

离散给定平均曲率四点边值问题正解的存在性

李志强,路艳琼*

(西北师范大学数学与统计学院,甘肃兰州730070)

摘要:运用不动点定理建立带一维 Minkowski 平均曲率算子的离散四点边值问题

$$\begin{cases} -(\Delta\phi(\Delta u(k-1)))=f(k,u(k),\Delta u(k)), & k\in[1,N]_{\mathbf{Z}}, \\ u(0)=\alpha u(l_1), u(N+1)=\beta u(l_2) \end{cases}$$

(正)解的存在性和多解性,其中, $f:[1,N]_{\mathbf{Z}}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ 为连续函数, $\alpha,\beta\in[0,1]$ 且 $\alpha\neq\beta$ 为常数, $l_1,l_2\in[1,N]_{\mathbf{Z}}$ 且 $l_1<l_2$,

$\phi:(-a,a)\rightarrow\mathbf{R}(0<a<\infty)$ 为单调递增算子且 $\phi(s)=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$, $[1,N]_{\mathbf{Z}}=\{1,2,\dots,N\}$, $N\geq 6$ 为给定的正整数。

关键词: Minkowski 平均曲率算子;正解;多解性;不动点定理

中图分类号:O175.8 文献标志码:A

引用格式:李志强,路艳琼.离散给定平均曲率四点边值问题正解的存在性[J].山东大学学报(理学版),2025,60(5):40-49,55.

Existence of positive solution for discrete prescribed mean curvature four-point boundary value problems

LI Zhiqiang, LU Yanqiong*

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: By using the fixed point theorem, we establish the existence and multiplicity of (positive) solutions for the following discrete four-point boundary value problem with one-dimension Minkowski mean curvature operator

$$\begin{cases} -(\Delta\phi(\Delta u(k-1)))=f(k,u(k),\Delta u(k)), & k\in[1,N]_{\mathbf{Z}}, \\ u(0)=\alpha u(l_1), u(N+1)=\beta u(l_2), \end{cases}$$

where $f:[1,N]_{\mathbf{Z}}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ is continuous, $\alpha,\beta\in[0,1]$ are constants and $\alpha\neq\beta$, $l_1,l_2\in[1,N]_{\mathbf{Z}}$, $l_1<l_2$, $\phi:(-a,a)\rightarrow\mathbf{R}(0<a<\infty)$

is a monotonic increasing operator and $\phi(s)=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$, $[1,N]_{\mathbf{Z}}=\{1,2,3,\dots,N\}$, $N\geq 6$.

Key words: Minkowski mean curvature operator; positive solution; multiplicity; fixed point theorem

1 引言和主要结论

微分方程非局部边值问题在物理、数学、生物等领域有着广泛的应用。例如,连续介质力学弹性理论模型^[1]和植物害虫防治模型^[2]等。相对于局部边值问题而言,该类问题可以将局部问题纳入同一框架下研究,因此获得诸多学者的关注和研究^[3-17]。特别地,带奇异 ϕ -Laplacian 算子的微分方程非局部边值问题近年来获得了许多重要的结论^[18-25]。

Ma^[6]运用不动点理论获得了边值问题

收稿日期:2023-12-29;网络出版时间:2024-12-06 11:42:50

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12361040);西北师范大学青年教师科研能力提升计划项目(NWNU-LKQN-2020-20)

第一作者:李志强(1995—),男,硕士研究生,研究方向为常微分方程与差分方程边值问题. E-mail:2593741990@qq.com

*通信作者:路艳琼(1986—),女,教授,博士,研究方向为常微分方程与差分方程边值问题. E-mail:luyq8610@126.com

$$\begin{cases} u''(t) = a(t)f(u), & t \in (0,1), \\ u(0) = 0, \alpha u(\eta) = u(1) \end{cases}$$

正解的存在性,其中 $0 < \eta < 1, 0 < a < 1/\eta$, 非线性项满足超线性或者次线性增长条件。此后,这类微分方程非局部边值问题正解的存在性获得许多学者的关注和研究^[3-10],并运用多种不同的方法推广到了带拟线性算子微分方程非局部边值问题解的存在性结果^[11-14]。

Bereanu 等^[15]运用 Leray-Schauder 度理论获得带奇异 ϕ -Laplacian 算子边值问题

$$(\phi(u'))' + f(t, u, u') = 0, \quad l(u, u') = 0$$

解的存在性和多重性结果,其中 $l(u, u') = 0$ 表示边界条件, $f \in C([0, T] \times \mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, $\phi: (-a, a) \rightarrow \mathbf{R} (0 < a < \infty)$ 为单调递增算子且 $\phi(0) = 0$ 。此后许多学者在不同的限制条件下获得了解的存在性结果^[17-24]。获得微分方程边值问题的精确解是比较困难的,通常需要考虑离散情形下解的存在性进而获得数值解。

Bereanu 等^[24]运用不动点理论获得了带离散的奇异 ϕ -Laplacian 算子边值问题

$$\nabla[\phi(\Delta x_k)] + f_k(k, \Delta x_k) = 0 (2 \leq k \leq n-1), \quad l(x, \Delta x) = 0$$

的存在性和多重性结果,其中 f_k 为连续函数, $\phi: (-a, a) \rightarrow \mathbf{R} (0 < a < \infty)$ 为单调递增算子且 $\phi(0) = 0$ 。此后,诸多学者又在更一般的情形下获得了带离散的奇异 ϕ -Laplacian 算子微分方程边值问题解的存在性^[25-28],但在离散情形下四点边值问题解的存在性研究还没有结果。

受上述文献的启发,本文运用不动点定理建立了

$$\begin{cases} \Delta(\phi(\Delta u(k-1))) + f(k, u(k), \Delta u(k)) = 0, & k \in [1, N]_{\mathbf{Z}}, \\ u(0) = \alpha u(l_1), u(N+1) = \beta u(l_2) \end{cases} \quad (1)$$

(正)解的存在性结果,其中参数 $f: [1, N]_{\mathbf{Z}} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ 为连续函数, $\alpha, \beta \in [0, 1)$, 且 $\alpha \neq \beta$; $l_1, l_2 \in [1, N]_{\mathbf{Z}}$, 且 $l_1 < l_2$, $\phi: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R} (0 < a < \infty)$ 为单调递增算子,满足 $\phi(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$, 区间 $[1, N]_{\mathbf{Z}} = \{1, 2, \dots, N\}$, $N \geq 6$ 为给定的正整数。假设:

$$(H_1) \quad \phi: (-a, a) \rightarrow \mathbf{R} (0 < a < \infty) \text{ 的增同胚}, \phi(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}, \phi(0) = 0;$$

$$(H_2) \quad f(k, u, \Delta u_{k-1}) = g(k, u), g: [0, N] \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+.$$

定义函数空间

$$E := \{u \mid u: [0, N+1]_{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{R}\},$$

则 E 按范数 $\|u\|_{\infty} = \max_{k \in [0, N+1]_{\mathbf{Z}}} |u(k)|$ 构成 Banach 空间,不难验证 E 按范数 $\|u\|_1 = \max_{u \in E} |u(k)| + \max_{u \in E} |\Delta u(k)|$ 也构成 Banach 空间。

定义空间 E 的闭子空间

$$E_{\#} := \{u \in E : u(0) = \alpha u(l_1), u(N+1) = \beta u(l_2)\}.$$

$$E_{\theta} := \{u \in E_{\#} : u \geq 0, \min_{k \in [l_1, l_2]_{\mathbf{Z}}} u(k) \geq \theta \|u\|_{\infty}\},$$

其中 $\theta = \min\left\{\frac{l_1}{N+1}, \frac{N+1-l_2}{N+1}\right\}$ 。定义空间 E 的线性映射为

$$K: E \rightarrow E, \quad Ku(t) = \sum_{s=1}^{t-1} u(s), \quad t \in [1, N+1]_{\mathbf{Z}}.$$

对于任意的 $c \in \mathbf{R}, u \in E$, 设

$$\omega(c, u; t) = \phi^{-1}(c - Ku(t)), \quad t \in [1, N+1]_{\mathbf{Z}},$$

$$T(c, u) = \frac{1-\beta}{1-\alpha} \sum_{t=1}^{l_1} \omega(c, u; t) + (1-\beta) \sum_{t=l_2+1}^{l_2} \omega(c, u; t) + \sum_{t=l_2+1}^{N+1} \omega(c, u; t).$$

问题(1)的正解指的是 $u \in E_{\theta}$, 满足 $u(t) \geq 0, t \in [0, N+1]_{\mathbf{Z}}$ 且 $u(t) > 0, t \in [l_1, l_2]_{\mathbf{Z}}$ 。

记 $\underline{g}_{a,b}(t) := \min_{u \in [a,b]} g(t, u), \bar{g}_{a,b}(t) := \max_{u \in [a,b]} g(t, u)$, 其中 $0 \leq a < b$ 为给定的常数。

定理 1 假设 $f: [1, N]_{\mathbf{Z}} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 为连续函数, 则问题(1)至少有一个解。

定理 2 假设 $f(k, u(k), \Delta u(k)) = g(k, u(k))$ 时, 满足 $g: [0, N]_{\mathbf{Z}} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 连续, 则问题(1)至少有一个解, 且问题(1)的非平凡解是正解。

定理 3 假设 $f(k, u(k), \Delta u(k)) = g(k, u(k))$ 时, 满足 $g: [0, N]_{\mathbf{Z}} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 连续, 存在正常数 $r_1, r_2 \in (0, (N+1))$, ($r_1 \neq r_2$), 且满足 $r_2 < \Theta_0^{-1}$, $\Theta_0 := \max \left\{ \frac{1-\alpha}{l_1}, \frac{1-\beta}{N+1-l_2} \right\}$, 使得下述不等式成立:

$$(i) \left(\frac{l_1}{1-\alpha} + l_2 - l_1 \right) \phi^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N+1} \bar{g}_{0, r_1}(k) \right) \leq r_1;$$

$$(ii) \left(\frac{N+1-l_2}{1-\beta} + l_2 - l_1 \right) \left[\phi^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N+1} \bar{g}_{0, r_1}(k) \right) \right] \leq r_1;$$

$$(iii) \min \{ \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_1), \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_2) \} \geq \phi \left(\frac{1-\alpha}{l_1} r_2 \right) + \phi \left(\left(\frac{1-\beta}{N+1-l_2} \right) r_2 \right).$$

则问题(1)至少有一个正解, 且满足 $r_0 \leq \|u\|_{\infty} \leq R_0$, $R_0 \in \mathbf{R}$, $r_0 = \min \{ r_1, r_2 \}$, $R_0 = \max \{ r_1, r_2 \}$ 。

定理 4 假设 $f(k, u(k), \Delta u(k)) = g(k, u(k))$ 时, 满足 $g: [0, N]_{\mathbf{Z}} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 连续满足 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(k, s)}{s} = 0$ 对任意的 $k \in [1, N]_{\mathbf{Z}}$ 一致成立。记 $\Theta_1 := \max \left\{ \frac{l_1}{1-\alpha} + l_2 - l_1, \frac{N+1-l_2}{1-\beta} + l_2 - l_1 \right\}$, 若存在正常数 $r_1, r_2 \in (0, (N+1))$, ($r_1 \neq r_2$), 且满足 $r_1 \Theta_1^{-1} > 1 > r_2 \Theta_0$, 使得

$$\min \{ \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_1), \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_2) \} \geq \phi \left(\frac{1-\alpha}{l_1} r_2 \right) + \phi \left(\left(\frac{1-\beta}{N+1-l_2} \right) r_2 \right)$$

成立, 则问题(1)至少有 2 个正解 u_1, u_2 且满足 $0 < \|u_2\|_{\infty} \leq r_2 \leq \|u_1\|_{\infty} \leq r_1$ 。

2 预备知识

\mathbf{Z} 表示整数集, $a, b \in \mathbf{Z}$ 且 $a < b$, $[a, b]_{\mathbf{Z}} = \{a, a+1, \dots, b\}$, 当 $b < a$ 时, 规定 $\sum_{k=a}^b u(k) = 0$ 。取 $u \in E$, 则算子 $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$ 称为前向差分算子, $\nabla u(k) = u(k-1) - u(k)$, 称为后向差分算子。

由于 $\phi: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ 是单调递增算子, 满足 $\phi(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$, 所以不难验证 $\phi^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$, 且 $\phi(-s) = -\phi(s)$, $\phi^{-1}(-s) = -\phi^{-1}(s)$, 即 ϕ, ϕ^{-1} 均为奇算子。

讨论边值问题(1)对应线性问题解的存在唯一性。考虑边值问题

$$\begin{cases} \Delta(\phi(\Delta u(k-1))) + v(k) = 0, & k \in [1, N]_{\mathbf{Z}}, \\ u(0) = \alpha u(l_1), & u(N+1) = \beta u(l_2). \end{cases} \quad (2)$$

对上述方程两边同时从 1 到 $k-1$ 求和分得

$$\phi(\Delta u(k-1)) = \phi(\Delta u(0)) - \sum_{t=1}^{k-1} v(t), \quad k \in [1, N+1]_{\mathbf{Z}}.$$

令 $c = \phi(\Delta u(0))$, 两边同时用 ϕ^{-1} 作用得

$$\Delta u(k-1) = \phi^{-1} \left(c - \sum_{t=1}^{k-1} v(t) \right), \quad k \in [1, N+1]_{\mathbf{Z}}.$$

对上述方程两边同时从 1 到 k 求和分得

$$u(k) = u(0) + \sum_{t=1}^k \phi^{-1} \left(c - \sum_{s=1}^{t-1} v(s) \right), \quad k \in [1, N+1]_{\mathbf{Z}}.$$

不妨设

$$\omega(c, v; t) = \phi^{-1}(c - K v(t)), \quad t \in [1, N+1]_{\mathbf{Z}},$$

由边值条件 $u(0) = \alpha u(l_1)$, $u(N+1) = \beta u(l_2)$, 可得

$$T(c, v) = \frac{1-\beta}{1-\alpha} \sum_{t=1}^{l_1} \omega(c, v; t) + (1-\beta) \sum_{t=l_1+1}^{l_2} \omega(c, v; t) + \sum_{t=l_2+1}^{N+1} \omega(c, v; t)。$$

引理 1 对任意的 $v \in E$, 存在唯一 $Q(v) \in \mathbf{R}$, 使得 $T(Q(v), v) = 0$, 其中 $Q: E \rightarrow \mathbf{R}$, 且对所有的 $v \in E$ 满足

$$|Q(v)| \leq N \|v\|_{\infty}。$$

证明 由 $|Kv(t)| \leq N \|v\|_{\infty}$ 和 $\phi^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow (-1, 1)$ 是单调递增算子, 且 $\phi(0) = 0$, 可知

$$\omega(-N \|v\|_{\infty}, v; t) \leq 0 \leq \omega(N \|v\|_{\infty}, v; t);$$

因此

$$T(-N \|v\|_{\infty}, v) \leq 0 \leq T(N \|v\|_{\infty}, v)。$$

又因为 $w(\cdot, v; t)$ 关于 c 单调递增, 所以 $T(\cdot, v)$ 关于 c 单调递增。对任意的 $c \in \mathbf{R}$, 都存在 $Q(v)$ 使得 $T(Q(v), v) = 0$ 。

下证唯一性。事实上, 由于 ϕ^{-1} 关于 v 单调递减, $w(c, v; t)$ 关于 v 也单调递减, 进而 $T(\cdot, v)$ 关于 v 也单调递减。由算子的单调性可知, $Q(v)$ 是唯一的。

引理 2 定义泛函 $A: E \rightarrow \mathbf{R}$, $A(v) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{t=1}^{l_1} \omega(c, v; t)$, 则 $A(v)$ 单调递减的, 且对任意的 $v \in E$, 有

$$A(v) \in \left[\frac{\alpha l_1}{1-\alpha} \phi^{-1}(-2N \|v\|_{\infty}), \frac{\alpha l_1}{1-\alpha} \phi^{-1}(2N \|v\|_{\infty}) \right]。 \tag{3}$$

证明 根据引理 1 的证明过程及 $\omega(c, v; t)$ 关于 v 单调递减知, $A(v)$ 关于 v 单调递减; 又因为 ϕ^{-1} 有界, 所以 w 有界, 且 $-2N \|v\|_{\infty} \leq c - Kv(t) \leq 2N \|v\|_{\infty}$, 因此引理 2 成立。

引理 3 定义算子 $B(v): E \rightarrow E$, $B(v) := A(v) + K \circ \phi^{-1} \circ (Q - K)(v)$ 是紧算子, $B(E) \subset E_{\#}$ 且对于任意的 $v \in E$ 满足条件

$$\phi(\Delta B(v)(k)) \in E, \quad \Delta[\phi(\Delta B(v)(k))] + v(k) = 0。$$

证明 由引理 1 和引理 2 的证明可知 B 是紧算子。下面证明 $B(E) \subset E_{\#}$ 。由

$$K \circ \phi^{-1} \circ (Q - K)(v)(k) = \sum_{t=1}^k \omega(c, v; t)$$

得

$$B(v)(0) = A(v) = \alpha A(v) + (1-\alpha)A(v) = \alpha \left(A(v) + \sum_{t=1}^{l_1} \omega(c, v; t) \right) = \alpha B(v)(l_1),$$

$$\begin{aligned} B(v)(N+1) &= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{t=1}^{l_1} \omega(c, v; t) + \sum_{t=l_1+1}^{l_2} \omega(c, v; t) + \sum_{t=l_2+1}^{N+1} \omega(c, v; t) \\ &= \beta \left(\frac{1}{1-\alpha} \sum_{t=1}^{l_1} \omega(c, v; t) + \sum_{t=l_1+1}^{l_2} \omega(c, v; t) \right) \\ &= \beta B(v)(l_2), \end{aligned}$$

从而 $T(c, v) = \frac{1-\beta}{1-\alpha} \sum_{t=1}^{l_1} \omega(c, v; t) + (1-\beta) \sum_{t=l_1+1}^{l_2} \omega(c, v; t) + \sum_{t=l_2+1}^{N+1} \omega(c, v; t) = B(v)(N+1) - \beta B(v)(l_2) = 0$ 。由

$$\phi(\Delta B(v)(t)) = Q(v) - Kv(t), \quad t \in [1, N]_{\mathbf{Z}}$$

可得

$$\Delta(\phi(\Delta B(v)(k))) = -v(k) \quad (v \in E) \quad k \in [1, N]_{\mathbf{Z}}。$$

引理 4 对于任意的 $v \in E$, $B(v)(k)$ 是方程

$$-\Delta(\phi(\Delta u(k-1))) = v(k), \quad u(0) = \alpha u(l_1), \quad u(N+1) = \beta u(l_2) \tag{4}$$

的唯一解。

证明 由引理 3 可知 $B(v)$ 是方程(4)的解, 下面证明唯一性。对方程

$$-\Delta(\phi(\Delta u(k-1))) = v(k),$$

两边先从 1 到 $k-1$ 求和分, 再用 ϕ^{-1} 作用, 可得

$$u(k) = c_1 + \sum_{t=1}^k \omega(c_2, v; t), \quad (*)$$

代入边界条件可得 $c_1 = A(v)$, $c_2 = Q(v)$, 将 c_1, c_2 代入式(*)中可得

$$u(k) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{t=1}^{l_1} \omega(c, v; t) + \sum_{t=1}^k \omega(c, v; t) = B(v)(k).$$

定义 Nemytskii 算子

$$N_f: E \rightarrow E, \quad N_f(u)(k) = f(k, u(k), \Delta u(k)),$$

根据 Nemytskii 算子的性质可知 N_f 是将有界集映成有界集。

引理 5 定义算子

$$D_f: E \rightarrow E, \quad D_f = B \circ N_f.$$

则算子 D_f 是紧算子, 且 $u \in E$ 是(1)的解当且仅当 u 是 D_f 在 E 上的不动点。

证明 结合引理 3 和引理 4 的证明过程可知引理 5 成立。

引理 6 假设 $v \in E$ 且 $v(t) \geq 0$, 则问题(2)的解 $u := B(v)$ 满足: 存在 $t_1 \in [l_2 + 1, N]_{\mathbb{Z}}$, $t_2 \in [1, l_1 - 1]_{\mathbb{Z}}$, 使得

$$\begin{aligned} \Delta B(v)(t_1 - 1) &\leq \frac{\beta - 1}{N + 1 - l_2} B(v)(l_2) \leq \Delta B(v)(t_1) \leq 0, \\ \Delta B(v)(t_2 - 1) &\geq \frac{1 - \alpha}{l_1} B(v)(l_1) \geq \Delta B(v)(t_2) \geq 0 \end{aligned}$$

成立, 其中

$$\begin{aligned} B(v)(t) &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_1 - 1)) + \sum_{s=k}^{t_1 - 1} v(s) \right) + \sum_{k=1}^t \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_1 - 1)) + \sum_{s=k}^{t_1 - 1} v(s) \right) \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_1)) + \sum_{s=k}^{t_1} v(s) \right) + \sum_{k=1}^t \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_1)) + \sum_{s=k}^{t_1} v(s) \right) \quad (t < t_1) \\ &= -\frac{\beta}{1-\beta} \sum_{k=l_2+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_2 - 1)) - \sum_{s=t_2}^{k-1} v(s) \right) - \sum_{k=t+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_2 - 1)) - \sum_{s=t_2}^{k-1} v(s) \right) \\ &= -\frac{\beta}{1-\beta} \sum_{k=l_2+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_2)) - \sum_{s=t_2+1}^{k-1} v(s) \right) - \sum_{k=t+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_2)) - \sum_{s=t_2+1}^{k-1} v(s) \right) \quad (t > t_2). \end{aligned}$$

证明 设 $u := B(v)$ 为问题(2)的解, 则由题设知 u 是上凸的。由差分中值定理^[31]知, 存在 $t_1 \in [l_2 + 1, N]_{\mathbb{Z}}$,

$t_2 \in [1, l_1 - 1]_{\mathbb{Z}}$, 使得 $\Delta B(v)(t_1) \leq \frac{B(v)(N+1) - B(v)(l_2)}{N+1-l_2} \leq \Delta B(v)(t_1 - 1) < 0$, $\Delta B(v)(t_2 - 1) \geq$

$\frac{B(v)(l_1) - B(v)(0)}{l_1} = \frac{1-\alpha}{l_1} B(v)(l_1) \geq \Delta B(v)(t_2) > 0$ 。对问题(2)两边同时从 k 到 $t_1 - 1$ 求和分得 $\phi(\Delta u(k-1)) =$

$\phi(\Delta u(t_1 - 1)) + \sum_{t=k}^{t_1 - 1} v(t)$, 两边同时用 ϕ^{-1} 作用得 $\Delta u(k-1) = \phi^{-1} \left(\phi(\Delta u(t_1 - 1)) + \sum_{t=k}^{t_1 - 1} v(t) \right)$, 两边同时从 1 到

k 求和分得 $u(t) = u(0) + \sum_{k=1}^t \phi^{-1} \left(\phi(\Delta u(t_1 - 1)) + \sum_{s=k}^{t_1 - 1} v(s) \right)$ 。令 $t = l_1$ 得 $u(l_1) = u(0) + \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta u(t_1 - 1)) +$

$\sum_{s=k}^{t_1 - 1} v(s) \right)$, 又 $u(0) = \alpha u(l_1)$, 则 $u(0) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta u(t_1 - 1)) + \sum_{s=k}^{t_1 - 1} v(s) \right)$, 即

$$u(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{s=k}^{t_1 - 1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta u(t_1 - 1)) + \sum_{s=k}^{t_1 - 1} v(s) \right) + \sum_{k=1}^t \phi^{-1} \left(\phi(\Delta u(t_1 - 1)) + \sum_{s=k}^{t_1 - 1} v(s) \right) \quad (t < t_1),$$

故当 $t < t_1$ 时,

$$B(v)(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_1 - 1)) + \sum_{s=k}^{t_1 - 1} v(s) \right) + \sum_{k=1}^t \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_1 - 1)) + \sum_{s=k}^{t_1 - 1} v(s) \right).$$

同理可证

$$\begin{aligned}
B(v)(t) &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_1)) + \sum_{s=k}^{t_1} v(s) \right) + \sum_{k=1}^t \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_1)) + \sum_{s=k}^{t_1} v(s) \right) \quad (t < t_1); \\
B(v)(t) &= -\frac{\beta}{1-\beta} \sum_{k=l_2+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_2-1)) - \sum_{s=t_2}^{k-1} v(s) \right) - \sum_{k=t+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_2-1)) - \sum_{s=t_2}^{k-1} v(s) \right); \\
B(v)(t) &= -\frac{\beta}{1-\beta} \sum_{k=l_2+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_2)) - \sum_{s=t_2+1}^{k-1} v(s) \right) - \sum_{k=t+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta B(v)(t_2)) - \sum_{s=t_2+1}^{k-1} v(s) \right) \quad (t > t_2).
\end{aligned}$$

引理 7 假设对任意的 $u \in E_{\#}$, 满足 $u(k) \geq 0$, 且 $|\Delta u(k-1)| < 1$, $\Delta(\phi(\Delta u(k-1))) \leq 0$ 成立, 则

$$\min_{k \in [l_1, l_2]_{\mathbb{Z}}} u(k) \geq \theta \|u\|_{\infty},$$

其中 $\theta = (N+1)^{-1} \min\{l_1, N+1-l_2\}$ 。

证明 由于 $-\Delta(\phi(\Delta u(k-1))) \leq 0$, 故 u 是非负且上凸的, 设 $m = \min_{k \in [l_1, l_2]_{\mathbb{Z}}} u(k)$, 则由 m 的凸性知, $m \in \{u(l_1), u(l_2)\}$, 若 $u(l_1) = m$, $u(l_2) > m$, 则不难验证 $u(k)$ 总是在由 $(0, 0)$ 和 (l_1, m) 所确定的直线 $y = ml_1^{-1}k$ 的下方, 从而 $u(k) \leq \frac{m}{l_1}(N+1)$ 即 $m \geq (N+1)^{-1}l_1 \|u\|_{\infty}$; 若 $u(l_2) = m$, $u(l_1) > m$, 则不难验证 $u(k)$ 总是在由 $(N+1, 0)$ 和 (l_2, m) 所确定的直线 $y = m(N+1-l_2)^{-1}(N+1-k)$ 的下方, 从而 $u(k) \leq m(N+1-l_2)^{-1}(N+1)$ 即 $m \geq (N+1)^{-1}(N+1-l_2) \|u\|_{\infty}$ 。综上所述, $\min_{k \in [l_1, l_2]_{\mathbb{Z}}} u(k) \geq \theta \|u\|_{\infty}$, $\theta = (N+1)^{-1} \min\{l_1, N+1-l_2\}$ 。

定义 Nemytskii 算子

$$N_g: E \rightarrow E, \quad N_g(u)(t) = g(k, u(k)),$$

根据 Nemytskii 算子的性质及 (H_2) 可知 N_g 是将有界集映成有界集, 不难验证如下结论成立。

引理 8 定义算子

$$D_g: E_{\#} \rightarrow E_{\#}, \quad D_g = B \circ N_g,$$

则算子 D_g 是紧的, 且 $u \in E_{\#}$ 是问题 (1) 的解当且仅当 u 是 D_g 在 $E_{\#}$ 上的不动点。

3 主要结论的证明

定理 1 的证明。由引理 5 知问题 (1) 等价于和分算子

$$D_f(u)(k) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{t=1}^{l_1} \omega(c, f; t) + \sum_{t=1}^k \omega(c, f; t),$$

由引理 2 及 (H_1) 知

$$\|D_f(u)\| \leq \left(\frac{\alpha l_1}{1-\alpha} + N+1 \right).$$

由引理 3 和引理 5 知, $D_f: E_{\#} \rightarrow E_{\#}$ 为紧算子。定义 $\Omega = \left\{ u \in E_{\#} : \|u\|_{\infty} \leq \frac{\alpha l_1}{1-\alpha} + N+1 \right\}$ 显然 $D_f(\Omega) \subset \Omega$ 。根据 Schauder 不动点定理^[29] 可知 D_f 在 Ω 上有一个不动点, 即为问题 (1) 的解。

定理 2 的证明。根据定理 1 知, 问题 (1) 至少有一个解 u 。不妨设 u 是问题 (1) 的非平凡解, 由于 $\Delta(\phi(\Delta u(k-1))) \leq 0$, 所以 $\phi(\Delta u(k-1))$ 单调递减, 且 u 是上凸的。下面验证 $u \geq 0$ 。由 u 上凸可知只需证明 $u(0) \geq 0$, $u(N+1) \geq 0$ 即可。

当 $\alpha = \beta = 0$ 时, 则 $u(0) = u(N+1) = 0$, 结合 u 是上凸的可得 $u(t) \geq 0$, $t \in [1, N]_{\mathbb{Z}}$, 因为 u 是非平凡解, 故存在 $t_0 \in [1, N]_{\mathbb{Z}}$, 使得 $u(t_0) = \max_{t \in [1, N]_{\mathbb{Z}}} u(t) > 0$, 且 $\Delta u(t_0-1) \geq 0$, $\Delta u(t_0) \leq 0$ 。由引理 7 知, 存在 $l_1, l_2 \in [1, N]_{\mathbb{Z}}$, 使得 $\min_{t \in [l_1, l_2]_{\mathbb{Z}}} u(t) \geq \theta \|u\|_{\infty}$ 。

当 $\alpha = 0$, $\beta \in (0, 1)$ 时, 假设 $u(N+1) < 0$, 则 $u(0) = 0$, $u(l_1) = \frac{1}{\beta} u(N+1) < 0$, 又因为 u 上凸, 由引理 7 知, $u(l_1) \geq \theta \|u\|_{\infty} > 0$, 矛盾。故 $u(t) \geq 0$, $t \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}$ 且 $\min_{t \in [l_1, l_2]_{\mathbb{Z}}} u(t) \geq \theta \|u\|_{\infty}$ 。当 $\beta = 0$, $\alpha \in (0, 1)$ 或 $\alpha, \beta \in (0, 1)$ 时, 利用反证法与上述推理过程可得 $u(t) \geq 0$, $t \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}$ 。特别地, 当 $t \in [l_1, l_2]_{\mathbb{Z}}$ 时,

$u(t) \geq \theta \|u\|_\infty > 0$ 。

定理3的证明。任取 $w \in E_\#$, 定义 $D_g(w) = B(N_g(w))$ 。设 w 在 t_0 处取得最大值, $\|w\|_\infty = w(t_0)$ 。由 u 可知, $t_0 \in [0, l_2]_Z$ 或 $t_0 \in [l_1, N+1]_Z$, $\Theta_1^{-1} := \max\left\{\frac{l_1}{1-\alpha} + l_2 - l_1, \frac{N+1-l_2}{1-\beta} + l_2 - l_1\right\}$ 。显然, 由引理7和引理8知, $D_g(E_\theta) \subset E_\theta$ 且 $D_g: E_\theta \rightarrow E_\theta$ 为紧算子。问题(1)的正解等价于 $D_g(w)$ 在 E_θ 上存在不动点。根据Krasnoselskii不动点定理, 只需验证如下结论成立:

(a) $\|D_g(w)\|_\infty \leq r_1$, $\|w\|_\infty = r_1$, $w \in E_\theta$;

(b) $\|D_g(w)\|_\infty \geq r_2$, $\|w\|_\infty = r_2$, $w \in E_\theta$ 。

先证结论(a)成立。任取 $w \in E_\theta$ 且 $\|w\|_\infty = r_1$, $r_1 > 0$ 满足定理3中的条件(i)、(ii), 则存在 $t_0 \in [0, N+1]_Z$, 使得 $\|D_g(w)\|_\infty = \max_{t \in [0, N+1]_Z} D_g(w) = D_g(w)(t_0)$ 。由引理6知, $D_g(w)$ 上凸, 故 $t_0 \in [0, l_2]_Z$ 或 $t_0 \in [l_1, N+1]_Z$ 。当 $t_0 \in [0, l_2]_Z$ 时, 由引理6和定理3中的条件(i)知, 存在 $t_1 \in [l_2+1, N]_Z$, $t_2 \in [1, l_1-1]_Z$, 使得

$$\|D_g(w)\|_\infty = D_g(w)(t_0) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_1-1)) + \sum_{s=k}^{t_1-1} g(s, w(s)) \right) + \sum_{k=1}^{t_0} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_1-1)) + \sum_{s=k}^{t_1-1} g(s, w(s)) \right)。$$

由 $\Delta D_g(w)(t_1-1) \leq 0$, 得

$$\begin{aligned} \|D_g(w)\|_\infty &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \bar{g}_{0,r_1}(s) \right) + \sum_{k=1}^{l_2} \phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \bar{g}_{0,r_1}(s) \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \bar{g}_{0,r_1}(s) \right) + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} \phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \bar{g}_{0,r_1}(s) \right) \\ &\leq \left(\frac{l_1}{1-\alpha} + l_2 - l_1 \right) \left(\phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \bar{g}_{0,r_1}(s) \right) \right) \leq r_1。 \end{aligned}$$

当 $t_0 \in [l_1, N+1]_Z$ 时, 由引理6和定理3中的条件(ii)知,

$$\begin{aligned} \|D_g(w)\|_\infty &= D_g(w)(t_0) \\ &= -\frac{\beta}{1-\beta} \sum_{k=l_2}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_2)) - \sum_{s=t_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) \\ &\quad - \sum_{k=t_0}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_2)) - \sum_{s=t_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) \\ &\leq \frac{1}{1-\beta} \sum_{k=l_2}^{N+1} \phi^{-1} \left(-\phi(\Delta D_g(w)(t_2)) + \sum_{s=t_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) \\ &\quad + \sum_{k=l_1-1}^{l_2-1} \phi^{-1} \left(-\phi(\Delta D_g(w)(t_2)) + \sum_{s=t_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) \\ &\leq \left(\frac{N+1-l_2}{1-\beta} + l_2 - l_1 \right) \left(\phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \bar{g}_{0,r_1}(s) \right) \right) \\ &\leq r_1。 \end{aligned}$$

下证结论(b)成立。令 $\|w\|_\infty = r_2 \neq r_1$ 且 r_2 满足定理3中的条件(iii)。因为 $w \in E_\theta$, 所以 $\min_{k \in [l_1, l_2]_Z} w(t) \geq \theta \|w\|_\infty$, 利用反证法, 假设 $\|D_g(w)\|_\infty < r_2$, 则 $r_2 > \|D_g(w)\|_\infty = D_g(w)(t_0)$ 。当 $t_0 \in [0, l_2]_Z$ 时, 由引理6和定理3中的条件(iii)知, 存在 $t_1 \in [l_2+1, N]_Z$, $t_2 \in [1, l_1-1]_Z$, 使得

$r_2 > \|D_g(w)\|_\infty = D_g(w)(t_0) \geq D_g(w)(l_2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_1)) + \sum_{s=k}^{t_1} g(s, w(s)) \right) + \sum_{k=1}^{l_2} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_1)) + \sum_{s=k}^{t_1} g(s, w(s)) \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_1)) + \sum_{s=k}^{t_1} g(s, w(s)) \right) + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_1)) + \sum_{s=k}^{t_1} g(s, w(s)) \right) \\ &\geq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi \left(-\frac{1-\beta}{N+1-l_2} D_g(w)(l_2) \right) + \sum_{s=k}^{t_1} g(s, w(s)) \right) + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} \phi^{-1} \left(-\frac{1-\beta}{N+1-l_2} D_g(w)(l_2) + \sum_{s=k}^{t_1} g(s, w(s)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi \left(-\frac{1-\beta}{N+1-l_2} \|D_g w\|_\infty \right) + \sum_{s=l_1}^{l_2} g(s, w(s)) \right) + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} \phi^{-1} \left(-\frac{1-\beta}{N+1-l_2} \|D_g w\|_\infty + g(l_2, w(l_2)) \right) \\ &\geq \left(\frac{l_1}{1-\alpha} + l_2 - l_1 \right) \phi^{-1} \left(\phi \left(-\frac{1-\beta}{N+1-l_2} r_2 \right) + \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_2) \right) > r_2. \end{aligned}$$

矛盾。若 $t_0 \in [l_1, N+1]_{\mathbb{Z}}$, 则

$$\begin{aligned} r_2 &> \|D_g(w)\|_\infty = D_g(w)(t_0) \geq D_g(w)(l_1) \\ &\geq \frac{1}{1-\beta} \sum_{k=l_2+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(-\phi(\Delta D_g(w)(t_2)) + \sum_{s=l_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} \phi^{-1} \left(-\phi(\Delta D_g(w)(t_2)) + \sum_{s=l_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) \\ &\geq \frac{1}{1-\beta} \sum_{k=l_2+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(-\phi \left(\frac{1-\alpha}{l_1} D_g(w)(l_2) \right) + \sum_{s=l_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} \phi^{-1} \left(-\phi \left(\frac{1-\alpha}{l_1} D_g(w)(l_2) \right) + \sum_{s=l_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) \\ &\geq \frac{1}{1-\beta} \sum_{k=l_2+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(-\phi \left(\frac{1-\alpha}{l_1} \|D_g w\|_\infty \right) + \sum_{s=l_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} \phi^{-1} \left(-\phi \left(\frac{1-\alpha}{l_1} \|D_g w\|_\infty \right) + \sum_{s=l_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) \\ &\geq \frac{1}{1-\beta} \sum_{k=l_2+1}^{N+1} \phi^{-1} \left(-\phi \left(\frac{1-\alpha}{l_1} r_2 \right) + \sum_{s=l_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} \phi^{-1} \left(-\phi \left(\frac{1-\alpha}{l_1} r_2 \right) + g(l_1, w(l_1)) \right) \\ &\geq \left(\frac{N+1-l_2}{1-\beta} + l_2 - l_1 \right) \left(\phi^{-1} \left(-\phi \left(\frac{1-\alpha}{l_1} r_2 \right) + \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_1) \right) \right) > r_2. \end{aligned}$$

矛盾,故假设不成立,即(b)成立。由 Krasnoselskii 不动点定理^[29]可知问题(1)至少有一个解 $u \in E_\theta$ 。

定理4的证明。由题设和定理3的证明可知,存在正常数 $r_1, r_2 \in (0, (N+1))$, ($r_1 \neq r_2$), 且满足 $r_1 \Theta_1^{-1} > 1 > r_2 \Theta_0^{-1}$, 使得定理3的条件(i)、(ii)、(iii)成立,因此由定理3可知问题(1)存在一个正解 u_1 满足 $r_2 \|u_1\|_\infty \leq r_1$ 。

由题设 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(k, s)}{s} = 0$ 对任意的 $k \in [1, N]_{\mathbb{Z}}$ 一致成立知,存在 $0 < r_0 < r_2$ 充分小满足 $\phi(\Theta_1^{-1} r_0) < 1$, 使得当 $0 \leq u \leq r_0$ 时,

$$g(k, s) \leq \frac{\phi(\Theta_1^{-1} r_0)}{r_0 N} \tag{5}$$

s 对任意的 $k \in [1, N]_{\mathbb{Z}}$ 一致成立。下面验证不等式 $\|D_g(w)\|_\infty \leq r_0$, $\|w\|_\infty = r_0$, $w \in E_\theta$ 成立。

事实上,存在 $t_0 \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}$, 使得 $\|D_g(w)\|_\infty = \max_{t \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} D_g(w) = D_g(w)(t_0)$ 。由引理6知, $D_g(w)$ 上凸, 故 $t_0 \in [0, l_2]_{\mathbb{Z}}$ 。当 $t_0 \in [l_1, N+1]_{\mathbb{Z}}$ 。当 $t_0 \in [0, l_2]_{\mathbb{Z}}$ 时, 由引理6和式(5)知存在 $t_1 \in [l_2+1, N]_{\mathbb{Z}}$, 使得

$$\begin{aligned} &\|D_g(w)\|_\infty = D_g(w)(t_0) \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_1-1)) + \sum_{s=k}^{t_1-1} g(s, w(s)) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{t_0} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_1-1)) + \sum_{s=k}^{t_1-1} g(s, w(s)) \right) \\ &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \frac{\phi(\Theta_1^{-1} r_0)}{r_0 N} w(s) \right) + \sum_{k=1}^{l_2} \phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \frac{\phi(\Theta_1^{-1} r_0)}{r_0 N} w(s) \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{l_1} \phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \frac{\phi(\Theta_1^{-1} r_0)}{r_0 N} w(s) \right) + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} \phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \frac{\phi(\Theta_1^{-1} r_0)}{r_0 N} w(s) \right) \\ &\leq \left(\frac{l_1}{1-\alpha} + l_2 - l_1 \right) \left(\phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \frac{\phi(\Theta_1^{-1} r_0)}{r_0 N} \|w\|_\infty \right) \right) \\ &\leq \Theta_1 \phi^{-1} \left(N \frac{\phi(\Theta_1^{-1} r_0)}{r_0 N} r_0 \right) \leq \Theta_1 \phi^{-1}(\phi(\Theta_1^{-1} r_0)) = r_0. \end{aligned}$$

当 $t_0 \in [l_1, N+1]_{\mathbb{Z}}$ 时, 由引理6和式(5)知, 存在 $t_2 \in [1, l_1-1]_{\mathbb{Z}}$, 使得

$$\begin{aligned}
\|D_g(w)\|_\infty &= D_g(w)(t_0) \\
&= -\frac{\beta}{1-\beta} \sum_{k=l_2}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_2)) - \sum_{s=t_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) - \sum_{k=t_0}^{N+1} \phi^{-1} \left(\phi(\Delta D_g(w)(t_2)) - \sum_{s=t_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) \\
&\leq \frac{1}{1-\beta} \sum_{k=l_2}^{N+1} \phi^{-1} \left(-\phi(\Delta D_g(w)(t_2)) + \sum_{s=t_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) + \sum_{k=l_1-1}^{l_2-1} \phi^{-1} \left(-\phi(\Delta D_g(w)(t_2)) + \sum_{s=t_2+1}^{k-1} g(s, w(s)) \right) \\
&\leq \left(\frac{N+1-l_2}{1-\beta} + l_2 - l_1 \right) \left(\phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \frac{\phi(\Theta_1^{-1} r_0)}{r_0 N} w(s) \right) \right) \\
&\leq \Theta_1 \phi^{-1} \left(\sum_{s=1}^N \frac{\phi(\Theta_1^{-1} r_0)}{r_0 N} r_0 \right) \leq \Theta_1 \phi^{-1}(\phi(\Theta_1^{-1} r_0)) = r_0.
\end{aligned}$$

结合 $\|D_g(w)\|_\infty \geq r_2$, $\|w\|_\infty = r_2$, $w \in E_\theta$ 和 Krasnoselskii 不动点定理, 可得问题(1)存在正解 $u_2 \in E_\theta$, 满足 $0 < r_0 \leq \|u_2\|_\infty \leq r_2$.

4 应用举例

例1 考察边值问题

$$\begin{cases} -\Delta \left(\frac{(\Delta u(k-1))}{\sqrt{1-(\Delta u(k-1))^2}} \right) = [u(k+1) - u(k)] + k, & k \in [1, 6]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = \frac{1}{4}u(2), \quad u(7) = \frac{1}{4}u(4), \end{cases} \quad (6)$$

其中 $f(u) = \Delta u(k) + k$ 关于 u 连续. 根据定理1可知则问题(6)至少有一个解.

例2 考察边值问题

$$\begin{cases} -\Delta \left(\frac{(\Delta u(k-1))}{\sqrt{1-(u(k-1))^2}} \right) = u^2 + 2, & k \in [1, 6]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = \frac{1}{4}u(2), \quad u(7) = \frac{1}{4}u(4), \end{cases} \quad (7)$$

其中 $g(k, u) = u^2 + 1$ ($0 < u < 7$) 关于 u 连续. 根据定理2可知则问题(7)至少有一个解 u .

下面验证定理3的条件成立, 使得问题(7)至少存在一个正解. 显然 $l_1 = 2$, $l_2 = 4$, $N = 6$, $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$, $\theta =$

$\frac{2}{7}$. 令 $r_1 = 6$, $r_2 = 2$, 则不难计算 $\Theta_0 := \max \left\{ \frac{1-\alpha}{l_1}, \frac{1-\beta}{N+1-l_2} \right\} = \frac{3}{8}$ 且 $\frac{l_1}{1-\alpha} + l_2 - l_1 = \frac{14}{3}$, $\frac{N+1-l_2}{1-\beta} + l_2 - l_1 = 6$,

$\sum_{k=1}^7 \bar{g}_{0, r_1}(k) = 266$, $\min \{ \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_1), \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_2) \} = \frac{114}{49}$. 进而有

$$(1) \quad \frac{14}{3} \phi^{-1} \left(\sum_{k=1}^7 \bar{g}_{0, r_1}(k) \right) = \frac{14}{3} \phi^{-1}(266) \leq 6;$$

$$(2) \quad 6\phi^{-1} \left(\sum_{k=1}^7 \bar{g}_{0, r_1}(k) \right) = 6\phi^{-1}(266) \leq 6;$$

$$(3) \quad \min \{ \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_1), \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_2) \} = \frac{114}{49} \approx 2.3265 \geq \phi \left(\frac{6}{8} \right) + \phi \left(\frac{1}{4} \right) \approx 1.732.$$

根据定理3可得问题(7)至少有一个正解 u 满足 $2 \leq \|u\|_\infty \leq 6$.

例3 考察边值问题

$$\begin{cases} -\Delta \left(\frac{(\Delta u(k-1))}{\sqrt{1-(\Delta u(k-1))^2}} \right) = e^u - 1 - u + u^3, & k \in [1, 9]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = \frac{1}{4}u(2), \quad u(10) = \frac{1}{2}u(5), \end{cases} \quad (8)$$

其中 $g(k, u) = e^u - 1 - u + u^3$ ($0 < u < 10$) 关于 u 连续且满足 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(k, s)}{s} = 0$. 显然 $l_1 = 2$, $l_2 = 5$, $N = 9$, $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta =$

$\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{5}$ 。不难计算 $\Theta_0 := \max \left\{ \frac{1-\alpha}{l_1}, \frac{1-\beta}{N+1-l_2} \right\} = \frac{1}{8}$ 其 $\frac{l_1}{1-\alpha} + l_2 - l_1 = 11$, $\frac{N+1-l_2}{1-\beta} + l_2 - l_1 = 13$, $\Theta_1 = 13$ 。令 $r_1 = 14$, $r_2 = 4$, 则 $r_1 \Theta_1^{-1} > 1 > r_2 \Theta_0$ 且当 $u \in [0.8, 4]$ 时, $\min \{ \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_1), \underline{g}_{\theta r_2, r_2}(l_2) \} = e^{0.8} - 1 - 0.8 + (0.8)^3 \approx 0.938 \geq \phi \left(\frac{1}{2} \right) + \phi \left(\frac{2}{5} \right) = \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{2}{\sqrt{21}} \approx 0.685$ 。故定理4的条件均成立。从而问题(8)至少存在2个正解。

参考文献:

- [1] TIMOSHENK S. Theory of elastic stability[M]. New York: McGraw Hill, 1961.
- [2] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
MA Ruyun. Non-local problems of nonlinear ordinary differential equations[M]. Beijing: Science Press, 2004.
- [3] II'IN V A, MOISEEV E I. A nonlocal boundary value problem of the first kind for the Sturm-Liouville operator in differential and difference interpretations[J]. Differentsial'nye Uravneniya, 1987, 23(7):1198-1207.
- [4] II'IN V A, MOISEEV E I. A nonlocal boundary value problem of the second kind for the Sturm-Liouville operator[J]. Differentsial'nye Uravneniya, 1987, 23(8):1422-1431.
- [5] GUPTA V, CHAITAN P. Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992, 168(2):540-551.
- [6] MA Ruyun. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary-value problem[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 1998, 34:1-8.
- [7] WEBB J R L. Positive solutions of some three point boundary value problems via fixed point index theory[J]. Nonlinear Analysis, 2001, 47(7):4319-4332.
- [8] WEBB J R L, GENNARO INFANTE. Positive solutions of nonlocal boundary value problems[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2006, 74(3):673-693.
- [9] CAO Daomin, MA Ruyun. Positive solutions to a second order multi-point boundary-value problem[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2000, 65:1-8.
- [10] MA Ruyun. A survey on nonlocal boundary value problems[J]. Applied Mathematics E-notes, 2007, 7:257-279.
- [11] BINDING P, DRABEK P. Sturm-Liouville theory for the p -Laplacian[J]. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 2003, 40(4):375-396.
- [12] WANG Youyu, GE Weigao. Existence of triple positive solutions for multi-point boundary value problems with a one dimensional p -Laplacian[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 54(6):793-807.
- [13] MA Ruyun, LU Yanqiong, Ahmed Omer Mohammed. On positive solutions to equations involving the one-dimensional p -Laplacian[J]. Boundary Value Problems, 2013, 2013(125):1-11.
- [14] DAI Guowei, MA Ruyun, LU Yanqiong. Bifurcation from infinity and nodal solutions of quasilinear problems without the signum condition[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 397(1):119-123.
- [15] BEREANU C, MAWHIN J. Existence and multiplicity results for some nonlinear problems with singular ϕ -Laplacian[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2007, 243(2):536-557.
- [16] CHINN A, BELLA B D, JEBELEAN P, et al. A four-point boundary value problem with singular ϕ -Laplacian[J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2019, 21(2):16-66.
- [17] MA Ruyun, GAO Hongliang, LU Yanqiong. Global structure of radial positive solutions for a prescribed mean curvature problem in a ball[J]. Journal of Functional Analysis, 2016, 270(7):2430-2455.
- [18] DAI Guowei. Bifurcation and nonnegative solutions for problems with mean curvature operator on general domain[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2018, 67(6):2103-2121.
- [19] MA Ruyun, XU Man, HE Zhiqian. Nonconstant positive radial solutions for Neumann problem involving the mean extrinsic curvature operator[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 484(2):1-13.
- [20] LU Yanqiong, LI Zhiqiang, CHEN Tianlan. Multiplicity of solutions for non-homogeneous Dirichlet problem with one-dimension Minkowski-curvature operator[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2022, 21(4):1-21.
- [21] DAI Guowei. Some results on surfaces with different mean curvatures in \mathbf{R}^{N+1} and \mathbf{L}^{N+1} [J]. Annali Di Matematica Pura Ed Applicata, 2022, 201(1):335-357.
- [22] GURBAN Daniel A, JEBELEAN Petru. Positive radial solutions for multiparameter Dirichlet systems with mean curvature operator in Minkowski space and Lane-Emden type nonlinearities[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2019, 266(9):5377-5396.