山东大学学报(理学版)2025 年 5 月 第 60 卷 第 5 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.5, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)05-0067-07 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.502

一阶逻辑中的近似推理与强近似推理

袁一丹,惠小静*,王前
(延安大学数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000)

摘要:利用伪距离定义一阶逻辑度量空间中 3 种不同的近似推理模式,证明 3 者之间的等价性,给出了一种基于相似度的近似推理模式 $\Gamma \vdash^{\delta} \alpha$,研究了该推理模式与前 3 种推理模式之间的关系,最后提出了强近似推理模式。

关键词:一阶逻辑;公理化真度;近似推理;强近似推理

中图分类号:O159 **文献标志码**:A

引用格式:袁一丹,惠小静,王前. 一阶逻辑中的近似推理与强近似推理[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):67-73.

Approximate reasoning and strong approximate reasoning in first-order logic

YUAN Yidan, HUI Xiaojing*, WANG Qian
(School of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shaanxi, China)

Abstract: In the first-order logical metric space, three different types of approximate reasoning patterns are defined based on pseudo distance, and the equivalence relationship between the three approximate reasoning patterns is proved. In addition, a new approximate reasoning mode $\Gamma \vdash^{\delta} \alpha$ is proposed based on similarity, and the relationship between this reasoning mode and three reasoning modes is studied. Finally, a strong approximate reasoning mode is proposed.

Key words: first-order logic; axiomatic truth degree; approximate reasoning; strong approximate reasoning

0 引言

近似推理理论是数理逻辑在应用方面的一个研究热点,国内外学者对其进行了大量的研究,取得了丰富的研究成果。王国俊等[1]基于势为 2 的均匀概率空间的无穷乘积,定义了经典二值命题逻辑公式的真度。在 Łukasiewicz n 值命题逻辑中,王国俊等[2]中给出了公式的真度概念并引发了一系列后续研究[3-9],逐步形成了计量逻辑学[10]。王国俊[11]利用真度进一步定义了相似度和伪距离,研究了逻辑理论的发散度与相容度,提出了三种基于伪距离的近似推理机制,将近似推理研究展开到经典逻辑度量空间中。惠小静等[12]利用自然数集 N 上的随机数列,在经典命题逻辑系统中引入了 D-真度的概念,建立了 D-逻辑度量空间中 3 种不同类型的近似推理模式,初步讨论了它们之间的关系;文献[13-15]对几种命题逻辑系统中的近似推理及其等价性进行了深入地研究。

文献[16-17]借助相似度提出了经典命题逻辑系统中的 2 种近似推理模式。目前,对于命题逻辑的计量化研究主要基于语义理论,由于一阶语言解释的任意性超出了集合的范畴,导致一阶逻辑语义理论的复杂程度远远超过命题逻辑,从而使得基于语义方法构建一阶逻辑公式的真度理论非常困难。文献[18]将计量逻辑学引入到一阶逻辑中,从语构角度定义了一类一阶逻辑公式的公理化真度。本文基于一阶逻辑公式之间的伪距离提出了 3 种不同类型的近似推理模式,研究了 3 者之间的关系。借助相似度给出了新的近似推理模式 $\Gamma \vdash^{\delta} \alpha$,即若 Γ 无法推出 α,但 Γ 可推出一个与 α 的相似度大于等于 δ 的 β,其中 $\delta \in [0,1]$,则认为 Γ

收稿时间:2023-11-29; **网络出版时间**:2024-11-25 17:32:20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12261090)
第一作者:袁一丹(2000—),女,硕士研究生,研究方向为数理逻辑与不确定性推理. E-mail:1757628434@qq.com
* **通信作者**:惠小静(1973—),女,教授,研究生导师,博士,研究方向为数理逻辑与不确定性推理. E-mail:xhmxiaojing@163.com

在 δ 程度上推出 α,研究了该推理模式与前 3 种推理模式之间的关系,最后提出了强近似推理模式。

1 预备知识

设 Φ 为全体不含函数符号的一阶闭逻辑公式之集,α、β、γ 等表示 Φ 中的一阶逻辑公式。

定义 1[18] 称映射 $\tau: \Phi\to[0,1]$ 为公理化真度映射,若:

(1) 不出现相同谓词符号的 N 个文字的完全闭包的合取的真度等于$\dfrac{1}{2^N}$;

(2) 若 α 是 Φ 中的定理,则 $\tau(\alpha)=1$;

(3) $\tau(\neg\alpha)=1-\tau(\alpha)$, $\alpha\in\Phi$;

(4) $\tau(\alpha\to\beta)=1+\tau(\alpha)=\tau(\beta\to\alpha)+\tau(\beta)$, $\alpha,\beta\in\Phi$;

(5) $\tau(\mathrm{cl}(\neg Q))=1-\tau(\mathrm{cl}Q)$;

(6) 在计算公式的真度时,其中原子公式中的变元可以相互替换。

当 $\alpha\in\Phi$ 时,$\tau(\alpha)$ 叫做 α 的公理化真度,简称为 α 的 τ-真度或真度。

命题 1[18] 真度映射 τ 有以下性质:

(1) 若 α 是矛盾式,则 $\tau(\alpha)=0$;

(2) 若 α 和 β 逻辑等价,则 $\tau(\alpha)=\tau(\beta)$;

(3) 若 $\tau(\alpha\to\beta)=1$,则 $\tau(\alpha)\leqslant\tau(\beta)$;

(4) 若 $\tau(\alpha)\geqslant a$, $\tau(\alpha\to\beta)\geqslant b$,则 $\tau(\beta)\geqslant a+b-1$;

(5) $\tau(\alpha\to\beta)\geqslant a$, $\tau(\beta\to\gamma)\geqslant b$,则 $\tau(\alpha\to\gamma)\geqslant a+b-1$;

(6) $\tau(\alpha\to\gamma)\geqslant\tau(\alpha\to\beta)+\tau(\beta\to\gamma)-1$;

(7) $\tau(\alpha\to\gamma)\geqslant\tau(\alpha\to\beta)+\tau(\beta\to\gamma)-1$。

定义 2[18] 设 $\alpha,\beta\in\Phi$,则 α 与 β 之间的相似度定义为

$$\xi(\alpha,\beta)=\tau((\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha))。$$

命题 2[18] 设 $\alpha,\beta\in\Phi$,则

(1) 如果 α 和 β 逻辑等价,那么 $\xi(\alpha,\beta)=1$,反之不成立;

(2) $\xi(\alpha,\beta)=\tau(\alpha\to\beta)+\tau(\beta\to\alpha)-1$。

定义 3[18] 设 $\alpha,\beta\in\Phi$,令

$$\rho(\alpha,\beta)=1-\xi(\alpha,\beta),$$

称 ρ 是 Φ 上的伪距离,称(Φ,ρ)是逻辑度量空间。

推论 1 $\rho(\alpha\vee\beta,\alpha)=1-\tau(\beta\to\alpha)$。

证明 由命题 2(2)得

$$\begin{aligned}\rho(\alpha\vee\beta,\alpha)&=1-\xi(\alpha\vee\beta,\alpha)=1-(\tau(\alpha\vee\beta\to\alpha)+\tau(\alpha\to\alpha\vee\beta)-1)\\&=1-\tau(\alpha\vee\beta\to\alpha)=1-\tau(\beta\to\alpha)。\end{aligned}$$

定义 4[11] 设 $\Gamma\subset\Phi$, $\alpha\in\Phi$,从 Γ 到 α 的推演是一个有限的公式序列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,其中 $\alpha_m=\alpha$,对 $\forall i\leqslant m$, α_i 为公理,或$\alpha_i\in\Gamma$, 或 α_i 是由前面的公式运用分离规则或推广规则得到,α 叫做 Γ-结论,记作 $\Gamma\vdash\alpha$。Γ 的全体结论之集记作 $D(\Gamma)$,若 $D(\Gamma)=\Gamma$,则称 Γ 是逻辑闭理论;若 Γ 推不出矛盾式,则称 Γ 是相容理论。

推论 2[11] 设 $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ 且 α 为闭公式,则 $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$。

2 (Φ,ρ)中的近似推理

借助一阶逻辑公式之间的伪距离,提出了(Φ,ρ)中 3 种不同类型的近似推理机制,证明了三者之间的等价性。

定义 5　设 $\alpha\in\Phi$, $\Gamma\subset\Phi$, $\mu>0$,

(1) 如果

$$\rho(\alpha,D(\Gamma))=\inf\{\rho(\alpha,\beta)\mid\beta\in D(\Gamma)\}<\mu,$$

则称 α 为 Γ 的Ⅰ-型误差小于 μ 的结论,记作 $\alpha\in D_{\mu}^{1}(\Gamma)$;

(2) 如果

$$1-\sup\{\tau(\beta\to\alpha)\mid\beta\in D(\Gamma)\}<\mu,$$

则称 α 为 Γ 的Ⅱ-型误差小于 μ 的结论,记作 $\alpha\in D_{\mu}^{2}(\Gamma)$;

(3) 如果

$$\inf\{H(D(\Gamma),D(\Sigma))\mid\Sigma\subset\Phi,\ \Sigma\vdash\alpha\}<\mu,$$

则称 α 为 Γ 的Ⅲ-型误差小于 μ 的结论,记作 $\alpha\in D_{\mu}^{3}(\Gamma)$。

注 1　(X,ρ)是距离空间, $x\in X$, P 和 Q 是 X 的非空子集,令

$$\rho(x,Q)=\inf\{\rho(x,y)\mid y\in Q\},$$
$$H^{*}(P,Q)=\sup\{\rho(x,Q)\mid x\in P\},$$
$$H(P,Q)=H^{*}(P,Q)\vee H^{*}(Q,P),$$

称 $H(P,Q)$ 为 P 与 Q 之间的 Hausdorff 距离。

例 1　设 A,B 是不同的一元谓词符号,$\Gamma=\{\neg(\forall x)A(x)\vee(\forall y)B(y)\}$, $\alpha=\neg(\forall x)A(x)$,估计 α 为 Γ 的Ⅰ-型结论的误差。

解　令 $p=\neg(\forall x)A(x)$, $q=(\forall y)B(y)$,则 $\Gamma=\{p\vee q\}$。

首先 $\alpha\notin D(\Gamma)$。若 $\alpha\in D(\Gamma)$,则$\{p\vee q\}\vdash p$,由推论 2 有$\vdash p\vee q\to p$,但 $p\vee q\to p$ 不是逻辑有效的,故假设不成立,$\alpha\notin D(\Gamma)$。

又 $p\vee q\in D(\Gamma)$且 $\rho(\alpha,p\vee q)=\rho(p,p\vee q)=1-\xi(p,p\vee q)=1-\tau(p\vee\neg q)=\tau(\neg p\wedge q)=\tau((\forall x)A(x)\wedge(\forall y)B(y))=\frac{1}{2^{2}}=0.25$,即 $\rho(\alpha,D(\Gamma))=\inf\{\rho(\alpha,\beta)\mid\beta\in D(\Gamma)\}\leqslant\rho(\alpha,p\vee q)=0.25$,故 α 是 Γ 的Ⅰ-型误差小于 0.25 的结论。

命题 3　设 $\alpha\in\Phi$, $\Gamma\subset\Phi$, $\mu>0$,若 $\alpha\in D_{\mu}^{1}(\Gamma)$,则 $\alpha\in D_{\mu}^{2}(\Gamma)$。

证明　若 $\alpha\in D_{\mu}^{1}(\Gamma)$,由定义 5(1)知,$\exists\beta_{0}\in D(\Gamma)$,使得 $\rho(\alpha,\beta_{0})<\mu$,则 $\rho(\alpha,\beta_{0})=1-\tau((\alpha\to\beta_{0})\wedge(\beta_{0}\to\alpha))\geqslant1-\tau(\beta_{0}\to\alpha)$,因此 $1-\sup\{\tau(\beta\to\alpha)\mid\beta\in D(\Gamma)\}\leqslant1-\tau(\beta_{0}\to\alpha)<\mu$,从而 $\alpha\in D_{\mu}^{2}(\Gamma)$。

命题 4　设 $\alpha\in\Phi$, $\Gamma\subset\Phi$, $\mu>0$,若 $\alpha\in D_{\mu}^{2}(\Gamma)$,则 $\alpha\in D_{\mu}^{3}(\Gamma)$。

证明　若 $\alpha\in D_{\mu}^{2}(\Gamma)$,则 $\exists\beta_{0}\in D(\Gamma)$,使得 $1-\tau(\beta_{0}\to\alpha)<\mu$,由 $\vdash\beta_{0}\to(\beta_{0}\vee\alpha)$和 MP 规则知$(\beta_{0}\vee\alpha)\in D(\Gamma)$,再由推论 1,得

$$\rho(\alpha,D(\Gamma))\leqslant\rho(\alpha,\beta_{0}\vee\alpha)=1-\tau(\beta_{0}\to\alpha)<\mu。\tag{1}$$

令 $\Sigma_{0}=\Gamma\cup\{\alpha\}$,则$\Sigma_{0}\subset\Phi$, $\Sigma_{0}\vdash\alpha$, $D(\Gamma)\subset D(\Sigma_{0})$。

(ⅰ) 对 $\forall\beta\in D(\Gamma)$都有 $\rho(\beta,D(\Sigma_{0}))=0$,从而

$$H_{0}(D(\Gamma),\ D(\Sigma_{0}))=\sup\{\rho(\beta,D(\Sigma_{0}))\mid\beta\in D(\Gamma)\}=0<\mu。\tag{2}$$

(ⅱ) 设$\alpha_{0}\in D(\Sigma_{0})$,对 $\forall\beta\in D(\Gamma)$,存在闭公式集$\{\beta_{1},\beta_{2},\cdots,\beta_{m}\}\subset\Gamma$,使得$\{\beta_{1},\beta_{2},\cdots,\beta_{m}\}\vdash\beta$;存在闭公式集$\{\beta_{1},\beta_{2},\cdots,\beta_{n}\}\subset\Gamma$,使$\{\beta_{1},\beta_{2},\cdots,\beta_{n},\alpha\}\vdash\alpha_{0}$,由推论 2 得,$\vdash\beta_{1}\wedge\beta_{2}\wedge\cdots\wedge\beta_{m}\to\beta$, $\vdash\beta_{1}\wedge\beta_{2}\wedge\cdots\wedge\beta_{n}\wedge\alpha\to\alpha_{0}$。令 $\beta_{0}=\beta^{*}\vee\alpha_{0}$,其中 $\beta^{*}=\beta_{1}\wedge\cdots\wedge\beta_{m}\wedge\beta_{1}\wedge\cdots\wedge\beta_{n}\wedge\alpha$, β^{*} 为闭公式,则$\vdash\beta^{*}\to\beta$, $\vdash\beta^{*}\to\alpha_{0}$,进而$\vdash\beta^{*}\to\beta^{*}\wedge\alpha_{0}$, $\vdash\beta^{*}\wedge\alpha\to\beta^{*}\wedge\alpha_{0}$, $\beta_{0}\in D(\Gamma)$,

$$\begin{aligned}\rho(\alpha_{0},\ \beta_{0})&=\rho(\alpha_{0},\ \beta^{*}\vee\alpha_{0})=1-\tau(\beta^{*}\to\alpha_{0})=1-\tau(\beta^{*}\to\beta^{*}\wedge\alpha_{0})\\&\leqslant1-\tau(\beta^{*}\to\beta^{*}\wedge\alpha)=1-\tau(\beta^{*}\to\alpha)\\&\leqslant1-\tau(\beta\to\alpha)\leqslant1-\tau((\beta\to\alpha)\wedge(\alpha\to\beta))\\&=\rho(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

则 $\rho(\alpha_{0},D(\Gamma))\leqslant\rho(\alpha,D(\Gamma))$。由式(1)得

$$H_0(D(\Sigma_0),D(\Gamma))=\sup\{\rho(\alpha_0,D(\Gamma))\mid\alpha_0\in D(\Sigma_0)\}\leqslant\rho(\alpha,D(\Gamma))<\mu, \tag{3}$$

由式(2)、(3)得

$$H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))=\max\{H_0(D(\Gamma),D(\Sigma_0)),H_0(D(\Sigma_0),D(\Gamma))\}<\mu,$$

进而,

$$\inf\{H(D(\Gamma),D(\Sigma))\mid\Sigma\subset\Phi,\Sigma\vdash\alpha\}\leqslant H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))<\mu,$$

因此 $\alpha\in D_\mu^3(\Gamma)$。

命题 5 设 $\alpha\in\Phi$, $\Gamma\subset\Phi$, $\mu>0$,若 $\alpha\in D_\mu^3(\Gamma)$,则 $\alpha\in D_\mu^1(\Gamma)$。

证明 若 $\alpha\in D_\mu^3(\Gamma)$,由定义 5(3)知存在一阶闭逻辑公式集 $\Sigma_0\subset\Phi$,使得 $H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))<\mu$, $\Sigma_0\vdash\alpha$。

根据 $\Sigma_0\vdash\alpha$ 有 $\alpha\in D(\Sigma_0)$,由 Hausdorff 距离的定义得 $\inf\{\rho(\alpha,\beta)\mid\beta\in D(\Gamma)\}=\rho(\alpha,D(\Gamma))\leqslant H(D(\Gamma),D(\Sigma_0))<\mu$,从而 $\alpha\in D_\mu^1(\Gamma)$。

由命题 3~5 知,定义 5 中的 3 种近似推理模式是等价的,有如下结论。

命题 6 设 $\alpha\in\Phi$, $\Gamma\subset\Phi$, $\mu>0$,则 $\alpha\in D_\mu^1(\Gamma)$ 当且仅当 $\alpha\in D_\mu^2(\Gamma)$ 当且仅当 $\alpha\in D_\mu^3(\Gamma)$。

3 $\Gamma\vdash^\delta\alpha$ 与强近似推理

基于一阶逻辑公式之间的相似度建立了新的近似推理模式,讨论了该模式与文中 3 种模式之间的关系。

定义 6 设 Γ, $\Sigma\subset\Phi$, $\Sigma\neq\varnothing$,如果 $\Sigma\subset D(\Gamma)$,则称 Γ 可推出 Σ,记为 $\Gamma\vdash\Sigma$。

命题 7 设 Γ, Σ, $\Delta\subset\Phi$,则

(1) $\Gamma\vdash\Sigma$ 当且仅当 $D(\Sigma)\subset D(\Gamma)$;

(2) 若 $\Gamma\vdash\Sigma$ 且 $\Sigma\vdash\Delta$,则 $\Gamma\vdash\Delta$;

(3) $\Gamma\vdash\Sigma\cup\Delta$ 当且仅当 $\Gamma\vdash\Sigma$, $\Gamma\vdash\Delta$;

(4) 若 $\Gamma\cap\Sigma\vdash\Delta$,则 $\Gamma\vdash\Delta$ 且 $\Sigma\vdash\Delta$;

(5) 若 Γ 是全体定理的集合,则 $\Gamma\vdash\Sigma$ 当且仅当 $\Sigma\subset\Gamma$。

证明 命题(1)、(2)、(3)由定义 6 显然,仅对(4)、(5)进行证明。

(4) 若 $\Gamma\cap\Sigma\vdash\Delta$,则 $\Delta\subset D(\Gamma\cap\Sigma)\subset D(\Gamma)\cap D(\Sigma)$,从而 $\Gamma\vdash\Delta$ 且 $\Sigma\vdash\Delta$。

(5) 若 Γ 是全体定理的集合,有 $\Gamma=D(\Gamma)$,则 $\Gamma\vdash\Sigma$ 当且仅当 $\Sigma\subset D(\Gamma)=\Gamma$。

定义 7 设 $\Gamma,\Sigma\subset\Phi,\alpha\in\Phi,\delta\in[0,1]$,如果 $\exists\beta\in D(\Gamma)$ 使 $\xi(\alpha,\beta)\geqslant\delta$,则称 Γ 在 δ 程度上推出 α,记为 $\Gamma\vdash^\delta\alpha$;进而,如果 $\forall\alpha\in\Sigma$,都有 $\Gamma\vdash^\delta\alpha$,则称 Γ 在 δ 程度上推出 Σ,记为 $\Gamma\vdash^\delta\Sigma$。

记 $U_\delta(D(\Gamma))=\{\alpha\in\Phi\mid\exists\beta\in D(\Gamma),\ \xi(\alpha,\beta)\geqslant\delta\}$。

注 2 $\Gamma\vdash^\delta\Sigma$ 当且仅当 $\forall\alpha\in\Sigma$, $\exists\beta\in D(\Gamma)$ 有 $\xi(\alpha,\beta)\geqslant\delta$ 当且仅当 $\Sigma\subset U_\delta(D(\Gamma))$。

命题 8 设 Γ, Σ, $\Delta\subset\Phi$, $\alpha\in\Phi$,δ, $\sigma\in[0,1]$,则下列性质成立:

(1) 若 $\Gamma\vdash\Sigma$,则 $\Gamma\vdash^1\Sigma$;

(2) 若 $\Sigma\neq\varnothing$,则 $\Gamma\vdash^0\Sigma$;

(3) 若 $\Gamma\vdash^\delta\Sigma$,且 $\delta\geqslant\sigma$,则 $\Gamma\vdash^\sigma\Sigma$;

(4) $\Gamma\vdash^\delta\Sigma\cup\Delta$ 当且仅当 $\Gamma\vdash^\delta\Sigma,\Gamma\vdash^\delta\Delta$;

(5) 若 $\Gamma\vdash\Sigma$, $\Sigma\vdash^\delta\Delta$,则 $\Gamma\vdash^\delta\Delta$;

(6) 若 $\Gamma\vdash^\delta\Sigma$, $\Sigma\vdash\Delta$,且 $U_\delta(D(\Gamma))$ 为逻辑闭理论,则 $\Gamma\vdash^\delta\Delta$;

(7) 若 Γ 有限,则 $\Gamma\vdash^\delta\alpha$ 当且仅当 $\Gamma\vdash^\delta D(\{\alpha\})$。

证明 (1) 若 $\Gamma\vdash\Sigma$,则 $\Sigma\subset D(\Gamma)$。任取 $\alpha\in\Sigma$ 有 $\alpha\in D(\Gamma)$ 且 $\xi(\alpha,\alpha)=1$,故 $\Gamma\vdash^1\Sigma$;反之,设 $\Gamma\vdash^1\Sigma$,任取 $\alpha\in\Sigma$,由定义 7 知 $\exists\beta\in D(\Gamma)$ 使 $\xi(\alpha,\beta)=1$,但 α 与 β 不一定逻辑等价,故反之不一定成立。

(2) 若 $\Sigma\neq\varnothing$,任取 $\alpha\in\Sigma$,对 $\forall\beta\in D(\Gamma)$ 有 $\xi(\alpha,\beta)\geqslant0$,故 $\Gamma\vdash^0\Sigma$。

(3) 若 $\Gamma\vdash^\delta\Sigma$,对 $\forall\alpha\in\Sigma$, $\exists\beta\in D(\Gamma)$ 使 $\xi(\alpha,\beta)\geqslant\delta$,根据 $\delta\geqslant\sigma$ 有 $\xi(\alpha,\beta)\geqslant\sigma$,故 $\Gamma\vdash^\sigma\Sigma$。

(4) $\Gamma\vdash^\delta\Sigma\cup\Delta$ 当且仅当 $\forall\alpha\in\Sigma\cup\Delta$, $\Gamma\vdash^\delta\alpha$ 当且仅当 $\Gamma\vdash^\delta\Sigma$, $\Gamma\vdash^\delta\Delta$。

(5) 若 $\Gamma\vdash\Sigma$,那么 $D(\Gamma)\supset D(\Sigma)$,任取 $\alpha\in\Delta$,根据 $\Sigma\vdash^{\delta}\Delta$,则 $\exists\beta\in D(\Sigma)\subset D(\Gamma)$ 使 $\xi(\alpha,\beta)\geqslant\delta$,由 α 的任意性,故 $\Gamma\vdash^{\delta}\Delta$。

(6) 若 $\Gamma\vdash^{\delta}\Sigma$,那么 $\Sigma\subset U_{\delta}(D(\Gamma))$,因为 $U_{\delta}(D(\Gamma))$ 为逻辑闭理论,所以 $D(\Sigma)\subset D(U_{\delta}(D(\Gamma)))=U_{\delta}(D(\Gamma))$;根据 $\Sigma\vdash\Delta$ 知 $\Delta\subset D(\Sigma)\subset U_{\delta}(D(\Gamma))$,则 $\Gamma\vdash^{\delta}\Delta$。

(7) 设 Γ 的根为 γ。若 $\Gamma\vdash^{\delta}\alpha$,那么 $\exists\beta\in D(\Gamma)$ 使 $\xi(\alpha,\beta)\geqslant\delta$,根据命题 1(5) 知 $\tau(\gamma\to\alpha)\geqslant\tau(\beta\to\alpha)\geqslant\delta$。任取 $\zeta\in D(\{\alpha\})$,那么 $\tau(\gamma\to\zeta)\geqslant\tau(\gamma\to\alpha)+\tau(\alpha\to\zeta)-1=\tau(\gamma\to\alpha)\geqslant\delta$。又 $\zeta\vee\gamma\in D(\Gamma)$,且 $\xi(\zeta\vee\gamma,\zeta)=\tau(\gamma\to\zeta)\geqslant\delta$,则 $\Gamma\vdash^{\delta}\zeta$,根据 ζ 的任意性,$\Gamma\vdash^{\delta}D(\{\alpha\})$;反之,设 $\Gamma\vdash^{\delta}D(\{\alpha\})$,根据 $\alpha\in D(\{\alpha\})$ 得 $\Gamma\vdash^{\delta}\alpha$。

命题 9　设 $\Gamma\subset\Phi$, $\alpha\in\Phi$, $\mu>0$,若 $\alpha\in D_{\mu}^{1}(\Gamma)$,则 $\Gamma\vdash^{1-\mu}\alpha$。

证明　设 $\alpha\in D_{\mu}^{1}(\Gamma)$,则

$$\begin{aligned}\rho(\alpha,D(\Gamma))&=\inf\{\rho(\alpha,\beta)\mid\beta\in D(\Gamma)\}\\&=\inf\{1-\xi(\alpha,\beta)\mid\beta\in D(\Gamma)\}\\&=1-\sup\{\xi(\alpha,\beta)\mid\beta\in D(\Gamma)\}<\mu,\end{aligned}$$

从而 $\sup\{\xi(\alpha,\beta)\mid\beta\in D(\Gamma)\}>1-\mu$,于是 $\exists\beta_0\in D(\Gamma)$ 使 $\xi(\alpha,\beta_0)\geqslant1-\mu$,故 $\Gamma\vdash^{1-\mu}\alpha$。

命题 10　若 $H^{*}(\Sigma,D(\Gamma))<\delta$, $\delta\in[0,1]$,则 $\Gamma\vdash^{1-\delta}\Sigma$。

证明　设 $H^{*}(\Sigma,D(\Gamma))<\delta$,即 $\sup\{\rho(\alpha,D(\Gamma)\mid\alpha\in\Sigma\}<\delta$,那么 $\forall\alpha\in\Sigma$, $\rho(\alpha,D(\Gamma)<\delta$,故 $\alpha\in D_{\mu}^{1}(\Gamma)$。根据 α 的任意性和命题 9 得 $\Gamma\vdash^{1-\delta}\Sigma$。

下面命题及推论给出了当 Γ 是有限理论时,Γ 在 δ 程度上近似推出 α 和 Σ 的充要条件。

命题 11　设 Γ 的根为 γ,$\alpha\in\Phi$, $\delta\in[0,1]$,则 $\Gamma\vdash^{\delta}\alpha$ 当且仅当 $\tau(\gamma\to\alpha)\geqslant\delta$。

证明　设 $\Gamma\vdash^{\delta}\alpha$,则 $\exists\beta\in D(\Gamma)$ 使 $\xi(\alpha,\beta)\geqslant\delta$,从而 $\tau(\gamma\to\alpha)\geqslant\tau(\gamma\to\beta)+\tau(\beta\to\alpha)-1=\tau(\beta\to\alpha)\geqslant\delta$;反过来,若 $\tau(\gamma\to\alpha)\geqslant\delta$,则由 $\alpha\vee\gamma\in D(\Gamma)$ 及 $\xi(\alpha,\alpha\vee\gamma)=\tau((\alpha\to\alpha\vee\gamma)\wedge(\alpha\vee\gamma\to\alpha))=\tau(\gamma\to\alpha)\geqslant\delta$ 得 $\Gamma\vdash^{\delta}\alpha$。

推论 3　设 Γ 的根为 γ, $\Sigma\subset\Phi$, $\delta\in[0,1]$, 则 $\Gamma\vdash^{\delta}\Sigma$ 当且仅当

$$\inf\{\tau(\gamma\to\alpha)\mid\alpha\in\Sigma\}\geqslant\delta。$$

此外,提出了强近似推理模式,即当 $\Gamma\vdash\alpha$ 时,可否进一步推出任何一个与 α 相似度大于等于 δ 的 β,其中 $\delta\in[0,1]$。

定义 8　设 Γ, $\Sigma\subset\Phi$, $\alpha\in\Phi$, $\delta\in[0,1]$,如果任一满足 $\xi(\alpha,\beta)\geqslant\delta$ 的公式 β 恒有 $\Gamma\vdash\beta$,则称 Γ 在 δ 程度上强推出 α,记为 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\alpha$;进而,如果 $\forall\alpha\in\Sigma$,都有 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\alpha$,则称 Γ 在 δ 程度上强推出 Σ,记为 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\Sigma$。

注 3　$U_{\delta}(\Sigma)=\{\alpha\in\Phi\mid\exists\beta\in\Sigma,\ \xi(\alpha,\beta)\geqslant\delta\}$, $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\Sigma$ 当且仅当 $\forall\alpha\in\Sigma$,任一满足 $\xi(\alpha,\beta)\geqslant\delta$ 的公式 β 恒有 $\Gamma\vdash\beta$,即 $\beta\in D(\Gamma)$ 当且仅当 $U_{\delta}(\Sigma)\subset D(\Gamma)$。

命题 12　设 Γ, Σ, $\Delta\subset\Phi$, $\alpha\in\Phi$, δ, $\sigma\in[0,1]$,则下列性质成立:

(1) 若 $\Gamma\vdash_{S}{}^{1}\Sigma$,则 $\Gamma\vdash\Sigma$;

(2) 若 $\Gamma\neq\varnothing$,则 $\{\bar{0}\}\vdash_{S}{}^{0}\Gamma$,其中 $\bar{0}$ 表示矛盾式;

(3) 若 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\Sigma$,且 $\delta\geqslant\sigma$,则 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\sigma}\Sigma$;

(4) $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\Sigma\cup\Delta$ 当且仅当 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\Sigma$, $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\Delta$;

(5) 若 $\Gamma\cap\Sigma\vdash_{S}{}^{\delta}\Delta$,则 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\Delta$ 且 $\Sigma\vdash_{S}{}^{\delta}\Delta$;

(6) 若 $\Gamma\vdash_{S}{}^{1}\Sigma$, $\Sigma\vdash_{S}{}^{\delta}\Delta$,则 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\Delta$;

(7) 若 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\Sigma$, $\Sigma\vdash_{S}{}^{1}\Delta$,且 Σ 为逻辑闭理论,则 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\Delta$;

(8) 若 $\Gamma\vdash_{S}{}^{0}\alpha$,则 Γ 为不相容理论。

证明　(1) 若 $\Gamma\vdash_{S}{}^{1}\Sigma$,显然 $\Gamma\vdash\Sigma$。反之,若 $\Gamma\vdash\Sigma$,任取 $\alpha\in\Sigma$,则 $\Gamma\vdash\alpha$, $\forall\beta\in\Phi$,当 $\xi(\alpha,\beta)=1$, α 与 β 不一定逻辑等价,故反之不一定成立。

(2) $\forall\alpha\in\Gamma$, $\forall\beta\in\Phi$,根据 $\xi(\alpha,\beta)\geqslant0$, $\{\bar{0}\}\vdash\beta$ 得 $\{\bar{0}\}\vdash_{S}{}^{0}\alpha$,再根据 α 的任意性,则 $\{\bar{0}\}\vdash_{S}{}^{0}\Gamma$。

(3) 设 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\Sigma$,对 $\forall\alpha\in\Sigma$, $\Gamma\vdash_{S}{}^{\delta}\alpha$,从而对 $\forall\beta\in\Phi$, $\xi(\alpha,\beta)\geqslant\delta\geqslant\sigma$ 时,恒有 $\Gamma\vdash\beta$,于是 $\Gamma\vdash_{S}{}^{\sigma}\alpha$,根据

α 的任意性,则 $\Gamma \vdash_{S^{\sigma}} \Sigma$。

(4) $\Gamma \vdash_{S^{\delta}} \Sigma \cup \Delta$ 当且仅当 $\forall \alpha \in \Sigma \cup \Delta$, $\Gamma \vdash_{S^{\delta}} \alpha$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_{S^{\delta}} \Sigma$, $\Gamma \vdash_{S^{\delta}} \Delta$。

(5) 设 $\Gamma \cap \Sigma \vdash_{S^{\delta}} \Delta$, 则 $U_{\delta}(\Delta) \subset D(\Gamma \cap \Sigma) \subset D(\Gamma) \cap D(\Sigma)$,从而 $\Gamma \vdash_{S^{\delta}} \Delta$ 且 $\Sigma \vdash_{S^{\delta}} \Delta$。

(6) 任取 $\alpha \in \Delta$, $\beta \in \Phi$,若 $\xi(\alpha,\beta) \geqslant \delta$,根据 $\Sigma \vdash_{S^{\delta}} \Delta$ 得出 $\Sigma \vdash \beta$。又 $\Gamma \vdash_{S^{1}} \Sigma$,根据(1)得出 $\Gamma \vdash \Sigma$,从而 $\Gamma \vdash \beta$, $\Gamma \vdash_{S^{\delta}} \alpha$,再根据 α 的任意性,则 $\Gamma \vdash_{S^{\delta}} \Delta$。

(7) 设 $\Gamma \vdash_{S^{\delta}} \Sigma$,那么 $U_{\delta}(\Sigma) \subset D(\Gamma)$,根据 $\Sigma \vdash_{S^{1}} \Delta$, Σ 是逻辑闭理论得 $\Delta \subset D(\Sigma) = \Sigma$,从而 $U_{\delta}(\Delta) \subset U_{\delta}(\Sigma) \subset D(\Gamma)$,则 $\Gamma \vdash_{S^{\delta}} \Delta$。

(8) 因为 $\xi(\alpha, \neg \alpha) = 0$,根据 $\Gamma \vdash_{S^{0}} \alpha$ 得 $\Gamma \vdash \neg \alpha$,又 $\Gamma \vdash \alpha$,所以 Γ 为不相容理论。

4 结论

本文基于伪距离建立了一阶逻辑度量空间中 3 种不同类型的近似推理模式,分析了它们之间的内在联系,结果表明这 3 种近似推理模式是等价的。借助相似度提出了新的近似推理模式 $\Gamma \vdash^{\delta} \alpha$,讨论了该推理模式与前 3 种推理模式之间的关系,并给出了当 Γ 是有限理论时,Γ 在 δ 程度上近似推出 α 和 Σ 的充要条件,最后提出了强近似推理模式。

参考文献:

[1] 王国俊,傅丽,宋建社. 二值命题逻辑中命题的真度理论[J]. 中国科学(A 辑:数学), 2001, 31(11):998-1008.
WANG Guojun, FU Li, SONG Jianshe. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic[J]. Science in China (Series A: Mathematics), 2001, 31(11):998-1008.

[2] 王国俊,李壁镜. Łukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理[J]. 中国科学(E 辑:信息科学), 2005, 35(6):561-569.
WANG Guojun, LI Bijing. Theory of truth degrees of formulas in Łukasiewicz n-value propositional logic and a limit theorem [J]. Science in China (Series E: Informationis), 2005, 35(6):561-569.

[3] 李骏,王国俊. 逻辑系统 L_n^* 中命题的真度理论[J]. 中国科学(E 辑:信息科学), 2006, 36(6):631-643.
LI Jun, WANG Guojun. Theory of propositional truth degrees in logic system L_n^* [J]. Science in China (Series E: Informationis), 2006, 36(6):631-643.

[4] 折延宏,王国俊. 三值命题逻辑系统 L_3^* 中逻辑理论性态的拓扑刻画[J]. 数学学报, 2009, 52(6):1225-1234.
SHE Yanhong, WANG Guojun. Topological characterizations of properties of logic theories in three-valued propositional logic system L_3^*[J]. Acta Mathematica Sinica, 2009, 52(6):1225-1234.

[5] 周红军,王国俊. Borel 型概率计量逻辑[J]. 中国科学(E 辑:信息科学), 2011, 41(11):1328-1342.
ZHOU Hongjun, WANG Guojun. Borel probabilistic and quantitative logic[J]. Scientia Sinica(Series E: Informationis), 2011, 41(11):1328-1342.

[6] 裴道武. 基于三角模的模糊逻辑理论及其应用[M]. 北京:科学出版社, 2013:18-219.
PEI Daowu. Fuzzy logic theory based on triangular module and its application[M]. Beijing: Science Press, 2013:18-219.

[7] 吴洪博,周建仁. 计量逻辑中真度的均值表示形式及应用[J]. 电子学报, 2012, 40(9):1822-1828.
WU Hongbo, ZHOU Jianren. The form of mean representation of truth degree with application in quantitative logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(9):1822-1828.

[8] 王庆平,王国俊. 计量逻辑学中的线性逻辑公式[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2012, 40(2):1-5.
WANG Qingping, WANG Guojun. Linear logic formulae in the theory of quantitative logic[J]. Journal of Shaanxi Normal University(Nature Science Edition), 2012, 40(2):1-5.

[9] 赵彬,于鹏. 多值逻辑中基于 Camberra 模糊距离的计量化方法[J]. 电子学报, 2018, 46(10):2305-2315.
ZHAO Bin, YU Peng. A kind of quantitative method based on Camberra fuzzy distance in multiple-valued logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(10):2305-2315.

[10] WANG Guojun, ZHOU Hongjun. Quantitative logic[J]. Information Sciences, 2009, 179(3):226-247.

[11] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 北京:科学出版社, 2006:41-82.
WANG Guojun. Introduction to mathematical logic and resolution principle[M]. Beijing:Science Press, 2006:41-82.

[12] 惠小静,王国俊. 经典推理模式的随机化研究及其应用[J]. 中国科学(E 辑:信息科学), 2007, 37(6):801-812.

HUI Xiaojing, WANG Guojun. Randomization of classical inference patterns and its application[J]. Science in China (Series E: Informationis), 2007, 37(6):801-812.
[13] 刘保翠,王国俊. 二值命题逻辑中的三种 Γ-近似推理模式及其等价性[J]. 模糊系统与数学,2008,22(2):10-17.
LIU Baocui, WANG Guojun. Three models of Γ-approximate reasoning and their equivalence in classical propositional logic [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2008, 22(2):10-17.
[14] 左卫兵. n 值命题逻辑中的 P-随机真度及近似推理[J]. 计算机工程与应用,2009,45(7):42-43.
ZUO Weibing. P-randomized truth degrees and approximate reasoning in n-valued logic system[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(7):42-43.
[15] 张家录,陈雪刚,赵晓东.经典命题逻辑的概率语义及其应用[J]. 计算机学报,2014,37(8):1775-1785.
ZHANG Jialu, CHEN Xuegang, ZHAO Xiaodong. Theory of probability semantics of classical propositional logic and its application[J]. Chinese Journal of Computers, 2014,37(8):1775-1785.
[16] ESTEVA F, GODO L, RODRIGUEZ R O, et al. Logics for approximate and strong entailments[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 197(16):59-70.
[17] 罗清君,王国俊. 经典命题逻辑中的近似推理与强近似推理[J]. 模糊系统与数学, 2012, 26(4):20-24.
LUO Qingjun, WANG Guojun. Approximate and strong entailments in classical propositional logic system[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2012, 26(4):20-24.
[18] 王国俊. 一类一阶逻辑公式中的公理化真度理论及其应用[J]. 中国科学(E 辑:信息科学), 2012, 42(5):648-662.
WANG Guojun. Axiomatic theory of truth degree for a class of first-order formulas and its application[J]. Scientia Sinica (Series E: Informationis), 2012, 42(5):648-662.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 66 页)

[9] CHEN Jiawen, CHEN Zhimin, DONG Boqing. Existence of H^2-global attractors of two-dimensional micropolar fluid flows [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 322(2):512-522.
[10] KLOEDEN P E, LANGA J A. Flattening, squeezing and the existence of random attractors[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2007, 463(2077):163-181.
[11] CARVALHO A, LANGA J A, ROBINSON J. Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems[M]. Berlin: Springer, 2012.
[12] GARCÍA LUENGO J M, MARÍN RUBIO P, REAL ANGUAS J, et al. Pullback attractors for the non-autonomous 2D Navier-Stokes equations for minimally regularforcing[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems (Series A), 2014, 34(1):203-227.
[13] SUN Wenlong, LI Yeping. Pullback dynamical behaviors of the non-autonomous micropolar fluid flows with minimally regular force and moment[J]. Communications in Mathematical Sciences, 2018, 16(4):1043-1065.
[14] ANH C, SON D. Pullback attractors for non-autonomous 2D MHD equations on some unbounded domains[J]. Annales Polonici Mathematici, 2015, 113(2):129-154.
[15] SONG Xiaoya, XIONG Yangmin. Pullback attractors for 2D MHD equations with delays[J]. Journal of Mathematical Physics, 2021, 62(7):1-29.
[16] SONG Xiaoya. Pullback attractors for 3D MHD equations with damping[J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2022, 73(2):1-16.
[17] CAO Daomin, SONG Xiaoya, SUN Chunyou. Pullback attractors for 2D MHD equations on time-varying domains[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems(Series A), 2022, 42(2):643-677.

(编辑:陈丽萍)