山东大学学报(理学版)2025 年 5 月 第 60 卷 第 5 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.5, 2025　　http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)05-0079-08　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.020

从代数换位图具有非离开面性的 $\mathscr{G}$-系统证明

任艳栏,谢云丽 *
(西南交通大学数学学院, 四川 成都 611756)

摘要:利用丛代数中的变异映射和 Bongartz 余完备化映射与相应 $\mathscr{G}$-系统中的变异映射和 Bongartz 余完备化映射的相容性及 $\mathscr{G}$-系统上的组合结果构造所需的投射,从而证明任意丛代数的换位图具有非离开面性。

关键词:丛代数;非离开面性;$\mathscr{G}$-系统;换位图
中图分类号:O153　　**文献标志码**:A
引用格式:任艳栏,谢云丽. 丛代数换位图具有非离开面性的 $\mathscr{G}$-系统证明[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):79-86,92.

The non-leaving-face property of exchange graphs of cluster algebras via $\mathscr{G}$-systems

REN Yanlan, XIE Yunli *
(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, Sichuan, China)

Abstract: Using the compatibility of mutation and Bongartz co-completion in cluster algebras with the corresponding $\mathscr{G}$-systems and the combination results in $\mathscr{G}$-systems, the required projection is constructed, and the exchange graph of any cluster algebra is proved to have the non-leaving-face property.

Key words: cluster algebra; the non-leaving-face property; $\mathscr{G}$-systems; exchange graph

0 引言

丛代数能为代数群的全正性和量子群的典范基提供一个组合的研究框架,丛代数具有丰富的组合结构,丛代数是通过对生成元进行递归变异而生成的一类交换代数[1-2]。丛代数的生成元称为丛变量,这些丛变量按照某种规则分组,形成基数相同且有部分重叠的集合,称为丛。对于所给的初始丛 $\boldsymbol{x}$,它附加有额外的组合结构,这额外的组合结构是由丛与丛之间的递归方式所决定。丛代数是由初始丛对每个方向均等地作递归变异所得的丛生成的代数。为了实现这种特定的递归变异,需要在丛上附加一个可斜对称化矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和一个系数组 $\boldsymbol{y}$。由丛、可斜对称化矩阵和系数组构成的三元组($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{B}$),称为种子。每一个种子都能确定一个丛代数。对于丛代数而言,最关键的 2 个方面是种子和变异。而丛代数的换位图可以捕获种子变异的组合,因此换位图是丛代数理论中的核心概念。在丛代数中,换位图的点对应种子的等价类,边对应种子的变异关系[1]。换位图只依赖于它所对应的 $\boldsymbol{y}$-模式,即只依赖于正则树 T_n 中任意顶点 t_0 上的 $\boldsymbol{y}$-种子,其中 $\boldsymbol{y}$-种子是由可斜对称化矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和系数组 $\boldsymbol{y}$ 构成的二元组($\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{B}$)。此外,所有换位图都是正则图。换位图具有广义多面体的结构,因此,在换位图中可以研究很多性质,比如说可达面性、非离开面性等等[2-5]。本文主要对非离开面性进行探讨。

多面体的非离开面性,即连接多面体中任意两点之间的测地线在包含这两点的最小面中[6]。Sleator 等[7]为了找出 n 维 A 型的 Stasheff 多面体的直径,建立了这类 Stasheff 多面体的非离开面性。进一步地,

收稿日期:2024-01-19; **网络出版时间**:2024-11-26 10:33:33
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12171397)
第一作者:任艳栏(2000—),女,硕士研究生,主要研究方向为代数表示论. E-mail:728548402@qq.com
* **通信作者**:谢云丽(1979—),女,讲师,硕士生导师,博士,主要研究方向为代数表示论. E-mail:xieyunli@swjtu.edu.cn

Ceballos等[6]证明了 B-C-D 型的 Stasheff 多面体具有非离开面性,并提供了一些具体的例子来说明并非所有的 Stasheff 多面体都具有这一性质。此外,Williams[8]用投射论证的方法证明了所有有限型的 Stasheff 多面体具有非离开面性。Brüstle 等[9]利用“如果对换位图的任意面都存在投射,则该换位图具有非离开面性”的经典引理,证明了产生于没有刺穿点标记曲面的丛代数换位图具有非离开面性。将这个性质从有限型换位图推广到无限型换位图。最近,Fu 等[10]利用 c-向量的 Bongartz 完备化构造所需引理中的投射,证明了任意丛代数的换位图具有非离开面性。

$\mathscr{G}$-系统的引入是为了给丛代数中的 Bongartz 余完备化提供一个范畴化解释和拓扑解释[11]。$\mathscr{G}$-系统是满足某些额外公理化条件的 $\mathbf{Z}^n$ 的一些 $\mathbf{Z}$-基的集合,它可以看作为 $\boldsymbol{G}$-矩阵的一种公理化。在 $\mathscr{G}$-系统中自然地产生 2 种映射,分别是变异映射和 Bongartz 余完备化映射。这 2 种映射提供了 $\mathscr{G}$-系统的一个组合结构,并且它们具有良好的相容性。在 Bongartz 余完备化的作用下,$\mathscr{G}$-系统可以获得丛代数理论中的一些组合结果。本文的主要目的是利用 $\mathscr{G}$-系统给出任意丛代数换位图具有非离开面性的另一种证明。

1 丛代数的基础概念[1,12]

在给出丛代数定义之前,先介绍所需要的半域知识。一个集合 P 被称为半域,如果存在乘法“·”和加法“⊕”两种二元运算满足

(ⅰ) $(P,\cdot)$ 是阿贝尔群;

(ⅱ) $(P,\oplus)$ 是交换半群;

(ⅲ) 两种运算兼容,即乘法“·”关于加法“⊕”有左右分配律。

常见的半域有泛半域和热带半域,其中热带半域对于丛代数理论的研究具有重要意义。设 u_1、u_2、…、u_l 是 l 个不定元,记 $\mathrm{Trop}(u_1,u_2,\cdots,u_l)$ 是关于 u_1、u_2、…、u_l 所有洛朗单项式构成的集合,显然 $\mathrm{Trop}(u_1,u_2,\cdots,u_l)$ 关于一般多项式的乘法“·”构成阿贝尔群,在这个群中定义加法“⊕”为

$$u_1^{a_1}u_2^{a_2}\cdots u_l^{a_l}\oplus u_1^{b_1}u_2^{b_2}\cdots u_l^{b_l}=u_1^{\min(a_1,b_1)}u_2^{\min(a_2,b_2)}\cdots u_l^{\min(a_l,b_l)},$$

其中 $a_i,b_i\in\mathbf{Z}$,则 $(\mathrm{Trop}(u_1,u_2,\cdots,u_l),\cdot,\oplus)$ 构成一个半域,这样的半域称为不定元 u_1、u_2、…、u_l 的热带半域。

给定正整数 n,以及半域 P,记 $\mathbf{Z}P$ 是阿贝尔群 P 的群环,它是一个整环,$\mathbf{Q}P$ 是其分式域。令 F 是 $\mathbf{Q}P$ 上由 n 个不定元生成的有理函数域,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 n 阶整数矩阵,如果存在一个正整数对角矩阵 $\boldsymbol{D}$,使得 $\boldsymbol{DB}$ 是斜对称的,则 $\boldsymbol{B}$ 被称为可斜对称化矩阵,对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 被称为 $\boldsymbol{B}$ 的斜对称化子。

定义 1 有理函数域 F 中的一个标记种子是一个三元组 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B})$,满足

(ⅰ) $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $\mathbf{Q}P$ 上自由生成 F,称 $\boldsymbol{x}$ 为种子 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B})$ 的丛,称 $\boldsymbol{x}$ 中的元素 x_i 为种子 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B})$ 的丛变量;

(ⅱ) $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 P 中的 n 元组,称 y_1、y_2、…、y_n 为种子 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B})$ 的系数变量;

(ⅲ) $\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in M_n(\mathbf{Z})$ 是可斜对称化矩阵,称为种子 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B})$ 的换位矩阵。

定义 2 令 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B})$ 是有理函数域 F 中的一个标记种子,$k\in\{1,2,\cdots,n\}$,$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B})$ 经过在方向 k 上的变异后可以得到一个新的三元组 $\mu_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B}):=(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{B}')$,并且新的三元组依旧是一个种子,这个过程叫做种子变异,其中

(ⅰ) $\boldsymbol{B}'=(b'_{ij})$,满足

$$b'_{ij}=\begin{cases}-b_{ij}, & 如果\ i=k\ 或\ j=k,\\ b_{ij}+(|b_{ik}|b_{kj}+b_{ik}|b_{kj}|)/2, & 其他;\end{cases}\tag{1}$$

(ⅱ) $\boldsymbol{x}'=(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$,满足

$$x'_j=\begin{cases}x_k^{-1}\left(\prod\limits_{b_{ik}\geqslant 0}x_i^{-b_{ik}}+\prod\limits_{b_{ik}<0}x_i^{-b_{ik}}\right), & 如果\ j=k,\\ x_j, & 其他;\end{cases}\tag{2}$$

(ⅲ) $\boldsymbol{y}'=(y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)$,满足

$$y_j'=\begin{cases} y_k^{-1}, & \text{如果 } j=k, \\ y_j y_k^{\max(b_{kj},0)}(1\oplus y_k)^{-b_{kj}}, & \text{其他。} \end{cases} \tag{3}$$

根据变异递推公式,易验证种子变异是对合的,即 $\mu_k(\mu_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B})$。在下文中,$T_n$ 表示 n-正则树,它是一个顶点的度都为 n 的连通图。数字 1、2、…、n 标记 T_n 的每条边,使得与每个顶点相连的 n 条边具有不同的标记。特别地,对于 $n=2$ 时,可用整数集 $\mathbf{Z}$ 参数化正则树 T_2 的顶点,即

$$\cdots \xrightarrow{1} -2 \xrightarrow{2} -1 \xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} \cdots。$$

定义 3　令 S 是以 T_n 为指标集的种子的集合,即存在映射

$$T_n \longrightarrow S,$$
$$t \mapsto \boldsymbol{\Sigma}_t=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B}),$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_t=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{B})$ 是有理函数域 F 上的标记种子。称 S 是一个秩为 n 的丛模式,如果满足:对于 T_n 的每一条边 $t \xrightarrow{k} t'$,都有 $\boldsymbol{\Sigma}_{t'}=\mu_k(\boldsymbol{\Sigma}_t)$。

在下文中,总是记 $\boldsymbol{x}_t=(x_{1;t},x_{2;t},\cdots,x_{n;t})$, $\boldsymbol{y}_t=(y_{1;t},y_{2;t},\cdots,y_{n;t})$, $\boldsymbol{B}_t=(b_{ij}^t)$。

定义 4　令 S 为上述所定义的丛模式,与 S 有关的丛代数 $\mathscr{A}(S)$ 是由 S 上所有丛变量 $X=\{x_{i;t}\mid i\in\{1,2,\cdots,n\},\ t\in T_n\}$ 生成的 F 的 $\mathbf{Z}P$-子代数。

注 1　根据其定义可知,丛代数 $\mathscr{A}(S)$ 是由丛模式 S 唯一决定的,而丛模式 S 则由正则树 T_n 中的任意点 t 处的种子决定。因此,丛代数 $\mathscr{A}(S)$ 完全由任意点 t 处的种子确定。当选定一个种子作为丛代数的起始点时,这个种子称为丛代数的初始种子,这个种子中的丛称为初始丛。

注 2　如果 $P=\mathrm{Trop}(u_1,u_2,\cdots,u_l)$,则称对应的丛代数为几何型丛代数;特别地,如果 $P=\mathrm{Trop}(u_1,u_2,\cdots,u_n)$,且存在一个种子 $\boldsymbol{\Sigma}_{t_0}=(\boldsymbol{x}_{t_0},\ \boldsymbol{y}_{t_0},\ \boldsymbol{B}_{t_0})$ 使得 $y_{i;t_0}=u_i,\ i\in\{1,2,\cdots,n\}$,则称对应的丛代数为在 t_0 处有主系数的丛代数。由丛变量的变异递推公式(2)可知,任意丛变量都可以写成一个丛的有理表达式。Fomin 和 Zelevinsky 在文献[1]中进行了详细地刻画,并提出丛代数中著名的洛朗现象。

定理 1　令 $\mathscr{A}(S)$ 为上述所定义的丛代数,对于任意 $v,\ u\in T_n$ 及 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, $x_{j;u}$ 表示为在 $\mathbf{Z}P$ 上的洛朗多项式,即

$$x_{j;u}\in\mathbf{Z}P[x_{1;v}^{\pm},\ x_{2;v}^{\pm},\ \cdots,\ x_{n;v}^{\pm}]。$$

注 3　实际上,定理 1 中出现的洛朗多项式落在 $\mathbf{Z}_{\geqslant 0}P[x_{1;v}^{\pm},x_{2;v}^{\pm},\cdots,x_{n;v}^{\pm}]$ 中,这是 Fomin 和 Zelevinsky 在文献[1]中提出的洛朗现象的正性猜想,Gross 等[13]利用散射图和组合构造的方法给出了正性猜想的证明。

定义 5　丛单项式是同一个丛中丛变量的单项式。

令 $[\boldsymbol{x}_t]$ 是 $\boldsymbol{x}_t$ 中所有的丛变量构成的集合,即 $[\boldsymbol{x}_t]=\{x_{1;t},x_{2;t},\cdots,x_{n;t}\}$,将 $[\boldsymbol{x}_t]$ 称为非标记丛。文献[14]给出丛代数换位图的定义。

定义 6　令 $\mathscr{A}(S)$ 为上述所定义的丛代数,则 $\mathscr{A}(S)$ 的换位图 $G_{\mathscr{A}}$ 为

$$\begin{cases} \text{顶点: 非标记丛}[\boldsymbol{x}_t],\ t\in T_n, \\ \text{连边: 丛之间的变异关系。} \end{cases}$$

由丛之间的变异递推公式(2)可知,换位图中的两点之间存在连边当且仅当它们点所对应的非标记丛有 $n-1$ 个公共元。丛代数的换位图可以直观地反映丛代数的生成元及变异关系,并且易知当丛代数由有限个生成元生成时,其换位图是有限图。

注 4　上述换位图的定义虽与文献[1]中有所不同,但二者是等价的。

2　丛代数的 C-矩阵和 G-矩阵

本章考虑的是一类特殊的几何型丛代数——主系数丛代数。主系数丛代数是一类重要的丛代数,在这类丛代数中伴随了许多重要的产物,比如 C-矩阵、G-矩阵、F-多项式等[12]。Fomin 和 Zelevinsky 猜想极大地推动了代数学的发展,比如 C-矩阵的列向量(称为 c-向量)具有符号一致性、G-矩阵的列向量(称为 g-向量)能够参数化丛变量等。本章主要对 C-矩阵和 G-矩阵进行详细的阐述,其余部分可参考文献[12]。

假定半域 $\boldsymbol{P}=\mathrm{Trop}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$\mathscr{A}$ 是在 t_0 处具有主系数的丛代数，则对 t_0 处的种子 $\boldsymbol{\Sigma}_{t_0}=(\boldsymbol{x}_{t_0},\boldsymbol{y}_{t_0},\boldsymbol{B}_{t_0})$，有 $\boldsymbol{y}_{t_0}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。为了简便，记 $\boldsymbol{x}_{t_0}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{B}_{t_0}=B=(b_{ij})$。

定义 7　对任意 $t\in T_n$，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $y_{i;t}\in P=\mathrm{Trop}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则存在整数 c_{ji}^t，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $y_{i;t}=y_1^{c_{1i}^t}y_2^{c_{2i}^t}\cdots y_n^{c_{ni}^t}$，称所得到的向量 $\boldsymbol{c}_{i;t}=(c_{1i}^t,c_{2i}^t,\cdots,c_{ni}^t)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{Z}^n$ 为在顶点 t 处的第 i 个 c-向量，矩阵 $\boldsymbol{C}_t=(\boldsymbol{c}_{1;t},\boldsymbol{c}_{2;t},\cdots,\boldsymbol{c}_{n;t})\in M_n(\mathbf{Z})$ 为在顶点 t 处的 C-矩阵。

注 5　根据定义 7 可知，对任意一个种子中的 n 元系数组，都存在一个 n 阶整数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 与之对应，所以 C-矩阵又称为系数矩阵。由种子变异中系数变量的变异公式(3)知，C-矩阵还可以由如下递推变异公式定义：

(ⅰ) $\boldsymbol{C}_{t_0}=\boldsymbol{I}_n$；

(ⅱ) 对于 T_n 中的任意边 $t\xrightarrow{k}t'$，若矩阵 $\boldsymbol{C}_t$ 已经定义，则矩阵 $\boldsymbol{C}_{t'}$ 为

$$c_{ij}^{t'}=\begin{cases}-c_{ij}^t, & j=k,\\ c_{ij}^t+(c_{ik}^t|b_{kj}^t|+|c_{ik}^t|b_{kj}^t)/2, & j\neq k,\end{cases}\tag{4}$$

这里定义的 C-矩阵的列向量是 c-向量。这种递推的定义将 c-向量和 C-矩阵推广到一般系数的丛代数，C-矩阵只依赖于点 t_0 和 t_0 处的矩阵 $\boldsymbol{B}_{t_0}=\boldsymbol{B}$。为了强调这种依赖性，将矩阵 $\boldsymbol{C}_t$ 记为 $\boldsymbol{C}_t^{\boldsymbol{B};t_0}$。

定义丛变量 x_i 和系数变量 y_i 的分次向量为

$$\deg(x_i)=\boldsymbol{e}_i,\quad \deg(y_i)=-\boldsymbol{b}_i,$$

式中，$\boldsymbol{e}_i$ 是 $\mathbf{Z}^n$ 的基向量，$\boldsymbol{b}_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 个列向量，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$。在此定义下，$\mathbf{Z}P[x_1^{\pm},x_2^{\pm},\cdots,x_n^{\pm}]$ 构成 $\mathbf{Z}^n$-分次环。由洛朗现象可知，每个丛变量 $x_{i;t}$ 都属于 $\mathbf{Z}P[x_1^{\pm},x_2^{\pm},\cdots,x_n^{\pm}]$。文献[12]证明了任意丛变量在这个分次定义下都是齐次的，由此可以给出 g-向量的定义。

定义 8　对任意 $t\in T_n$，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，称 $\boldsymbol{g}(x_{i;t})=\deg(x_{i;t})\in\mathbf{Z}^n$ 为丛变量 $x_{i;t}$ 关于 t_0 在顶点 t 处的 g-向量，$\boldsymbol{G}_t=(\boldsymbol{g}(x_{1;t}),\boldsymbol{g}(x_{2;t}),\cdots,\boldsymbol{g}(x_{n;t}))$ 称为关于 t_0 在顶点 t 处的 G-矩阵。

如果 $\alpha=x_{1;t}^{a_1}x_{2;t}^{a_2}\cdots x_{n;t}^{a_n}$ 是丛单项式，其中 $a_i\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$，则 $\boldsymbol{g}(\alpha)=a_1\boldsymbol{g}(x_{1;t})+a_2\boldsymbol{g}(x_{2;t})+\cdots+a_n\boldsymbol{g}(x_{n;t})$ 为丛单项式 α 关于 t_0 的 g-向量。

注 6　根据 Fomin 和 Zelevinsky 关于丛代数中任意丛变量在上述分次下是齐次的证明可知，G-矩阵可由如下递推变异公式定义：

(ⅰ) $\boldsymbol{G}_{t_0}=\boldsymbol{I}_n$；

(ⅱ) 对于 T_n 中的任意边 $t\xrightarrow{k}t'$，若矩阵 $\boldsymbol{G}_t$ 已经定义，则矩阵 $\boldsymbol{G}_{t'}$ 由如下公式决定：

$$g_{ij}^{t'}=\begin{cases}g_{ij}^t, & j\neq k,\\ -g_{ik}^t+\sum\limits_{b_{jk}^t>0}g_{ij}^tb_{jk}^t-\sum\limits_{c_{jk}^t>0}b_{ij}^{t_0}c_{jk}^t, & j=k,\end{cases}\tag{5}$$

式中，$\boldsymbol{g}_{j;t}=(g_{1j}^t,g_{2j}^t,\cdots,g_{nj}^t)^{\mathrm{T}}$ 是 $x_{j;t}$ 的 g-向量，$\boldsymbol{C}_t^{\boldsymbol{B};t_0}=(c_{ij}^t)$ 是关于 t_0 在顶点 t 处的 C-矩阵。这种递推的定义可将 g-向量和 G-矩阵推广到一般系数的丛代数。根据定义 8 可知，g-向量和 G-矩阵只依赖于点 t_0 和 t_0 处的矩阵 $\boldsymbol{B}_{t_0}=\boldsymbol{B}$。为了强调这种依赖性，将向量 $\boldsymbol{g}_{j;t}$ 记为 $\boldsymbol{g}_{j;t}^{\boldsymbol{B};t_0}$，矩阵 $\boldsymbol{G}_t$ 记为 $\boldsymbol{G}_t^{\boldsymbol{B};t_0}$。

定义 9　令 $\boldsymbol{H}$ 是一个非零的整数矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 是一个非零的整数向量，则

(ⅰ) $\boldsymbol{\beta}$ 是符号一致的，如果它的每个分量都是非负的或都是非正的；

(ⅱ) $\boldsymbol{H}$ 是行符号一致的，如果它的每个行向量都是符号一致的；

(ⅲ) $\boldsymbol{H}$ 是列符号一致的，如果它的每个列向量都是符号一致的。

根据 Fomin 和 Zelevinsky 关于 C-矩阵和 G-矩阵的猜想以及文献[13]中对这些猜想的证明，可知 C-矩阵和 G-矩阵有如下性质。

引理 1　令 $\mathscr{A}$ 是在 t_0 处具有主系数的丛代数，则

(ⅰ) 对于任意 $t\in T_n$，矩阵 $\boldsymbol{C}_t$ 都具有列符号一致性且其行列式为±1；

(ⅱ) 对于任意 $t\in T_n$，矩阵 $\boldsymbol{G}_t$ 都具有行符号一致性且其行列式为±1；

(ⅲ) 用 M 表示丛代数 $\mathscr{A}$ 的丛单项式集合，则存在如下单射

$$\boldsymbol{g}^{t_0}: M \to \boldsymbol{Z}^n$$
$$\alpha \mapsto \boldsymbol{g}^{t_0}(\alpha),$$

其中 $\boldsymbol{g}^{t_0}(\alpha)$ 表示丛单项式 α 关于 t_0 的 g-向量。

由文献[15]和引理 1(ⅰ)可知，C-矩阵和 G-矩阵具有如下的热带对偶关系。

定理 2　令 $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的斜对称化子，对任意的 $t \in T_n$，有

$$\boldsymbol{G}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{D}。$$

注 7　显然，引理 1(ⅰ)和定理 2 在一般系数的丛代数中也成立。对于引理 1 中的(ⅱ)和(ⅲ)，由文献[16]可知，它们在一般系数的丛代数中是成立的。

3　$\mathscr{G}$-系统

$\mathscr{G}$-系统是满足额外公理化条件的 $\mathbf{Z}^n$ 的一些 $\mathbf{Z}$-基的集合，它可以作为一个共同的框架去统一刻画丛倾斜理论、半倾斜理论、τ 倾斜理论等不同理论中的 Bongartz 余完备化，从而获得丛代数中 Bongartz 余完备化的各种范畴化解释和拓扑解释[11]。

本章根据 $\mathscr{G}$-系统的定义和文献[11]，介绍丛代数中能自然地产生 $\mathscr{G}$-系统，并且它们对应的变异映射和 Bongartz 余完备化映射是相容的。这种相容性对于定理 4 的证明很重要。

3.1　$\mathscr{G}$-系统的定义

定义 10　令 T 是一个指标集，$\mathscr{G}_T$ 是以 T 为指标集的 $\mathbf{Z}^n$ 的一些 $\mathbf{Z}$-基的集合，即存在映射

$$\boldsymbol{T} \to \mathscr{G}_T$$
$$t \mapsto G_t = \{\boldsymbol{g}_{1;t}, \boldsymbol{g}_{2;t}, \cdots, \boldsymbol{g}_{n;t}\},$$

称 $\mathscr{G}_T$ 是一个在 $t_0 \in T$ 处的 $\mathscr{G}$-系统，如果它满足

(ⅰ)(变异)对任意 $G_t = \{\boldsymbol{g}_{1;t}, \boldsymbol{g}_{2;t}, \cdots, \boldsymbol{g}_{n;t}\} \in \mathscr{G}_T$ 和 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$，都有 $G_{t'} \in \mathscr{G}_T$ 使得 $G_t \cap G_{t'} = G_t \backslash \{\boldsymbol{g}_{k;t}\}$；

(ⅱ)(Bongartz 余完备化)　对任意 $G_t \in \mathscr{G}_T$ 和 $G_{t_0} = \{\boldsymbol{g}_{1;t_0}, \boldsymbol{g}_{2;t_0}, \cdots, \boldsymbol{g}_{n;t_0}\}$ 的任意子集 J，存在 $G_{t'} \in \mathscr{G}_T$ 满足

　(a) $J \subseteq G_{t'}$；

　(b) 对任意 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$，若 $\boldsymbol{g}_{k;t} = r_{1k}^{t'} \boldsymbol{g}_{1;t'} + r_{2k}^{t'} \boldsymbol{g}_{2;t'} + \cdots + r_{nk}^{t'} \boldsymbol{g}_{n;t'}$，则对任意满足 $\boldsymbol{g}_{i;t'} \notin J$ 的 i，有 $r_{ik}^{t'} \geqslant 0$；

(ⅲ)(唯一性条件)　对任意 G_t，$G_{t'} \in \mathscr{G}_T$，若对一些子集 I，$I' \subseteq \{1,2,\cdots,n\}$ 和 r_i，$r_j > 0$，其中 $i \in I$，$j \in I'$，有

$$\sum_{i \in I} r_i \boldsymbol{g}_{i;t} = \sum_{j \in I'} r'_j \boldsymbol{g}_{j;t'}。$$

则存在一一对应 $\boldsymbol{\sigma}: I' \to I$，使得 $r'_j = r_{\sigma(j)}$，$\boldsymbol{g}_{j;t'} = \boldsymbol{g}_{\sigma(j);t}$。

注 8　令 $\boldsymbol{R}_t^{t'}$ 是基 $G_{t'} = \{\boldsymbol{g}_{1;t'}, \boldsymbol{g}_{2;t'}, \cdots, \boldsymbol{g}_{n;t'}\}$ 到基 $G_t = \{\boldsymbol{g}_{1;t}, \boldsymbol{g}_{2;t}, \cdots, \boldsymbol{g}_{n;t}\}$ 的过渡矩阵，表达为

$$(\boldsymbol{g}_{1;t}, \boldsymbol{g}_{2;t}, \cdots, \boldsymbol{g}_{n;t}) = (\boldsymbol{g}_{1;t'}, \boldsymbol{g}_{2;t'}, \cdots, \boldsymbol{g}_{n;t'}) \boldsymbol{R}_t^{t'},$$

则 Bongartz 余完备化映射条件中的(b)：满足 $\boldsymbol{g}_{i;t'} \notin J$ 的任意一个 i，有 $\mathbf{R}_t^{t'}$ 的第 i 个行向量是非负的。

由其定义可知，在 $\mathscr{G}$-系统中能够自然地产生 2 种映射，分别是变异映射和 Bongartz 余完备化映射。

定义 11[11]　令 $\mathscr{G}_T$ 是一个在 $t_0 \in T$ 处的 $\mathscr{G}$-系统，对任意 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$，都存在变异映射

$$\mu_k: \mathscr{G}_T \longrightarrow \mathscr{G}_T$$
$$G_t \mapsto G_{t'},$$

其中，$G_{t'}$ 满足 $G_t \cap G_{t'} = G_t \backslash \{\boldsymbol{g}_{k;t}\}$，称 $G_{t'}$ 是 G_t 在 $\boldsymbol{g}_{k;t}$ 处的变异。为了强调变异与 $\boldsymbol{g}_{k;t}$ 的联系，常将 μ_k 记为 $\mu_{\boldsymbol{g}_{k;t}}$。

定义 12[11]　令 $\mathscr{G}_T$ 是一个在 $t_0 \in T$ 处的 $\mathscr{G}$-系统，对任意 $G_t \in \mathscr{G}_T$ 和 $G_{t_0} = \{\boldsymbol{g}_{1;t_0}, \boldsymbol{g}_{2;t_0}, \cdots, \boldsymbol{g}_{n;t_0}\}$ 的任意子集 J，都存在唯一的 $G_{t'} \in \mathscr{G}_T$ 满足

(a) $J \subseteq G_{t'}$；

(b) 对任意 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$，若 $\boldsymbol{g}_{k;t} = r_{1k}^{t'} \boldsymbol{g}_{1;t'} + r_{2k}^{t'} \boldsymbol{g}_{2;t'} + \cdots + r_{nk}^{t'} \boldsymbol{g}_{n;t'}$，则对任意满足 $\boldsymbol{g}_{i;t'} \notin J$ 的 i，有 $r_{ik}^{t'} \geqslant 0$，称这

样的 $G_{t'}$ 是 J 关于 G_t 的 Bongartz 余完备化。记 $G_{t'}=\mathcal{T}_J(G_t)$，称 $\mathcal{T}_J$ 为 Bongartz 余完备化映射。

本文的主要目的是利用 $\mathcal{G}$-系统证明任意丛代数的换位图具有非离开面性。根据文献[16]的命题 6.1 可知，丛代数的换位图与系数选择无关。因此，下文只考虑具有平凡系数的丛代数即可，对于这样的丛代数，其种子可由二元组$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{B})$表示。

3.2 丛代数中产生的 $\mathcal{G}$-系统

定义 13[16] 令 $\mathcal{A}$ 是在 t_0 处有初始种子的丛代数，U 是$[\boldsymbol{x}_{t_0}]$的任意子集，$[\boldsymbol{x}_t]$是丛代数 $\mathcal{A}$ 中任意一个非标记丛，一个非标记丛$[\boldsymbol{x}_{t'}]$被称为 U 关于$[\boldsymbol{x}_t]$的 Bongartz 余完备化，如果满足

（i）$U\subseteq[\boldsymbol{x}_{t'}]$；

（ii）对于每一个满足$x_{i;t'}\notin U$ 的 i，$\boldsymbol{R}_t^{t'}=\boldsymbol{G}_{t'}^{-1}\boldsymbol{G}_t$ 的第 i 个行向量是非负向量，

其中 $\boldsymbol{G}_t$、$\boldsymbol{G}_{t'}$ 分别是关于 t_0 在顶点 t、t' 处的 G-矩阵。记上述的非标记丛$[\boldsymbol{x}_{t'}]$为$[\boldsymbol{x}_{t'}]=\mathcal{T}_U([\boldsymbol{x}_t])$。

丛代数中变异映射是由递推公式(2)给出的丛的变异，这类映射作用在所有丛构成的集合上。通过以下定理可知，丛代数中能够自然地产生 $\mathcal{G}$-系统，并且丛代数中的变异映射和 Bongartz 余完备化映射与相应 $\mathcal{G}$-系统中的变异映射和 Bongartz 余完备化映射是相容的。

定理 3[11] 令 $\mathcal{A}$ 是在 t_0 处有初始种子的丛代数，$\boldsymbol{G}_t$ 是关于 t_0 在顶点 t 处的 G-矩阵，指标集 T 是 n-正则树 $\mathbb{T}_n$ 上所有顶点构成的集合，则 $\mathcal{G}_T=\{\boldsymbol{G}_t\mid t\in T\}$ 是一个在 t_0 处的 $\mathcal{G}$-系统，有交换图

$$\begin{tikzcd}
{[\boldsymbol{x}_t]} \arrow[r, leftrightarrow, "\mu_k"] \arrow[d, leftrightarrow] & {[\boldsymbol{x}_{t'}]} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\boldsymbol{G}_t \arrow[r, leftrightarrow, "\mu_k"] & \boldsymbol{G}_{t'}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[\boldsymbol{x}_t]} \arrow[r, "\mathcal{T}_U"] \arrow[d, leftrightarrow] & {[\boldsymbol{x}_{t'}]} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\boldsymbol{G}_t \arrow[r, "\mathcal{T}_J"] & \boldsymbol{G}_{t'}
\end{tikzcd}$$

成立，其中 U 是$[\boldsymbol{x}_{t_0}]$的子集，$J=\{\boldsymbol{g}^{t_0}(x_{i;t_0})\mid x_{i;t_0}\in U\}$，这里的 $\boldsymbol{g}^{t_0}$ 是引理 1(iii)中的单射。交换图中第一行的映射分别是丛代数 $\mathcal{A}$ 中的变异映射和 Bongartz 余完备化映射；第二行的映射分别是 $\mathcal{G}$-系统中的变异映射和 Bongartz 余完备化映射。

根据文献[11]的定理 8.11 可知，丛代数中的 Bongartz 余完备化不依赖于初始丛的选择。换句话说，在 Bongartz 余完备化中，U 不必局限于初始丛中，而可以是任意丛的子集。因此，定义 13 表述如下。

定义 14 令 $\mathcal{A}$ 是一个丛代数，U 是 $\mathcal{A}$ 中某些非标记丛的子集，$[\boldsymbol{x}_t]$是 $\mathcal{A}$ 中任意一个非标记丛，一个非标记丛$[\boldsymbol{x}_{t'}]=\mathcal{T}_U([\boldsymbol{x}_t])$被称为 U 关于$[\boldsymbol{x}_t]$的 Bongartz 余完备化，如果满足

（i）$U\subseteq[\boldsymbol{x}_{t'}]$；

（ii）对于每一个满足$x_{i;t'}\notin U$ 的 i，$\boldsymbol{G}_t^{t'}$ 的第 i 个行向量是非负向量，$\boldsymbol{G}_t^{t'}$ 表示关于 t' 在顶点 t 处的 G-矩阵。

注 9 本文主要目的是利用定理 3 证明任意丛代数的换位图具有非离开面性，这种方法与文献[10]中利用 c-向量的 Bongartz 完备化证明有所区别。首先，本文采用的是 g-向量的 Bongartz 余完备化，而文献[10]使用的是 c-向量的 Bongartz 完备化。其次，c-向量所对应的 C-矩阵不满足 $\mathcal{G}$-系统中的公理化条件。理由是考虑了 $\mathcal{G}$-系统中的变异条件。$\boldsymbol{C}$-矩阵的行列式为±1，所以 $\boldsymbol{C}$-矩阵的列向量构成的集合是 $\mathbf{Z}^n$ 的一组 $\mathbf{Z}$-基。由定理 2 可知，对于矩阵 $\boldsymbol{C}$，存在相应的矩阵 $\boldsymbol{G}$。因为 $\boldsymbol{G}$-矩阵满足 $\mathcal{G}$-系统的公理化条件，所以存在矩阵 $\boldsymbol{G}'$，使得矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{G}'$满足 $\mathcal{G}$-系统中的变异条件。根据其变异条件可知，这 2 个矩阵满足 $\boldsymbol{G}$-矩阵的变异递推关系。再次利用定理 2，对于 $\boldsymbol{G}'$，获得相应的矩阵 $\boldsymbol{C}'$。根据矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{G}'$的关系，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}'$满足 $\boldsymbol{C}$-矩阵的变异递推关系。由下面的例子可以看出，它们不一定满足 $\mathcal{G}$-系统中的变异条件。因此不能利用 c-向量产生 $\mathcal{G}$系统。

例 1 令$(\boldsymbol{x}_{t_0},\boldsymbol{B}_{t_0})$是丛代数的一个初始种子，其中 $\boldsymbol{x}_{t_0}=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{B}_{t_0}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$，假设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_{t_0}=\boldsymbol{I}_3$，$\boldsymbol{C}'=\mu_2(\boldsymbol{C})$，则有

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C'=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

将 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{C}'$分别看作其列向量的集合,用 $\boldsymbol{c}_i$、$\boldsymbol{c}'_i$分别表示它们的第 i 个列向量, $i\in\{1,2,3\}$,则 $\boldsymbol{C}\cap\boldsymbol{C}'\neq\boldsymbol{C}\setminus\{\boldsymbol{c}_2\}$,并且它们之间只有一个公共列向量,所以 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}'$不满足 $\mathscr{G}$-系统中的变异条件。

4　主要结果

本章利用相容性证明定理 4,相关知识见文献[6]。

定义 15　令 $\mathscr{A}$ 是一个丛代数,$G_{\mathscr{A}}$ 是丛代数的换位图,令 U 是一个非标记丛的子集,则由 U 决定的 $G_{\mathscr{A}}$ 的面 $\mathscr{F}$ 是 $G_{\mathscr{A}}$ 的满子图,且满足:$\mathscr{F}$ 中的点恰好是包含 U 作为子集的那些非标记丛。

从其定义可以看出,面 $\mathscr{F}$ 由子集 U 唯一决定,因此记为 $\mathscr{F}_U$。

定义 16　如果换位图 G 中连接任意两点之间的测地线位于包含这两点的最小面中,则称 G 具有非离开面性。

注 10　测地线是指连接两点之间的最短路。

定义 17　令 G 是换位图, $\mathscr{F}$是 G 的面,一个映射 $p:G\rightarrow\mathscr{F}$是投射,如果满足

(p1) $\forall v\in G$,有 $p(v)\in\mathscr{F}$;

(p2) 当 $v\in\mathscr{F}$,则 $p(v)=v$;

(p3) 若 v—w 是 G 中的边,则 $p(v)=p(w)$或 $p(v)$—$p(w)$是 $\mathscr{F}$中的边;

(p4) 若 v—w 是 G 中的边且 $v\in F$, $w\notin F$,则 $p(v)=p(w)$。

引理 2[6]　令 G 是换位图,如果对于 G 的每一个面 $\mathscr{F}$都存在一个投射,则 G 具有非离开面性。

下面,给出本文的主要结果。为了证明定理 4,首先给出如下引理。

引理 3　令 $\mathscr{A}$ 是一个丛代数,$G_{\mathscr{A}}$ 是其换位图,U 是一个非标记丛的子集。若$[\boldsymbol{x}_t]\xrightarrow{\mu_k}[\boldsymbol{x}_{t'}]$是 $G_{\mathscr{A}}$ 的一条边且 $U\subseteq[\boldsymbol{x}_t]$, $U\nsubseteq[\boldsymbol{x}_{t'}]$,则 $\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_t])=\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_{t'}])$。

证明　不妨令 $U=\{x_{1;t},x_{2;t},\cdots,x_{l;t}\}$,则$x_{k;t}\in U$。由引理 1(ⅲ)可知,对于$[\boldsymbol{x}_t]$、$[\boldsymbol{x}_{t'}]$,存在关于 t 在顶点 t、t'处的 G-矩阵 $\boldsymbol{G}_t$、$\boldsymbol{G}_{t'}$。将 $\boldsymbol{G}_t$、$\boldsymbol{G}_{t'}$看作其列向量的集合,可简记为

$$\boldsymbol{G}_t=\{\boldsymbol{g}_{1;t},\boldsymbol{g}_{2;t},\cdots,\boldsymbol{g}_{n;t}\},\quad \boldsymbol{G}_{t'}=\{\boldsymbol{g}_{1;t'},\boldsymbol{g}_{2;t'},\cdots,\boldsymbol{g}_{n;t'}\}。$$

由定理 3 可知,$\boldsymbol{G}_{t'}=\mu_k(\boldsymbol{G}_t)$,则当 $i\neq k$ 时,有 $\boldsymbol{g}_{i;t}=\boldsymbol{g}_{i;t'}$。令

$$J=\{\boldsymbol{g}^t(x_{i;t})\mid x_{i;t}\in U\}=\{\boldsymbol{g}_{1;t},\ \boldsymbol{g}_{2;t},\cdots,\boldsymbol{g}_{l;t}\},$$

则有 $J\subseteq\boldsymbol{G}_t$。因为 $\boldsymbol{G}_t$ 到 $\boldsymbol{G}_t$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{R}_t^t=\boldsymbol{I}_n$,所以对于任意满足$\boldsymbol{g}_{i;t}\notin J$ 的 i,有 $\boldsymbol{R}_t^t$的第 i 个行向量是非负向量。由定义 12 可知,$\mathscr{T}_J(\boldsymbol{G}_t)=\boldsymbol{G}_t$。因为$x_{k;t}\in U$,所以$\boldsymbol{g}_{k;t}\in J$。令 $G_{t_1}=\mathscr{T}_{g_{k;t}}(\boldsymbol{G}_{t'})$,证明 $G_{t_1}=\boldsymbol{G}_t$。任意$\boldsymbol{g}_{i;t}\in\boldsymbol{G}_t$,若 $i=k$,则由 $G_{t_1}=\mathscr{T}_{g_{k;t}}(\boldsymbol{G}_{t'})$可得, $\boldsymbol{g}_{k;t}\in G_{t_1}$。不妨令 $\boldsymbol{g}_{k;t_1}=\boldsymbol{g}_{k;t}$。若 $i\neq k$,则由 $\boldsymbol{G}_{t'}=\mu_k(\boldsymbol{G}_t)$可得,$\boldsymbol{g}_{i;t}=\boldsymbol{g}_{i;t'}\in\boldsymbol{G}_{t'}$。考虑 $\boldsymbol{g}_{i;t}$关于 G_{t_1}的线性展开

$$\boldsymbol{g}_{i;t}=r_{1i;t'}^{t_1}\boldsymbol{g}_{1;t_1}+r_{2i;t'}^{t_1}\boldsymbol{g}_{2;t_1}+\cdots+r_{ni;t'}^{t_1}\boldsymbol{g}_{n;t_1}。\tag{6}$$

因为 $G_{t_1}=\mathscr{T}_{g_{k;t}}(\boldsymbol{G}_{t'})$,所以等式(6)中 $\boldsymbol{g}_{j;t_1}(j\neq k)$前面的系数都是非负的。取 N 是使得 $N+r_{ki;t'}^{t_1}>0$ 的正整数,由式(6)可得

$$\boldsymbol{g}_{i;t}+N\boldsymbol{g}_{k;t_1}=r_{1i;t'}^{t_1}\boldsymbol{g}_{1;t_1}+r_{2i;t'}^{t_1}\boldsymbol{g}_{2;t_1}+\cdots+(N+r_{ki;t'}^{t_1})\boldsymbol{g}_{k;t_1}+\cdots+r_{ni;t'}^{t_1}\boldsymbol{g}_{n;t_1}。\tag{7}$$

显然,出现在等式(7)中的系数都是非负的且$\boldsymbol{g}_{k;t_1}\in\boldsymbol{G}_t$。对 $\boldsymbol{G}_t$ 和 G_{t_1}应用 $\mathscr{G}$-系统中的唯一性条件,则$\boldsymbol{g}_{i;t}\in G_{t_1}$。所以$\boldsymbol{G}_t\subseteq G_{t_1}$,由于 $\boldsymbol{G}_t$、G_{t_1}都是 $\mathbf{Z}^n$ 的一组 $\mathbf{Z}$-基,因此 $\boldsymbol{G}_t=G_{t_1}=\mathscr{T}_{g_{k;t}}(\boldsymbol{G}_{t'})$。由文献[11]的推论 6.7 可得

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_J(\boldsymbol{G}_{t'})&=\mathscr{T}_{g_{1;t}}\mathscr{T}_{g_{2;t}}\cdots\mathscr{T}_{g_{k-1;t}}\mathscr{T}_{g_{k+1;t}}\cdots\mathscr{T}_{g_{l;t}}\mathscr{T}_{g_{k;t}}(\boldsymbol{G}_{t'})\\&=\mathscr{T}_{g_{1;t}}\mathscr{T}_{g_{2;t}}\cdots\boldsymbol{T}_{g_{k-1;t}\mathscr{T}_{g_{k+1;t}}}\cdots\mathscr{T}_{g_{l;t}}(\boldsymbol{G}_t)=\boldsymbol{G}_t,\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{T}_J(\boldsymbol{G}_t)=\mathscr{T}_J(\boldsymbol{G}_{t'})$。由定理 3 可知, $\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_t])=\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_t])$。

定理 4 对于任意一个丛代数 $\mathscr{A}$,其换位图 $G_{\mathscr{A}}$ 都具有非离开面性。

证明 由引理2可知,只需证对 $G_{\mathscr{A}}$ 的任意面 $\mathscr{F}$ 都存在投射 $p:G_{\mathscr{A}}\to\mathscr{F}$ 即可。

令 U 是任意一个非标记丛的子集,$\mathscr{F}_U$ 是由 U 决定的 $G_{\mathscr{A}}$ 的面,用 $v(G_{\mathscr{A}})$、$v(\mathscr{F}_U)$ 分别表示 $G_{\mathscr{A}}$、$\mathscr{F}_U$ 的顶点集,则由定义14知,存在映射

$$p_U:v(G_{\mathscr{A}})\to v(\mathscr{F}_U),$$
$$[\boldsymbol{x}_t]\mapsto \mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_t])。$$

步骤 1 证明 p_U 满足定义17中的(p1)。

这是很显然的结果。对于 $v(G_{\mathscr{A}})$ 中任意一点 $[\boldsymbol{x}_t]$,有 $p_U([\boldsymbol{x}_t])=\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_t])$。由定义14可知,$U\subseteq\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_t])$,所以 $p_U([\boldsymbol{x}_t])\in v(\mathscr{F}_U)$。

步骤 2 证明 p_U 满足定义17中的(p2)。

当 $[\boldsymbol{x}_t]\in v(\mathscr{F}_U)$ 时,则 $U\subseteq[\boldsymbol{x}_t]$。由注6可知,$\boldsymbol{G}_t^t=\boldsymbol{I}_n$,则对任意满足 $x_{i;t}\notin U$ 的 i,有 $\boldsymbol{G}_t^t$ 的第 i 个行向量是非负向量。由定义14可知,$p_U([\boldsymbol{x}_t])=\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_t])=[\boldsymbol{x}_t]$。

步骤 3 证明 p_U 满足定义17中的(p3)。

若 $[\boldsymbol{x}_t]\xrightarrow{\mu_k}[\boldsymbol{x}_{t'}]$ 是 $G_{\mathscr{A}}$ 的一条边,则 $[\boldsymbol{x}_{t'}]=\mu_k([\boldsymbol{x}_t])$。不妨设 $U\subseteq[\boldsymbol{x}_{t_1}]$,由引理1(ⅲ)可知,对于 $[\boldsymbol{x}_t]$、$[\boldsymbol{x}_{t'}]$,存在关于 t_1 在顶点 t、t' 处的 G-矩阵 $\boldsymbol{G}_t$、$\boldsymbol{G}_{t'}$。将 $\boldsymbol{G}_t$、$\boldsymbol{G}_{t'}$ 看作其列向量的集合,可简记为

$$\boldsymbol{G}_t=\{\boldsymbol{g}_{1;t},\boldsymbol{g}_{2;t},\cdots,\boldsymbol{g}_{n;t}\},\qquad \boldsymbol{G}_{t'}=\{\boldsymbol{g}_{1;t'},\boldsymbol{g}_{2;t'},\cdots,\boldsymbol{g}_{n;t'}\},$$

由定理3可知,$\boldsymbol{G}_{t'}=\mu_k(\boldsymbol{G}_t)$,则当 $i\neq k$ 时,有 $\boldsymbol{g}_{i;t}=\boldsymbol{g}_{i;t'}$。令

$$J=\{\boldsymbol{g}^{t_1}(x_{i;t_1})\mid x_{i;t_1}\in U\}=\{\boldsymbol{g}_{1;t_1},\boldsymbol{g}_{2;t_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{l;t_1}\},$$

假设 $G_v=\mathscr{T}_J(\boldsymbol{G}_t)$,$G_w=\mathscr{T}_J(\boldsymbol{G}_{t'})$,则 $J\subseteq G_v\cap G_w$。由文献[11]的定理6.8知,$G_v=G_w$ 或者 $G_v\xrightarrow{\mu_*}G_w$。根据定理3,得 $\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_t])=\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_{t'}])$ 或者 $\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_t])\xrightarrow{\mu_*}\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_{t'}])$,即 $p_U([\boldsymbol{x}_t])=p_U([\boldsymbol{x}_{t'}])$ 或者 $p_U([\boldsymbol{x}_t])\xrightarrow{\mu_*}p_U([\boldsymbol{x}_{t'}])$ 是 $\mathscr{F}_U$ 中的一条边。

步骤 4 证明 p_U 满足定义17中的(p4)。

若 $[\boldsymbol{x}_t]\xrightarrow{\mu_k}[\boldsymbol{x}_{t'}]$ 是 $G_{\mathscr{A}}$ 的边且 $[\boldsymbol{x}_t]\in v(\mathscr{F}_U)$,$[\boldsymbol{x}_{t'}]\notin v(\mathscr{F}_U)$,则 $U\subseteq[\boldsymbol{x}_t]$,$U\nsubseteq[\boldsymbol{x}_{t'}]$。由引理3,可得 $\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_t])=\mathscr{T}_U([\boldsymbol{x}_{t'}])$,即 $p_U([\boldsymbol{x}_t])=p_U([\boldsymbol{x}_{t'}])$。

综上所述,p_U 可以扩展成 $G_{\mathscr{A}}\to\mathscr{F}_U$ 的投射,证明完毕。

参考文献:

[1] FOMIN S, ZELEVINSKY A. Cluster algebras I: foundations[J]. Journal of the American Mathematical Society, 2002, 15(2):497-529.

[2] FOMIN S, ZELEVINSKY A. Cluster algebras II: finite type classification[J]. Inventiones Mathematicae, 2003, 154(1):63-121.

[3] CHAPOTON F, FOMIN S, ZELEVINSKY A. Polytopal realizations of generalized associahedra[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2002, 45(4):537-566.

[4] READING N. Cambrian lattices[J]. Advances in Mathematics, 2006, 205(2):313-353.

[5] HOHLWEG C, LANGE C, THOMAS H. Permutahedra and generalized associahedra[J]. Advances in Mathematics, 2011, 226(1):608-640.

[6] CEBALLOS C, PILAUD V. The diameter of type *D* associahedra and the non-leaving-face property[J]. European Journal of Combinatorics, 2016, 51:109-124.

[7] SLEATOR D, TARJAN R, THURSTON W. Rotation distance, trangulations, and hyperbolic geometry[J]. Journal of the American Mathematical Society, 1988, 1(3):647-681.

[8] WILLIAMS N. *W*-associahedra have the non-leaving-face property[J]. European Journal of Combinatorics, 2017, 62:272-285.

[9] BRÜSTLE T, ZHANG Jie. Non-leaving-face property for marked surfaces[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2019, 14(3):521-534.

(下转第92页)