山东大学学报(理学版)2025 年 5 月 第 60 卷 第 5 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.5, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)05-0074-05 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.441

基于量子逻辑的正交模格新刻画

杨小飞[1],肖飞虎[1],马盈仓[1],辛小龙[1,2*]
(1.西安工程大学理学院, 陕西 西安 710048; 2.西北大学数学学院, 陕西 西安 710127)

摘要:为了研究正交模格中正交模律新的刻画,本文从代数的视角,借助补运算给出了正交模律的等价刻画。利用部分运算加法和减法的互逆性给出了正交模律的等价刻画。利用全局运算乘法和蕴涵的剩余性给出了正交模律的等价刻画,这些事实揭示正交模律产生的内在规律。通过例子说明正交模格上的全局运算加法和乘法都是非结合的和非交换的。

关键词:正交模格;正交格;布尔代数;希尔伯特空间;量子逻辑

中图分类号:O153.1 **文献标志码**:A

引用格式:杨小飞,肖飞虎,马盈仓,等. 基于量子逻辑的正交模格新刻画[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):74-78.

New characterizations of orthogonal modular lattices based on quantum logic

YANG Xiaofei[1], XIAO Feihu[1], MA Yingcang[1], XIN Xiaolong[1,2*]
(1. School of Science, Xian Polytechnic University, Xi'an 710048, Shaanxi, China; 2. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, Shaanxi, China)

Abstract: In order to study some new characterizations of orthomodular law in orthogonal modular lattices, we study orthomodular law from an algebraic perspective. By using complement operations, the reciprocal nature of partial addition and subtraction operations, and residuated property of global multiplication and implication, the equivalent characterizations of orthomodular law are given, respectively. These facts reveal the inherent laws of the generation of orthomodular law. By some examples, it is shown that in general the global operations of addition and multiplication on orthogonal modular lattices are non-associative and non-commutative.

Key words: orthogonal modular lattice; orthogonal lattice; Boolean algebra; Hilbert space; quantum logic

0 引言

正交模格是量子逻辑的典型代表,具有量子逻辑的特质,见文献[1-2],同时它也是分配格的推广,保留了分配律的部分性质。近年来, 正交模格和其他结构的关系也有广泛的研究。文献[3]研究了各种剩余结构之间的关系,给出了正交模格的一种新的完备化方法。文献[4]证明了正交模格是特殊的 L-代数,揭示了 L-代数的量子特性。文献[5]以正交模格为模型,提出了量子 MV-代数。文献[6]利用拓扑理论,证明了正交模格与正交模空间范畴对偶等价。文献[7]利用一个等式刻画正交模律。在此基础上,本文利用运算的互逆性和剩余性给出了正交模律的两个新的等价刻画。最后从 代数的视角总结了以正交模格为代表的量子逻辑的 2 个特点:运算的局部性和非结合性。这些工作体现量子理论中量子消失和量子纠缠的机理,为非结合和非交换代数的研究提供了具体模型。

收稿日期:2023-10-20; **网络出版时间**:2024-12-10 14:25:35
基金项目:西安工程大学研究生教育综合改革研究与实践基金资助项目(22yjzg05); 国家自然科学基金资助项目(61976130); 国家外国专家基金资助项目(DL2023041002L); 榆林市产学研基金资助项目(CXY-2022-59)
第一作者:杨小飞(1982—),男,副教授,博士,研究方向为模糊逻辑和机器学习. E-mail:yangxiaofei2002@163.com
* **通信作者**:辛小龙(1955—),男,教授,博士,研究方向为逻辑代数及其上的不确定性理论. E-mail:xlxin@nwu.edu.cn

1　预备知识

定义 1[8]　设 L 是非空集合,若其上二元运算 $\wedge$, $\vee$ 满足: $\forall a,b,c\in L$,

(1) (结合律) $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$, $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$;

(2) (交换律) $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$;

(3) (幂等律) $a\vee a=a$, $a\wedge a=a$;

(4) (吸收律) $a\vee(a\wedge b)=a$, $a\wedge(a\vee b)=a$,

则称 $(L,\wedge,\vee)$ 为格,格 L 上序关系 $\leqslant$ 定义如下: $a\leqslant b$ 当且仅当 $a\vee b=b$。若格 L 有最小元 0 和最大元 1,称 $(L,\leqslant,\wedge,\vee,0,1)$ 为有界格。

定义 2[8]　称格 L 为分配格,若它满足分配律,即 $\forall a,b,c\in L$,

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)。$$

定理 1[6]　设 L 是格,下列条件等价: $\forall a,b,c\in L$,

(1) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$;

(2) $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$。

定理 2[8]　L 是分配格当且仅当 L 没有 M_3 和 N_5 子格,如图 1、2 所示。

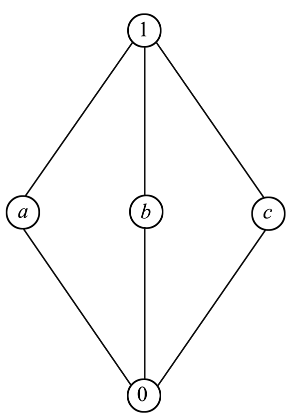

图 1　M_3 格

Fig.1　M_3 lattice

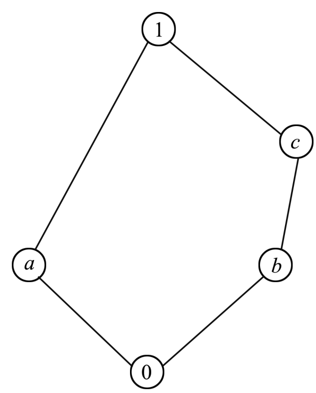

图 2　N_5 格

Fig.2　N_5 lattice

定义 3[8]　设 L 是有界格, $a\in L$,若存在 $b\in L$ 满足 $a\wedge b=0$, $a\vee b=1$,称 b 是 a 的补元。若有界格 L 每一个元是有补的,称 L 是有补格。

例 1　容易验证 N_5 格是有补格,但补元不唯一,例如 a 补元是 b 或 c。

一个自然的问题是:在什么条件下补元是唯一的? 见下面的定理。

定理 3[8]　分配格 L 中每个元素最多有一个补元。

布尔格是经典逻辑的代数语义,可以把格中 $\vee$ 看成逻辑“或”,格中 $\wedge$ 看成逻辑“与”,格中补看成命题的“否”。根据定理 3,布尔格的一个简洁定义如下。

定义 4[8]　若 L 是有补分配格,则称 L 为布尔格。

定义 5[8]　设 L 是有界格,称一元运算 $'\colon L\to L$ 是补运算,若满足 $a\wedge a'=0$, $a\vee a'=1$。

在例 1 中,有两个补运算 f,g,它们分别是 $f(0)=1$, $f(a)=b$, $f(c)=a$, $f(b)=a$, $f(1)=0$, $g(0)=1$, $g(a)=c$, $g(c)=a$, $g(b)=a$, $g(1)=0$。

为了让补运算有更好的性质,例如补运算是对合的,补运算有 DeMorgan 律,下面给出正交补的定义。

定义 6[8]　设 L 是有界格,称补运算 $'\colon L\to L$ 是正交补运算,若它满足:

(1) 若 $a\leqslant b$,则 $b'\leqslant a'$;

(2) $a''=a$。

定义 7[8]　正交格是具有正交补的有界格。

容易验证正交格满足 DeMorgan 律,即$(a\wedge b)'=a'\vee b'$;$(a\vee b)'=a'\wedge b'$。

例 2[1] 令$0'=1$, $a'=d$, $c'=b$, $b'=c$, $d'=a$, $1'=0$,容易验证 O_6 格是正交格,但显然不是分配格,如图 3 所示。

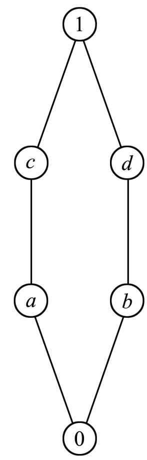

图 3 O_6 格
Fig.3 O_6 lattice

定义 8[1] 正交模格 L 是满足正交模律的正交格,这里正交模律是指$\forall a,b\in L$, $a\leqslant b\Rightarrow b=a\vee(b\wedge a')$。

希尔伯特空间是正交模格的主要模型。下面利用希尔伯特空间说明正交模律的几何意义。在三维空间中,x 表示过原点的直线,y 表示含有直线 x 的平面,即 $x\leqslant y$, y 平面可以由直线 x 和 y 平面的另一条直线 $y\cap x'$(这条直线与直线 x 是正交的)张成,即 $y=x\vee(y\wedge x')$。

例 3 正交格 O_6(见例 2)不是正交模格,因为 $a\leqslant c$ 但 $c\neq a\vee(c\wedge a')$。

定义 9[1] 设 L 是正交模格,$a,b\in L$,若$(a\wedge b)\vee(a'\wedge b)=b$,则称 a 与 b 是可换的。

定理 4[1] 设 L 是正交模格,$a,b\in L$, a 与 b 是可换的当且仅当$(a\vee b')\wedge b\leqslant a$。

2 主要结果

在例 1 中,a 的补元可以是 b,但 b 不是集合$\{x\in L|x\wedge a=0\}$的极大元。在例 2 中,c 的补元可以是 b,但 b 不是集合$\{x\in L|x\wedge c=0\}$的极大元。从例 1 和例 2 可知,一方面补元未必是极大的;另一方面,布尔格是经典逻辑的代数语义,满足原命题和否命题有且只有一个是真命题,即 $a\vee a'=1$ 且 $a\wedge a'=0$,因此,当我们要突破经典逻辑,设计一种非经典逻辑时,既要保留每个命题有否命题,又要否命题是极大的。根据定理 3,这样的非经典逻辑的代数语义一般不是分配格,即需要设计一类正交格,它们未必满足分配律,但补元是极大的。由于经典逻辑代数语义是有补分配格,从而我们设计的这类正交格,其对应的逻辑是对经典逻辑的突破。为此,给出如下定理。

定理 5 设 L 是正交格,对任意的 $a\in L$, a'是集合$\{x\in L|x\wedge a=0\}$的极大元当且仅当 L 满足正交模律。

证明 $\Rightarrow$。下证当 $a\leqslant b$ 时,有 $a\vee(a'\wedge b)=b$。由条件知 b'是$\{x\in L|x\wedge b=0\}$的极大元,下证$[a\vee(a'\wedge b)]'$是$\{x\in L|x\wedge b=0\}$的元素。由 DeMorgan 律知$[a\vee(a'\wedge b)]'\wedge b=(a'\wedge b)\wedge(a'\wedge b)'=0$。显然 $a\vee(a'\wedge b)\leqslant b$,从而由$[a\vee(a'\wedge b)]'\geqslant b'$和 b'极大性知$[a\vee(a'\wedge b)]'=b'$,即 $a\vee(a'\wedge b)=b$。

$\Leftarrow$。令 $A=\{x\in L|x\wedge a=0\}$,则 $a'\in A$。对任意 $b\in A$,且 $a'\leqslant b$,下证 $a'=b$。由条件知 $a'\vee(b\wedge a)=b$,由 $b\in A$ 知 $b\wedge a=0$,所以 $a'=b$。

定理 6[1] 设 L 是正交模格,$a\in L$,则 a 的补元构成的集合等于$\{(x\wedge(x'\vee a'))\vee(x'\wedge a')|x\in L\}$。

从定理 5、6 可知,正交模格的补元具有极大性,但不唯一。正交模格是布尔格的推广,那么布尔格中补元具有什么性质呢? 为此,给出下面定理。

定理 7 设 L 是正交格,对任意的 $a\in L$, a'是集合$\{x\in L|x\wedge a=0\}$的最大元当且仅当 L 是布尔格。

证明 $\Rightarrow$。利用反证法证明必要性。假设 L 不是布尔格,从而也不是分配格,由定理 2 知,存在 3 个不同元素 $a,b,c\in L$ 满足 $a\wedge b=a\wedge c=a_0$; $a\vee b=a\vee c=a_1$。a'是集合$\{x\in L|x\wedge a=0\}$的最大元知 a'是集合$\{x\in L|x\wedge a=0\}$的极大元,从而由定理 5 知正交模律成立。因此 $b\vee[a_1'\vee(a\wedge a_0')]=b\vee a_0\vee[a_1'\vee(a\wedge a_0')]=b\vee a_1'\vee a=a_1\vee a_1'=1$,同时 $b\wedge[a_1'\vee(a\wedge a_0')]=b\wedge a_1\wedge[a_1'\vee(a\wedge a_0')]=b\wedge a\wedge a_0'=a_0\wedge a_0'=0$。这说明 b 是 $a_1'\vee(a\wedge a_0')$的补元,因此 b 是集合$\{x\in L|x\wedge[a_1'\vee(a\wedge a_0')]=0\}$的最大元。类似地,证明 c 是 $a_1'\vee(a\wedge a_0')$的补元,因此 c 也是集合$\{x\in L|x\wedge[a_1'\vee(a\wedge a_0')]=0\}$的最大元。因此 $b=c$,这与假设矛盾,从而 L 是分配格。因此 L 是布尔格。

$\Leftarrow$。下面证明 a'是$\{x\in L|x\wedge a=0\}$的最大元。假设 $b\wedge a=0$,下证 $b\leqslant a'$。由于 L 是分配格,$b=b\wedge 1=b\wedge(a\vee a')=(b\wedge a)\vee(b\wedge a')=0\vee(b\wedge a')=b\wedge a'$。

由定理 7 可知,布尔代数本质是补元具有最大性,当把补元具有最大性松弛为补元具有极大性时,布尔代数也就被推广为正交模格。这既是布尔代数与正交模格的区别,又是布尔代数与正交模格的联系。因此,

从补元的视角更容易看清布尔代数与正交模格的关系。

设 L 是正交格,若 $x \leqslant y'$,则称 x 与 y 是正交的,记为 $x \perp y$。定义 $x+y=x \vee y$,若 $x \perp y$,其他情况无定义。定义 $x-y=x \wedge y'$,若 $x \geqslant y$;其他情况无定义。根据这些运算,下面给出正交模律的另外一个刻画。

定理 8　设 L 是正交格,正交模律成立充要条件是 $a+b=c$ 当且仅当 $a=c-b$。

证明　$\Rightarrow$。设 $a+b=c$,说明 $a \leqslant b'$ 且 $a \vee b=c$,从而 $c \geqslant b$。根据减法的定义和正交模律可得,$c-b=c \wedge b'=(a \vee b) \wedge b'=a$。设 $a=c-b$,这说明 $c \geqslant b$ 且 $c \wedge b'=a$,因此 $a \leqslant b'$。根据加法的定义和正交模律可得 $a+b=a \vee b=(c \wedge b') \vee b=c$。

$\Leftarrow$。设 $a \leqslant b'$,下证 $a \vee (a' \wedge b')=b'$。因为 $a \leqslant b'$,所以存在 c 满足 $b+a=a \vee b=c$,这说明 $c'=a' \wedge b'$。因此由条件知 $[a \vee (a' \wedge b')]'=(a \vee c')'=a' \wedge c=c-a=b$。证明了 $a \vee (a' \wedge b')=b'$。

正交格上的加法"+"是局部运算,现在将局部运算"+"扩展为全局运算 $\oplus$,$\boxplus$ 具体定义如下:$a \oplus b=(a \wedge b')+b$, $a \boxplus b=(a' \wedge b)+a$。为讨论这些运算在正交模格中的性质,下面首先介绍正交模格的重要计算工具——Foulis-Holland 定理。

定理 9[1]　设 L 是正交模格,$a,b,c \in L$,若 a 与 b,a 与 c 可换,则由 $\{a,b,c\}$ 生成 L 的分配子格。

命题 1　设 L 是正交模格,$a,b \in L$。$a \oplus b=b \oplus a$ 当且仅当 a 与 b 是可换的。

证明　$\Rightarrow$。由 $a \oplus b=b \oplus a$ 知 $(a \wedge b') \vee b=(b \wedge a') \vee a$。等式两边取补得 $(a' \vee b) \wedge b'=(b' \vee a) \wedge a' \leqslant a'$,由可换性的刻画(见定理 4)知 a' 与 b' 可换,从而容易验证 a 与 b 是可换的。

$\Leftarrow$。当 a 与 b 可换时,b 与 b' 可换恒成立,由定理 9 知,a,b,b' 满足分配律,从而 $(a \wedge b') \vee b=(a \vee b) \wedge (b' \vee b)=a \vee b$。同理 $(b \wedge a') \vee a=(a \vee b) \wedge (a' \vee a)=a \vee b$,因此 $a \oplus b=b \oplus a$。

推论 1　设 L 是正交模格,$a,b \in L$, $a \oplus b=a \boxtimes b$ 当且仅当 a 与 b 是可换的。

推论 2　设 L 是正交模格,$a,b \in L$, $a \oplus b=a \vee b$ 当且仅当 a 与 b 是可换的。

上面的定理说明,当局部运算"+"扩展为全局运算 $\oplus$ 时,交换律一般不成立。由定理 9 容易证明正交模格 L 上的 $\oplus$ 满足交换律当且仅当 L 是布尔格。

下面进一步研究正交模格中 $\oplus$ 的运算性质,下面的例子说明,运算 $\oplus$ 不满足交换律,也不满足结合律。

例 4　令 $0'=1$, $a'=f$, $b'=g$, $c'=h$, $d'=i$, $e'=j$,容易验证下面的格是正交模格,如图 4 所示。但运算 $\oplus$ 不满足交换律,因为 $d \oplus a=a \neq d=a \oplus d$。同时运算 $\oplus$ 不满足结合律,因为 $b \oplus (d \oplus a)=h \neq a=(b \oplus d) \oplus a$。

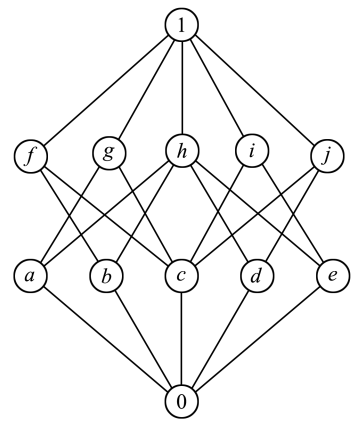

图 4　正交模格 1
Fig.4　Orthogonal modular lattice 1

下面定义正交格上的全局运算——乘法:$a \odot b=(a' \oplus b')'$, $a \boxtimes b=(a' \boxplus b')'$。定义正交格上的全局运算,箭头:$a \to b=b \oplus a'$。容易验证 $a \odot b=(a \vee b') \wedge b$, $a \boxtimes b=(a' \vee b) \wedge a$, $a \to b=(b \wedge a) \vee a'$,其中 $a \odot b$、$a \to b$ 分别称为 Sasakian 乘法、Sasakian 箭头。下面给出正交模律的第三类刻画。

定理 10　设 L 是正交格,正交模律成立充要条件是 $c \odot a \leqslant b$ 当且仅当 $c \leqslant a \to b$($\forall a,b,c \in L$)。

证明　$\Rightarrow$。设 $c \odot a \leqslant b$,则 $(c \vee a') \wedge a \leqslant b$,从而 $(c \vee a') \wedge a \leqslant b \wedge a$,因此 $a' \vee [(c \vee a') \wedge a] \leqslant a' \vee (b \wedge a)$。由于正交模律成立,有 $a' \vee [(c \vee a') \wedge a]=c \vee a'$,因此 $c \leqslant a' \vee (b \wedge a)$,即 $c \leqslant a \to b$。

设 $c \leqslant a \to b$,则 $c \leqslant a' \vee (b \wedge a)$,从而 $c \vee a' \leqslant a' \vee (b \wedge a)$,因此 $(c \vee a') \wedge a \leqslant [a' \vee (b \wedge a)] \wedge a$。由正交模律成立知 $[a' \vee (b \wedge a)] \wedge a=b \wedge a \leqslant b$,从而 $(c \vee a') \wedge a \leqslant b$,即 $c \odot a \leqslant b$。

$\Leftarrow$。下证当 $a \leqslant b$ 时,有 $a \vee (a' \wedge b)=b$。显然 $a \vee (a' \wedge b) \leqslant b$,只需证明 $b \leqslant a \vee (a' \wedge b)=a' \to b$。根据条件只需证明 $b \odot a' \leqslant b$,根据乘法定义 $b \odot a'=(b \vee a) \wedge a'=b \wedge a' \leqslant b$。

类似地,可以证明如下定理。

定理 11　设 L 是正交格,正交模律成立充要条件是 $a \boxtimes c \leqslant b$ 当且仅当 $c \leqslant a \to b$($\forall a,b,c \in L$)。

根据 $\odot$ 定义、命题 1 和推论 2 可得:

命题 2 设 L 是正交模格, $a, b \in L$, 则

(1) $a \odot b = b \odot a$ 当且仅当 a 与 b 是可换的;

(2) $a \odot b = a \wedge b$ 当且仅当 a 与 b 是可换的。

例 5 令 $0' = 1$, $a' = g$, $b' = h$, $c' = i$, $d' = j$, $e' = k$, $f' = m$, 容易验证下面的格是正交模格, 如图 5 所示。但 $\odot$ 不满足交换律: $a \odot j = j \neq a = j \odot a$。同时 $\odot$ 不满足结合律: $a \odot (c \odot f) = f \neq 0 = (a \odot c) \odot f$。

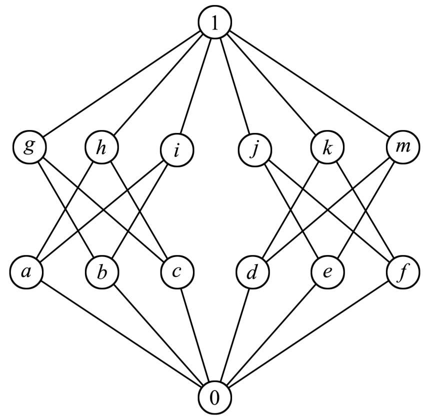

图 5 正交模格 2
Fig.5 Orthogonal modular lattice 2

3 结论与展望

本文从代数的视角重建了正交模格理论, 给出了正交模律和运算交换性的刻画。利用否运算的极大性、加法和减法互逆性与乘法和蕴涵的剩余性刻画了正交模律。这些工作揭示了正交模律的内在规律, 并且根据实际的需求设计相应的公理系统。在正交模格中 2 个元素可换的概念是抽象的, 本文利用加法运算的交换性和乘法运算的交换性对元素可换性分别进行了刻画。同时通过例子说明正交模格的加法运算和乘法运算一般是非可换的和非结合的, 说明量子逻辑和量子计算的内在规律。如何把量子逻辑和模糊逻辑统一到一种框架下是今后的一个研究课题。

参考文献:

[1] KALMBACH G. Orthomodular lattices[M]. London: Academic Press, 1983.

[2] FREYTES H. An equational theory for σ-complete orthomodular lattices[J]. Soft Computing, 2020, 24:10257-10264.

[3] FAZIO D, LEDDA A, PAOLI F. Residuated structures and orthomodular lattices[J]. Studia Logica, 2021, 9:1201-1239.

[4] WU Yali, YANG Yichuan. Orthomodular lattices as L-algebras[J]. Soft Computing, 2020, 24:14391-14400.

[5] IORGULESCU A. On quantum-MV algebras, part Ⅰ: the orthomodular algebras[J]. Scientific Annals of Computer Science, 2021, 31(2):163-222.

[6] MCDONALD J, BIMBÓ K. Topological duality for orthomodular lattices[J]. Mathematical Logic Quarterly, 2023, 69(2): 174-191.

[7] BONZIO S, CHAJDA I. A note on orthomodular lattices[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2017, 56:3740-3743.

[8] BLYTH T S. Lattices and ordered algebraic structures[M]. London: Springer, 2005.

(编辑:陈丽萍)