	0.6	0.5	0.8
q_2	0.7	0.9	1	0.3
q_4	0.8	1	0.6	0.5

表 3 例 1 中的二元关系 R
Table 3 The binary relationship in example 1

R	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
q_1	1	1	0.2	0.4	0.5	0.8
q_2	0.8	0.9	1	0.3	1	0.3
q_3	1	0.7	0.4	0.5	0	0
q_4	0.8	1	0	0	0.6	0.5

取 $A=\left\{\dfrac{0}{s_1},\dfrac{0.5}{s_2},\dfrac{0.6}{s_3},\dfrac{0.3}{s_4},\dfrac{0.8}{s_5},\dfrac{0.7}{s_6}\right\}\in\mathscr{F}(S)$,则 $\bar{R}(A)=\left\{\dfrac{0.7}{q_1},\dfrac{0.8}{q_2},\dfrac{0.5}{q_3},\dfrac{0.6}{q_4}\right\}\in\overline{\mathscr{K}}$,$\bar{R}(A)\mid_{Q_1}=\left\{\dfrac{0.7}{q_1},\dfrac{0.8}{q_2},\dfrac{0.5}{q_3}\right\}\notin\overline{\mathscr{K}}_1$。模糊近似空间$(Q,S,R)$不是模糊知识空间族$\{(Q_i,\bar{R}_i)\mid i=1,2\}$的网格。

取 $B=\left\{\dfrac{0}{s_1},\dfrac{0.1}{s_2},\dfrac{0}{s_3},\dfrac{0.2}{s_4}\right\}\in\mathscr{F}(S_1)$,则$\underline{R_1}(B)=\left\{\dfrac{0.1}{q_1},\dfrac{0}{q_2},\dfrac{0}{q_3}\right\}\in\underline{\mathscr{K}}_1$。另外,若存在 $K'\in\underline{\mathscr{K}}$,$K'\mid_{Q_1}=\underline{R_1}(B)$,那么 $K'(s_1)=0$,从而$\underline{R_1}(B)\neq\left\{\dfrac{0.1}{q_1},\dfrac{0}{q_2},\dfrac{0}{q_3}\right\}$,矛盾,因此,若 $K\in\underline{\mathscr{K}}$,则有 $K\mid_{Q_1}\neq\underline{R_1}(B)$。于是,模糊近似空间$(Q,S,R)$不是模糊闭包空间族$\{(Q_i,\underline{R}_i)\mid i=1,2\}$的网格。

例 1 表明,当$\{(Q_i,R_i)\mid i\in I\}$是模糊知识(闭包)空间族时,(Q,S,R)不一定是模糊知识(闭包)空间族$\{(Q_i,R_i)\mid i\in I\}$的网格。

记 $\alpha_i(q)=R(q,s_{w_i})$,$w_i\in\{1,2,\cdots,|S|\}$,按隶属度的大小将$\{R(q,s)\in(0,1]\mid s\in S\}$进行递减排序:$1\geqslant R(q,s_{w_1})\geqslant\cdots\geqslant R(q,s_{w_{|S|}})\geqslant 0$,也表示为 $1\geqslant\alpha_1(q)\geqslant\cdots\geqslant\alpha_{|S|}(q)\geqslant 0$,在模糊近似空间$(Q,S,R)$中,$\bar{R}(A)(q)$的算法如下。

算法 1 个体 A 面对问题 q 的响应值 $\bar{R}(A)(q)$。

输入 模糊近似空间(Q,S,R),问题 q,个体 A。

输出 $\bar{R}(A)(q)$。

① 给定(Q,S,R),$q\in Q$,$A\in\mathscr{F}(S)$;

② $T=\alpha_1(q)\wedge A(s_{w_1})$,这里 T 表示 $\bar{R}(A)(q)$ 可能的值(中间值);

③ 将$\{R(q,s)\in(0,1]\mid s\in S\}$进行递减排序,得到 $\alpha_i(q)$, $i\in\{1,2,3,\cdots,|S|\}$;

④ for $i=1$ to $|S|-1$;

⑤ if $A(s_{w_i})\geqslant\alpha_{i+1}(q)$ then $T=T\vee(\alpha_i(q)\wedge A(s_{w_i}))$ break;//转到步骤⑨

⑥ else $T=T\vee(\alpha_{i+1}(q)\wedge A(s_{w_{i+1}}))$;

⑦ end if;

⑧ end for;

⑨ $\bar{R}(A)(q)=T$。

定义 9　设$(Q_i,S_i,R_i)(i\in I)$是一族模糊近似空间,(Q,S,R)是模糊知识空间族$\{(Q_i,R_i)\mid i\in I\}$的网格,称 R 为模糊知识空间族$\{(Q_i,R_i)\mid i\in I\}$的分布式串行模糊关系。

注 3　例 1 中,R 不是模糊知识空间族$\{(Q_i,\bar{R}_i)\mid i=1,2\}$的分布式串行模糊关系。

定义 10　设$(Q_i,S_i,R_i)(i\in I)$是一族模糊近似空间,(Q,S,R)是模糊闭包空间族$\{(Q_i,R_i)\mid i\in I\}$的网格,称 R 为模糊闭包空间族$\{(Q_i,R_i)\mid i\in I\}$的分布式串行模糊关系。

注 4　例 1 中,R 不是模糊闭包空间族$\{(Q_i,\underline{R}_i)\mid i=1,2\}$的分布式串行模糊关系。

3　网格化模糊知识空间

模糊知识空间的并运算、模糊闭包空间的交运算和模糊拟序空间的并交运算分别是封闭的。一般来说,由模糊关系描述的上近似模糊知识状态集族 $\overline{\mathscr{K}}$、下近似模糊知识状态集族 $\underline{\mathscr{K}}$ 不一定满足并运算封闭、交运算封闭和并交运算封闭中的任何一个。本章讨论模糊近似空间族$\{(Q_i,\bar{R}_i)\mid i\in I\}$中各个模糊关系满足一定条件下的性质,实现模糊知识空间族$\{(Q_i,\bar{R}_i)\mid i\in I\}$可网格化为模糊知识空间。

引理 1　设(Q,S,R)是模糊近似空间族$\{(Q_i,S_i,R_i)\mid i\in I\}$的并,则对于 $j\in I$,以下结论成立:

(1) 对于任意 $q\in Q_j$, $s\in S$, $R_j^*(q,s)\leqslant R(q,s)\wedge 1_{S_j}(s)\leqslant R(q,s)$;

(2) 对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$, $\bar{R}(Y|_{S_j})\subseteq\bar{R}(Y)$;

(3) 对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$, $\overline{R_j}(Y|_{S_j})\subseteq\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}$。

证明　(1) 由定义 8 可知,对于任意 $q\in Q_j$, $s\in S$, $R_j^*(q,s)\leqslant R(q,s)\wedge 1_{S_j}(s)\leqslant R(q,s)$。

(2) 由于 $Y|_{S_j}\subseteq Y$,由命题 1(8),可知 $\bar{R}(Y|_{S_j})\subseteq\bar{R}(Y)$。

(3) 由于对于任意 $q\in Q_j$,有

$$\overline{R_j}(Y|_{S_j})(q)=\bigvee_{s\in S_j}(R_j(q,s)\wedge Y|_{S_j}(s))\leqslant\bigvee_{s\in S_j}(R(q,s)\wedge Y|_{S_j}(s))=\bigvee_{s\in S}(R(q,s)\wedge Y|_{S_j}(s))=\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}(q)。$$

因此$\overline{R_j}(Y|_{S_j})\subseteq\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}$。

定理 1　设(Q,S,R)是模糊近似空间族$\{(Q_i,S_i,R_i)\mid i\in I\}$的并,$\overline{\mathscr{K}}$、$\overline{\mathscr{K}_i}$ 分别是(Q,S,R)与$(Q_i,S_i,R_i)$$(i\in I)$的上近似模糊知识状态集族,对于 $j\in I$,则以下表述等价:

(1) 对于任意 $q\in Q_j$, $s\in S_j$, $R_j(q,s)=R(q,s)$;

(2) 对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$,有$\overline{R_j}(Y|_{S_j})=\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}$。

此外,由(1)或(2)能推出 $\overline{\mathscr{K}_j}\subseteq\overline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$。

证明　(1)⇒(2)。对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$, $q\in Q_j$,有

$$\overline{R_j}(Y|_{S_j})(q)=\bigvee_{s\in S_j}(R_j(q,s)\wedge Y|_{S_j}(s))=\bigvee_{s\in S_j}(R(q,s)\wedge Y|_{S_j}(s))=\bigvee_{s\in S}(R(q,s)\wedge Y|_{S_j}(s))=\bar{R}(Y|_{S_j})(q),$$

因此,对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$,有$\overline{R_j}(Y|_{S_j})=\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}$。

(2)⇒(1)。反证法。若存在 $q'\in Q_j$, $s'\in S_j$,使得 $R_j(q',s')\neq R(q',s')$,则 $0\leqslant R_j(q',s')<R(q',s')$。令

$$A(s)=\begin{cases}\dfrac{R_j(q',s')+R(q',s')}{2}, & s=s',\\ 0, & s\neq s',\ s\in S,\end{cases}$$

则 $A\in\mathscr{F}(S)$,且$\overline{R_j}(A|_{S_j})(q')=R_j(q',s')$, $\bar{R}(A|_{S_j})(q')=\dfrac{R_j(q',s')+R(q',s')}{2}$, $\overline{R_j}(A|_{S_j})\neq\bar{R}(A|_{S_j})|_{Q_j}$,与(2)矛盾,因此由(2)可得(1)。

任取 $K\in\overline{\mathscr{K}}_j$,则 $\exists B\in\mathscr{F}(S_j)$,使得 $K=\overline{R_j}(B)$。令 $B^*(s)=\begin{cases}B(s), & s\in S_j,\\ 0, & s\in S-S_j\end{cases}$, $B^*\in\mathscr{F}(S)$,对于任意 $q\in Q_j$,由(2)得 $K(q)=\overline{R_j}(B^*|_{S_j})(q)=\bar{R}(B^*|_{S_j})(q)$, $K=\bar{R}(B^*|_{S_j})|_{Q_j}$, $\bar{R}(B^*|_{S_j})\in\overline{\mathscr{K}}$。因此,可得 $\overline{\mathscr{K}}_j\subseteq\overline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$成立,而(1)与(2)是等价的,由(1)也可得 $\overline{\mathscr{K}}_j\subseteq\overline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$。

定理 2 设(Q,S,R)是模糊近似空间族$\{(Q_i,S_i,R_i)|i\in I\}$的并,对于 $j\in I$,以下表述等价:

(1) 对于任意 $q\in Q_j$, $s\in S$, $R(q,s)=R(q,s)\wedge 1_{S_j}(s)$;

(2) 对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$, $\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}=\bar{R}(Y)|_{Q_j}$。

证明 (1)⇒(2)。对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$, $q\in Q_j$,有

$$\bar{R}(Y|_{S_j})(q)=\bigvee_{s\in S_j}(R(q,s)\wedge Y|_{S_j}(s))\bigvee_{s\in S-S_j}(0)=\bigvee_{s\in S_j}(R(q,s)\wedge Y(s))\bigvee_{s\in S-S_j}(R(q,s)\wedge Y(s))=\bar{R}(Y)(q)。$$

因此,对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$,有 $\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}=\bar{R}(Y)|_{Q_j}$。

(2)⇒(1)。若存在 $q'\in Q_j$, $s'\in S$,使得 $R(q',s')\neq R(q',s')\wedge 1_{S_j}(s')$,则 $s'\in S-S_j$ 且 $R(q',s')\neq 0$。令 $A(s)=\begin{cases}R(q',s), & s=s',\\ 0, & s\neq s',\ s\in S,\end{cases}$ 则有 $A\in\mathscr{F}(S)$, $\bar{R}(A)(q')=R(q',s')$, $\bar{R}(A|_{S_j})(q')=0$,与(2)矛盾,因此,由(2)可得(1)。

定理 3 设(Q,S,R)是模糊近似空间族$\{(Q_i,S_i,R_i)|i\in I\}$的并,$\overline{\mathscr{K}}$与$\overline{\mathscr{K}}_i$分别是(Q,S,R)与$(Q_i,S_i,R_i)(i\in I)$的上近似模糊知识状态集族,且对于 $j\in I$ 和任意 $q\in Q_j$, $s\in S$,有 $R_j^*(q,s)=R(q,s)$,则

(1) 对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$,有$\overline{R_j}(Y|_{S_j})=\bar{R}(Y)|_{Q_j}$;

(2) $\overline{\mathscr{K}}_j=\overline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$。

证明 (1) 已知对于任意 $q\in Q_j$, $s\in S$, $R_j^*(q,s)=R(q,s)$,特别地,当 $s\in S_j$, $R_j(q,s)=R(q,s)$。由定理 1,对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$, $\overline{R_j}(Y|_{S_j})=\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}$。由已知与引理 1(1)可得,对于任意 $q\in Q_j$, $s\in S$, $R(q,s)\wedge 1_{S_j}(s)=R(q,s)$。由定理 2,对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$,有 $\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}=\bar{R}(Y)|_{Q_j}$。因此定理 3(1)成立。

(2) 一方面,由于对于任意 $q\in Q_j$, $s\in S_j$, $R_j(q,s)=R(q,s)$,利用定理 1 可得 $\overline{\mathscr{K}}_j\subseteq\overline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$;另一方面,由定理 3(1)知,对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$,有 $\bar{R}(Y)|_{Q_j}=\overline{R_j}(Y|_{S_j})\in\overline{\mathscr{K}}_j$,表明 $\overline{\mathscr{K}}|_{Q_j}\subseteq\overline{\mathscr{K}}_j$,因此,$\overline{\mathscr{K}}_j=\overline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$。

例 2 设有模糊近似空间(Q_1,S_1,R_1)和(Q_2,S_2,R_2),其中 $Q_1=\{q_1\}$, $S_1=\{s_1\}$, $Q_2=\{q_1,q_2\}$, $S_2=\{s_1,s_2\}$, $R_1(q_1,s_1)=R_2(q_1,s_1)=R_2(q_2,s_2)=1$, $R_2(q_1,s_2)=R_2(q_2,s_1)=0.9$, (Q,S,R)是(Q_1,S_1,R_1)与(Q_2,S_2,R_2)的并。

(Q_1,S_1,R_1)与(Q_2,S_2,R_2)有包含关系,根据定义 4 和算法 1,可得模糊近似空间(Q_1,S_1,R_1)与(Q_2,S_2,R_2)的上近似模糊知识状态集族 $\overline{\mathscr{K}}_1$、$\overline{\mathscr{K}}_2$ 分别为:$\overline{\mathscr{K}}_1=\left\{\left\{\dfrac{t}{q_1}\right\}|t\in[0,1]\right\}$、$\overline{\mathscr{K}}_2=\left\{\left\{\dfrac{t}{q_1},\ \dfrac{t}{q_2}\right\}|t\in[0,0.9)\right\}\cup\left\{\left\{\dfrac{t_1}{q_1},\ \dfrac{t_2}{q_2}\right\}|t_1,t_2\in[0.9,1]\right\}$。$\overline{\mathscr{K}}$表示模糊近似空间$(Q,S,R)$的上近似模糊知识状态集族,则 $\overline{\mathscr{K}}_2=\overline{\mathscr{K}}=\overline{\mathscr{K}}|_{Q_2}$,符合定理 3。

由定理 3 可得推论 1。

推论 1 设(Q,S,R)是模糊近似空间族$\{(Q_i,S_i,R_i)|i\in I\}$的并,且对于任意 $j\in I$ 和任意 $q\in Q_j$, $s\in S$,有 $R_j^*(q,s)=R(q,s)$,则(Q,S,R)是模糊知识空间族$\{(Q_i,\bar{R}_i)|i\in I\}$的网格。

推论 2　设(Q,S,R)是模糊近似空间族$\{(Q_i,S_i,R_i)\mid i\in I\}$的并,$\overline{\mathscr{K}}$与$\overline{\mathscr{K}_i}$分别是$(Q,S,R)$与$(Q_i,S_i,R_i)(i\in I)$的上近似模糊知识空间族,则以下表述成立:

(1) 若$\{Q_i\mid i\in I\}$是两两不相交的,则(Q,S,R)是模糊知识空间族$\{(Q_i,\bar{R}_i)\mid i\in I\}$的网格;

(2) 若$\{S_i\mid i\in I\}$是两两不相交的,则对于任意$j\in I$,有$\overline{\mathscr{K}_j}\subseteq\overline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$。

证明　由定理 3 可得(1),由定理 1 可得(2)。

4　网格化模糊闭包空间

在模糊近似空间(Q,S,R)中,由例 1 中的算法得到$\bar{R}(\sim A)(q)$,个体$A\in\mathscr{F}(S)$面对问题q的响应值$\underline{R}(A)(q)=1-\bar{R}(\sim A)(q)$。本节讨论模糊近似空间族$\{(Q_i,S_i,R_i)\mid i\in I\}$中各个模糊关系满足一定条件下的性质,实现模糊闭包空间族$\{(Q_i,\underline{R}_i)\mid i\in I\}$可网格化为模糊闭包空间。

定理 4　设(Q,S,R)是模糊近似空间族$\{(Q_i,S_i,R_i)\mid i\in I\}$的并,$\underline{\mathscr{K}}$与$\underline{\mathscr{K}_i}$分别是$(Q,S,R)$与$(Q_i,S_i,R_i)(i\in I)$的下近似模糊知识状态集族,则对于$j\in I$,以下表述等价:

(1) 对于任意$q\in Q_j$, $s\in S$, $R_j^*(q,s)=R(q,s)$;

(2) 对于任意$Y\in\mathscr{F}(S)$,有$\underline{R}_j(\sim(Y|_{S_j}))=\underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))|_{Q_j}$。

由(1)或(2)推出$\underline{\mathscr{K}}_j\subseteq\underline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$。

证明　(1)⇒(2)。对于任意$Y\in\mathscr{F}(S)$,对于任意$q\in Q_j$, $s\in S$,有$R_j^*(q,s)=R(q,s)$,由定理 1,有$\overline{R_j}(Y|_{S_j})=\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}$,由命题 1(1)知

$$\underline{R}_j(\sim(Y|_{S_j}))(q)=1-\bar{R}_j(Y|_{S_j})(q),\quad \underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))(q)=1-\bar{R}(Y|_{S_j})(q),$$

因此$\underline{R}_j(\sim(Y|_{S_j}))=\underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))|_{Q_j}$。

(2)⇒(1)。对于任意$Y\in\mathscr{F}(S)$,有$\underline{R}_j(\sim(Y|_{S_j}))=\underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))|_{Q_j}$,因此,由命题 1(2)可知

$$\bar{R}_j(Y|_{S_j})=\sim\underline{R}_j(\sim(Y|_{S_j})),\quad \bar{R}(Y|_{S_j})(q)=\sim\underline{R}(\sim(Y|_{S_j})),$$

则有$\overline{R_j}(Y|_{S_j})=\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}$,由定理 1 可知,对于任意$q\in Q_j$, $s\in S$,有$R_j^*(q,s)=R(q,s)$。

任取$K\in\underline{\mathscr{K}_j}$,则$\exists A\in\mathscr{F}(S_j)$,使得$K=\underline{R}_j(A)$。令

$$A^*(s)=\begin{cases}A(s), & s\in S_j,\\ 1, & s\in S-S_j,\end{cases}\qquad B(s)=\begin{cases}1-A(s), & s\in S_j,\\ 0, & s\in S-S_j,\end{cases}$$

显然$A^*(s),B(s),\sim(B|_{S_j})\in\mathscr{F}(S)$。对于任意$q\in Q_j$,由(2)得

$$K(q)=\underline{R}_j(A^*)(q)=\underline{R}_j(\sim(B|_{S_j}))(q)=\underline{R}(\sim(B|_{S_j}))(q),\quad K=\underline{R}(\sim(B|_{S_j}))|_{Q_j},\quad \underline{R}(\sim(B|_{S_j}))\in\underline{\mathscr{K}},$$

因此,由(2)可得$\underline{\mathscr{K}_j}\subseteq\underline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$,而(1)与(2)是等价的,由(1)也可得$\underline{\mathscr{K}_j}\subseteq\underline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$。

定理 5　设(Q,S,R)是模糊近似空间族$\{(Q_i,S_i,R_i)\mid i\in I\}$的并,则对于$j\in I$,以下表述等价:

(1) 对于任意$q\in Q_j$, $s\in S$, $R(q,s)=R(q,s)\wedge 1_{S_j}(s)$;

(2) 对于任意$Y\in\mathscr{F}(S)$,有$\underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))|_{Q_j}=\underline{R}(\sim Y)|_{Q_j}$。

证明　(1)⇒(2)。对于任意$Y\in\mathscr{F}(S)$,根据定理 2,$\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}=\bar{R}(Y)|_{Q_j}$。对于任意$q\in Q_j$,由命题 1(1),得

$$\underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))(q)=1-\bar{R}(Y|_{S_j})(q),\quad \underline{R}(\sim Y)(q)=1-\bar{R}(Y)(q),$$

因此,对于任意$q\in Q_j$,有$\underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))|_{Q_j}(q)=\underline{R}(\sim Y)|_{Q_j}(q)$,即$\underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))|_{Q_j}=\underline{R}(\sim Y)|_{Q_j}$。

(2)⇒(1)。对于任意$Y\in\mathscr{F}(S)$,有$\underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))|_{Q_j}=\underline{R}(\sim Y)|_{Q_j}$。根据命题 1(2),得

$$\bar{R}(Y|_{S_j})(q)=1-\underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))(q),\quad \bar{R}(Y)(q)=1-\underline{R}(\sim Y)(q),$$

因此,对于任意$q\in Q_j$,有$\bar{R}(Y|_{S_j})(q)=\bar{R}(Y)(q)$,即$\bar{R}(Y|_{S_j})|_{Q_j}=\bar{R}(Y)|_{Q_j}$。从而由定理 2 知,对于任意$q\in Q_j$, $s\in S$, $R(q,s)=R(q,s)\wedge 1_{S_j}(s)$。

定理 6　设(Q,S,R)是模糊近似空间族$\{(Q_i,S_i,R_i)\mid i\in I\}$的并,$\underline{\mathscr{K}}$与$\underline{\mathscr{K}_i}$分别是$(Q,S,R)$与$(Q_i,S_i,

R_i)($i\in I$)的下近似模糊知识状态集族,若对于 $j\in I$,任意 $q\in Q_j$, $s\in S$,有 $R_j^*(q,s)=R(q,s)$,则

(1) 对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$, $\underline{R}_j(\sim(Y|_{S_j}))=\underline{R}(\sim Y)|_{Q_j}$;

(2) $\underline{\mathscr{K}}_j=\underline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$。

证明 (1) 对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$,任意 $q\in Q_j$, $s\in S$,有 $R_j^*(q,s)=R(q,s)$,因此,由引理1(1)得 $R(q,s)=R(q,s)\wedge 1_{S_j}(s)$。由定理5得 $\underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))|_{Q_j}=\underline{R}(\sim Y)|_{Q_j}$,从而由定理4得 $\underline{R}_j(\sim(Y|_{S_j}))=\underline{R}(\sim(Y|_{S_j}))|_{Q_j}$,于是 $\underline{R}_j(\sim(Y|_{S_j}))=\underline{R}(\sim Y)|_{Q_j}$。

(2) 一方面,对于任意 $q\in Q_j$, $s\in S$,有 $R_j^*(q,s)=R(q,s)$,因此,由定理4得 $\underline{\mathscr{K}}_j\subseteq\underline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$;另一方面,对于任意 $Y\in\mathscr{F}(S)$,显然 $\sim Y\in\mathscr{F}(S)$,由(1)得 $\underline{R}_j(\sim((\sim Y)|_{S_j}))=\underline{R}(Y)|_{Q_j}$,表明 $\underline{\mathscr{K}}|_{Q_j}\subseteq\underline{\mathscr{K}}_j$,因此 $\underline{\mathscr{K}}_j=\underline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$。

推论3 设 (Q,S,R) 是模糊近似空间族 $\{(Q_i,S_i,R_i)|i\in I\}$ 的并,若对于任意 $j\in I$ 和任意 $q\in Q_j$, $s\in S$,有 $R_j^*(q,s)=R(q,s)$,则 (Q,S,R) 是模糊近似空间族 $\{(Q_i,\underline{R}_i)|i\in I\}$ 的网格。

推论4 设 (Q,S,T) 是由模糊闭包空间族 $\{(Q_i,S_i,T_i)|i\in I\}$ 的并,$\underline{\mathscr{K}}$ 与 $\underline{\mathscr{K}}_i$ 分别是 (Q,S,R) 与 (Q_i,S_i,R_i)($i\in I$)的下近似模糊闭包空间族,则以下表述成立:

(1) 若 $\{Q_i|i\in I\}$ 是两两不相交的,则 (Q,S,R) 是模糊闭包空间族 $\{(Q_i,\underline{R}_i)|i\in I\}$ 的网格;

(2) 若 $\{S_i|i\in I\}$ 是两两不相交的,则对于任意 $j\in I$,有 $\underline{\mathscr{K}}_j\subseteq\underline{\mathscr{K}}|_{Q_j}$。

证明 由定理6可得(1),由定理4得(2)。

5 结语

引入分布式串行模糊关系的概念,处理(部分)重叠知识域上串行模糊关系组的一致集成。不同源(例如不同领域专家)问题的技能分配看可以看作串行模糊关系,利用模糊知识结构组网格化进行描述。讨论分布式系统架构中集成专家技能分配和技能对增强学习的影响,存储库中的技能分配通过适当的元数据标签实现[26-27],基于局部问题存储库并通过分布式串行模糊关系描绘模糊知识结构。例2表明,利用定理3实现局部知识评估和全局知识评估的一致性,在模糊闭包空间中也能得到相同结果。通过串行模糊关系,使局部串行模糊关系与全局分布式串行模糊关系重合。但是,模糊知识结构的网格化不限于此方式,满足模糊知识结构可网格化的条件是否可以更弱化,值得进一步探索。

参考文献:

[1] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Spaces for the assessment of knowledge[J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1985, 23(2):175-196.

[2] 刘艳花,杨贯中. 基于扩展知识空间理论的技能自适应测试过程[J]. 计算机系统应用,2010,19(7):69-73.
LIU Yanhua, YANG Guanzhong. Adaptive test process based on extension of knowledge space theory[J]. Computer Systems and Applications, 2010, 19(7):69-73.

[3] 刘译蓬. 基于知识空间理论的认知诊断自适应测试选题方法研究[D]. 锦州:渤海大学,2019.
LIU Yipeng. Research on selection method of cognitive diagnosis adaptive test based on knowledge space theory[D]. Jinzhou: Bohai University, 2019.

[4] 谈成群,谢深泉. 超文本教学系统中学生知识的自适应测评研究[J]. 计算机工程与设计,2007,28(20):5072-5075.
TAN Chengqun, XIE Shenquan. Adaptive assessment of students' knowledge in hypertext tutoring system[J]. Computer Engineering and Design, 2007, 28(20):5072-5075.

[5] FALMAGNE J C, DOIGNON J P. Learning spaces: interdisciplinary applied mathematics[M]. Berlin: Springer, 2011.

[6] 李金海,张瑞,智慧来,等. 知识空间理论综述[J]. 模式识别与人工智能,2024,37(2):106-127.
LI Jinhai, ZHANG Rui, ZHI Huilai, et al. Review of knowledge space theory[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2024, 37(2):106-127.

[7] 王大利,许晴媛,李进金,等. 知识点网络下的知识评估和学习路径选择[J]. 南京大学学报(自然科学版),2023,59(4):629-643.
WANG Dali, XU Qingyuan, LI Jinjin, et al. Knowledge assessment and learning paths selection under knowledge point network[J]. Journal of Nanjing University (Natural Science), 2023, 59(4):629-643.

[8] STEFANUTTI L. On the assessment of procedural knowledge: from problem spaces to knowledge spaces[J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 2019, 72(2):185-218.
[9] HOCKEMEYER C, ALBERT D. The adaptive tutoring system rath: a prototype [C]//AUER M E, RESSLER U. ICL99 Workshop Interactive Computer Aided Learning Tools and Applications. Villach: Carinthia Tech Institute, 1999:54-78.
[10] COSYN E, DOBLE C, FALMAGNE J C, et al. Assessing mathematical knowledge in a learning space[M]//DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Knowledge Spaces. Berlin: Springer, 2013:27-50.
[11] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Knowledge spaces[M]. New York: Springer, 1999:18-43.
[12] DOIGNON J P. Knowledge spaces and skill assignments[M]. New York: Springer, 1994:111-121.
[13] SUN Wen, LI Jinjin, GE Xun, et al. Knowledge structures delineated by fuzzy skill maps[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 407:50-66.
[14] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer Information Science, 1982, 11(5):341-356.
[15] XIAO Jiayu, ZHANG Qinghua, AI Zhihua, et al. A fast neighborhood classifier based on hash bucket with application to medical diagnosis[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2022, 148:117-132.
[16] JIN Chenxia, MI Jusheng, LI Fachao, et al. A novel probabilistic hesitant fuzzy rough set based multi-criteria decision-making method[J]. Information Sciences 2022, 608:489-516.
[17] 王国胤,姚一豫,于洪. 粗糙集理论与应用研究综述[J]. 计算机学报,2009,32(7):1229-1246.
WANG Guoyin, YAO Yiyu, YU Hong. A survey on rough set theory and applications[J]. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(7):1229-1246.
[18] YAO Yiyu, MIAO Duoqian, XU Feifei. Granular structures and approximations in rough sets and knowledge spaces[M]// ABRAHAM A, FALCÓN R, BELLO R. Rough Set Theory (A True Landmark in Data Analysis). Heidelberg: Springer, 2009.
[19] DUBOIS D, PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17(2/3):191-209.
[20] 杨海龙. 双论域粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2016:33-41.
YANG Hailong. Rough set theory and methods for bi-theoretical domains[M]. Beijing: Science Press, 2016:33-41.
[21] ZHOU Yinfeng, LI Jinjin, WANG Hongkun, et al. Skills and fuzzy knowledge structures[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2022, 42(3):2629-2645.
[22] 张纪平,吴伟志,周缪娟,等. 模糊知识结构的一些性质[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(1):91-100.
ZHANG Jiping, WU Weizhi, ZHOU Miaojuan, et al. Some properties of the fuzzy knowledge structures[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2025, 60(1):91-100.
[23] HELLER J, REPITSCH C. Distributed skill functions and the meshing of knowledge[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2008, 52:147-157.
[24] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3):338-353.
[25] 吴伟志,米据生. 粗糙集的数学结构[M]. 北京:科学出版社,2019:44-57.
WU Weizhi, MI Jusheng. Mathematical structures of rough sets[M]. Beijing: Science Press, 2019:44-57.
[26] CONLAN O, HOCKEMEYER C, WADE V, et al. Metadata driven approaches to facilitate adaptivity in personalized elearning systems[J]. The Journal of Information and Systems in Education, 2002, 1(1):38-44.
[27] 智慧来,张丽,李金海. 旁观者视角下粒的多层次描述[J]. 电子学报,2022,50(11):2568-2574.
ZHI Huilai, ZHANG Li, LI Jinhai. Multi-level description of granules from an outsider's perspective[J]. Acta Electronica Sinica, 2022, 50(11):2568-2574.

(编辑:陈丽萍)