山东大学学报(理学版)2025 年 5 月 第 60 卷 第 5 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.5, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)05-0013-07 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.469

p-群上的作用与 p-超可解性

白鹏飞,王俊新*,曹建基
(山西财经大学应用数学学院, 山西 太原 030006)

摘要:设有限群 A 作用在有限 p-群 P 上,其中$|P|>p^e\geqslant p^3$, e 是某个固定的正整数,证明了若 P 中的每个 p^e 阶非循环且非极大类子群皆是 $O^p(A)$-不变的,则 $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})$在 P 上的作用是平凡的(即 $C_P(O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}}))=P$),其中 $\mathfrak{A}_{p-1}$是由所有方次数整除 $p-1$的交换群组成的群系,$A^{\mathfrak{A}_{p-1}}$是 A 的 $\mathfrak{A}_{p-1}$-剩余。给出了有限群是 p-超可解的若干充分条件。

关键词:非循环且非极大类 p-群;p-超可解;S-半置换;$\mathfrak{Z}_\pi$-置换
中图分类号:O152 **文献标志码**:A
引用格式:白鹏飞,王俊新,曹建基. p-群上的作用与 p-超可解性[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):13-19.

Action on p-groups and p-supersolvability

BAI Pengfei, WANG Junxin*, CAO Jianji
(School of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan 030006, Shanxi, China)

Abstract: Let a finite group A act on a finite p-group P with $|P|>p^e\geqslant p^3$, where e is a fixed positive integer. In this paper, it is proved that if every non-cyclic and non-maximal class subgroup of order p^e of P is $O^p(A)$-invariant, then $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ acts trivially on P (namely $C_P(O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}}))=P$), where $\mathfrak{A}_{p-1}$ is a formation which consists of all abelian groups with exponent dividing $p-1$ and $A^{\mathfrak{A}_{p-1}}$ is the $\mathfrak{A}_{p-1}$-residue of A. Some sufficient conditions for a finite group to be p-supersolvable are also given.

Key words: non-cyclic and non-maximal class p-group; p-supersolvability; S-semipermutable; $\mathfrak{Z}_\pi$-permutability

0 引言

本文中的群皆为有限群,p 总表示某个素数。设 G 是群,则 $O^p(G)$是由所有阶不能被 p 整除的元素所生成的 G 的子群。此外,若 $\mathfrak{F}$ 是群系,则 $G^{\mathfrak{F}}$ 表示 G 的 $\mathfrak{F}$-剩余,即 $G^{\mathfrak{F}}$ 是 G 中唯一的使得$G/G^{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{F}$ 的最小正规子群。除此之外,设群 F 作用在 G 上,则考虑半直积 $G\rtimes F$。进一步地,如果 $C_G(F)=G$,那么称 F 在 G 上的作用是平凡的;如果 G 的子群 L 对于任意 $f\in F$,皆有 $L^f=L$,那么称 L 为 F-不变的或者称 F 正规化 L。

众所周知,群作用是研究群理论十分重要的技术手段。如 Blackburn 定理[1]:设 p'-群 H 作用在 p-群 P 上,若$[\Omega_1(P),H]=1$,且当 $p=2$ 时也有$[\Omega_2(P),H]=1$,则$[P,H]=1$。记 e 是某一固定的正整数,$\mathfrak{A}_{p^i-1}$表示由所有方次数整除 p^i-1 的交换群组成的群系($i\geqslant1$),假设群 A 作用在 p-群 P 上。Berkovich 等[2]证明了如果 P 的每个 $p^e\geqslant p^3$ 阶非循环子群均是 $O^p(A)$-不变的,则“$O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})\leqslant C_A(P)$”。Guo 等[3]仅要求群 P 中的每个 $p^e\geqslant p^4$(当 $p=2$ 时 $e\geqslant5$)阶非亚循环子群是 $O^p(A)$-不变的,得到了一个类似的结果“$O^p(A^{\mathfrak{A}_{p^2-1}})\leqslant C_A(P)$”。对偶地,Bai 等[4]假定 P 中每个 $p^e\geqslant p^2$ 阶非极大类子群是 $O^p(A)$-不变的(称 p^n 阶群为极大类 p-群,如果 $n\geqslant3$ 且它的幂零类是 $n-1$,见文献[5]),同样取得了“$O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})\leqslant C_A(P)$”。类似的研究见文献

收稿日期:2023-11-08; **网络出版时间**:2024-11-25 17:38:03
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12171302,11801334);山西省自然科学基金资助项目(202103021224287);山西省回国留学人员科研项目(2024-095)
第一作者:白鹏飞(1987—),男,副教授,博士,研究方向为有限群论. E-mail:baipengfei870514@163.com
*通信作者:王俊新(1966—),男,教授,博士,研究方向为有限群论. E-mail:wangjunxin660712@163.com

[6-8]。从幂零类的角度看,循环 p-群的幂零类最小,而极大类 p-群具有最大的幂零类,这是两个极端对立的情形。但是,在上述条件“每个 p^e 阶非循环子群均是 $O^p(A)$-不变的”和“每个 p^e 阶非极大类子群是 $O^p(A)$-不变的”下,获得的结果是一样的,即 $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}}) \leqslant C_A(P)$。鉴于此观察,将非循环与非极大类相结合,提出如下问题。

问题 1 设群 A 作用在 p-群 P 上,其中 $|P|>p^e$,若 P 中每个 p^e 阶非循环且非极大类子群皆是 $O^p(A)$-不变的,则 $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}}) \leqslant C_A(P)$ 是否成立?

称群 P 的子群 M 为 N^*-子群,若 M 满足条件

$$N^*: M \text{ 非循环且 } M \text{ 不是极大类 } p\text{-群。}$$

进而,回答如下。

定理 1 记整数 $e \geqslant 3$,设群 A 作用在 p-群 P 上,其中 $|P|>p^e$,若 P 的每个 p^e 阶 N^*-子群均是 $O^p(A)$-不变的,则 $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ 在 P 上作用平凡,其中 $\mathfrak{A}_{p-1}$ 是由所有方次数整除 $p-1$ 的交换群组成的群系。

例 1 是对定理 1 中限制 $e \geqslant 3$ 的一个解释。

例 1 设群 P 同构于 $C_{p^2} \times C_{p^2}$(2 个 p^2 阶循环群的直积),考虑 $A=\mathrm{Aut}(P)$ 在 P 上的作用,其中 $\mathrm{Aut}(P)$ 表示 P 的自同构群。由于 $\mho_1(P) \cong C_p^2$ 是 P 中唯一的 p^2 阶 N^*-子群,因此 $\mho_1(P)$ 是 $O^p(A)$-不变的。但是,根据 $\mho_1(P)$ char P 可知,A 具有一个同态像同构于 $GL(2,p)$,进而 A 无正规 Sylow p-子群,这意味着 $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ 非平凡,即 $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ 在 P 上的作用是非平凡的。

一些学者研究了某些给定阶数的 p-子群都满足某种嵌入性质的群的结构,比如:S-置换[9]、弱 s-置换[10]、S-半置换[11]、SS-可补[12]、$\mathfrak{Z}$-置换[13-14]、$\mathfrak{Z}_p$-置换[3]等。这里详列 S-半置换的定义:称群 G 的子群 H 在 G 中 S-半置换,若对任意不整除 $|H|$ 的素数 q($|H|$ 表示 H 的阶,$q \nmid |H|$),H 与 G 的每个 Sylow q-子群 Q 皆可交换,即 $QH=HQ$,见文献[11]。

本文首先证明了定理 1,利用此结果给出了群是 p-超可解的一个充分条件(一个群称为 p-超可解群,若它的主因子或为 p 阶循环群或为 p'-群,见文献[1]中的定义 9.1.5),可得定理 2。

定理 2 记整数 $e \geqslant 3$,假设群 G 的 Sylow p-子群是阶大于 p^e 的 N^*-子群,若 G 的每个 p^e 阶 N^*-子群皆在 G 中是 S-半置换的,则 G 是 p-超可解群。

最后,还证明了一个与定理 1 等价的定理(见定理 3),并且还给出了群是 p-超可解的另一个充分条件(见定理 4)。

C_{p^n} 表示 1 个 p^n 阶循环群,$A \times B$ 表示群 A 与群 B 的直积,进而 $C_{p^m} \times C_{p^n}$ 表示 p^m 阶循环群与 p^n 阶循环群的直积。$A-B$ 表示集合 $\{x \mid x \in A$,但是 $x \notin B\}$,其中 A 与 B 为集合。另外,设 G 是群,$\exp(G)$、$|G|$、$\pi(G)$、$O_\pi(G)$、$O_{pp'}(G)$ 和 $|G|_p$ 分别表示 G 的方次数(即 G 中所有元素的阶的最小公倍数)、G 的阶、$|G|$ 的所有素因子组成的集合、G 中最大的正规 π-子群、$O_{p'}(G/O_p(G))$ 在 G 中的原像和 G 的 Sylow p-子群的阶。此外,对于 G 的子群 H,称 H^G 为 H 在 G 中的正规闭包。若 G 是 p-群,则 $\Omega_{\{i\}}(G)$ 和 $\mho_{\{i\}}(G)$ 分别表示集合 $\{g \in G \mid g^{p^i}=1\}$ 和 $\{g^{p^i} \mid g \in G\}$,$\Omega_i(G)$ 和 $\mho_i(G)$ 分别表示由 $\Omega_{\{i\}}(G)$ 和 $\mho_{\{i\}}(G)$ 生成的群,即 $\Omega_i(G)=\langle \Omega_{\{i\}}(G) \rangle$,$\mho_i(G)=\langle \mho_{\{i\}}(G) \rangle$。若 G 是内交换 p-群(即所有真子群均交换的非交换 p-群),则

$$Q_8 \text{ 表示} \langle a,b \mid a^4=1,\ b^2=a^2,\ a^b=a^{-1} \rangle,$$

$$M_p(n,m) \text{ 表示} \langle a,b \mid a^{p^n}=b^{p^m}=1,\ a^b=a^{1+p^{n-1}} \rangle,\text{ 其中 } n \geqslant 2,\ m \geqslant 1,$$

其它未提到的符号参见文献[1,5,15]。

1 预备知识

定义 1[3] 称 p-群 G 为 $CS(p,n)$-群,若 G 有一个特征子群链

$$1=G_0<G_1<\cdots<G_m=G$$

使得 $|G_i/G_{i-1}| \leqslant p^n$,$i \in \{1,2,\cdots,m\}$。

引理 1[4] 令整数 $e \geqslant 3$,设 C 是非极大类 p-群 G 的一个子群,若 $|G| \geqslant p^e$ 且 $|C|<p^e$,则 G 中存在 p^e 阶非极大类子群 H 使得 $C \leqslant H$。

引理 2　令整数 $e\geqslant 2$,设 G 是 N^*-p-群且 C 是 G 的子群,若 $|G|\geqslant p^e$ 且 $|C|<p^e$,则 G 中存在 p^e 阶 N^*-子群 H 使得 $C\leqslant H$。

证明　反证法。假设结论不真,则 G 的任意 p^e 阶子群 U 使得 $C\leqslant U$,均有 U 循环或者 U 是极大类 p-群,这意味着 $|G|>p^e$。设 $A=\{M\leqslant G|M$ 是 N^*-子群使得 $C\leqslant M$ 且 $|M|\geqslant p^e\}$,则 $U\notin A$。由于 G 是 N^*-p-群,因此 $G\in A$,这说明 $A\neq\varnothing$。取 A 中包含关系下最小的元素 V,即 V 的任意真子群 W,均有 $W\notin A$,则 U 的任意性暗含着 $|V|\geqslant p^{e+1}$。

设 $|V|=p^{n+1}$,则 $n\geqslant e$。这种情况下,若 $n\geqslant 3$,则据引理 1 得 V 中存在极大子群 X 使得 $C\leqslant X$ 且 X 不是极大类 p-群。又,V 的极小性隐含着 $X\notin A$,所以 X 是循环群。若 $n=2$,则设 Y 是 V 的极大子群且 $C\leqslant Y$。注意到 Y 是交换群,Y 不是极大类 p-群。依据 V 的极小性知 $Y\notin A$,所以 Y 也是循环群,于是 V 有 p^n 阶循环子群。由于 V 是 N^*-群,因此 $V\ncong M_p(2,1)$,进而由文献[5]中的定理 2.2.10 和 2.5.3 知,$V\cong C_{p^n}\times C_p$ 或 $V\cong M_p(n,1)$,其中 $M_p(n,1)\neq M_p(2,1)$,从而 $\Omega_{e-1}(V)\cong C_{p^{e-1}}\times C_p$。由 U 的任意性可知 $C\nleqslant\Omega_{e-1}(V)$,但是,依据 $|C|<p^e$ 可知 $\exp(C)\leqslant e-1$,从而 $C\leqslant\Omega_{e-1}(V)$,矛盾。

推论 1　记整数 $e\geqslant 2$,设 G 是阶大于 p^e 的 N^*-p-群且 C 是 G 的一个子群,若 $C\cong C_{p^e}$,则 G 具有子群 H 使得 $H\cong C_{p^{e-1}}\times C_p$。

证明　据引理 2 知,G 中存在 p^{e+1} 阶 N^*-子群 M 使得 $C\leqslant M$。注意到 $|M:C|=p$,据文献[5]中的定理 2.2.10和 2.5.3,有 $M\cong C_{p^e}\times C_p$ 或 $M\cong M_p(e,1)$,其中 $M_p(e,1)\neq M_p(2,1)$,因此 M 有极大子群 H 使得 $H\cong C_{p^{e-1}}\times C_p$。

引理 3[2]　设群 A 作用在 p-群 P 上,则下列任一条件皆可充分保证 $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ 在 P 上的作用是平凡的。

(1) P 循环;

(2) P 有循环极大子群,但 P 既不是 p^2 阶初等交换群($C_p\times C_p$),也不是四元数群(Q_8);

(3) P 中每个极大子群均是 $O^p(A)$-不变的。

引理 4[4]　记整数 $e\geqslant 2$,设群 A 作用在 p-群 P 上,其中 $|P|>p^e$,若 P 的每个 p^e 阶非极大类子群皆是 $O^p(A)$-不变的,则 $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ 在 P 上作用平凡。

引理 5[4]　设 G 是 p-群且 $|G|\geqslant p^5$,若 G 中存在极大子群是极大类 p-群,则 G 是 $CS(p,1)$-群。

引理 6[4]　设群 A 作用在 p-群 P 上,若 P 有一个 A-不变正规子群链使得其因子皆为 p 阶群,则 $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ 平凡地作用在 P 上。特别地,若 P 是 $CS(p,1)$-群,则 $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ 在 P 上的作用平凡。

引理 7[4]　记整数 $e\geqslant 3$,设 G 是非循环 p-群且 $|G|>p^e$,若 G 中 p^e 阶非极大类子群的个数最多为 p,则 G 是极大类 p-群。

引理 8[2]　设 $N\trianglelefteq G$ 且记 $\bar{G}=G/N$,若 U 是群 G 的 S-半置换 p-子群,则 $\bar{U}$ 在 $\bar{G}$ 中也是 S-半置换的。

引理 9[2]　设 $U\subseteq H\subseteq G$,其中 U 在 G 中是 S-半置换的,则 U 在 H 中也是 S-半置换的。

引理 10[16]　设 π 是一个素数集合且 H 是群 G 的 S-半置换 π-子群,则 H 在 H^G 中存在幂零 π-补,且所有这样的 π-补在 H^G 中共轭。另外,若 π 由单个素数组成,则 H^G 可解。

引理 11[2]　设 U 是群 G 的 S-半置换 p-子群,且 V 是 G 的正规 p-子群,则 $U\cap V$ 被 $O^p(G)$ 正规化。特别地,若 $U\leqslant V$,则 U 被 $O^p(G)$ 正规化。

引理 12[15]　设群 G 作用在集合 Ω 上,若 G 包含一个子群 N,它在 Ω 上的作用是传递的,则 $G=G_\alpha N$,$\forall\alpha\in\Omega$,其中 $G_\alpha=\{g\in G|\alpha^g=\alpha\}$。

引理 13[2]　假设群 G 不可约地作用在初等交换 p-群 V 上,且 $O^p(G^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ 平凡地作用在 V 上,则 $|V|=p$。

2　主要定理的证明

定理 1 的证明。假设 P 是极小阶反例,且记 $C=C_P(O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}}))$,则 $C<P$。设 S 是 A 的 Sylow p-子群,分 4 个步骤完成证明。

(1) $|P|>p^{e+1}$ 且 P 的每个极大子群皆是 N^*-子群。

依据引理 3 中(1)、(2)得,P 非循环且 P 的所有极大子群皆是非循环的。若 $|P|=p^{e+1}$,则 P 的每个 p^e

阶非极大类子群均是 N^*-子群。P 的每个 p^e 阶非极大类子群皆是 $O^p(A)$-不变的。由引理4得 $C=P$,矛盾,因此 $|P|>p^{e+1}$。进一步地,如果 P 具有极大子群是极大类 p-群,则据引理5知 P 是 $CS(p,1)$-群。由引理6知 $C=P$,矛盾,因此 P 的所有极大子群皆是 N^*-子群。

(2) 包含关系下,C 在 P 的所有 A-不变真子群中是极大的,即对于 P 的任意 A-不变真子群 I,若 $I\nleq C$,则 $IC=P$。进一步地,C 的极大性暗含着 $N_P(C)=P$,这说明 $C\trianglelefteq P$,从而 P/C 是初等交换群。

首先断言 $|C|\geq p^e$。事实上,取 P 的 SP-不变极大子群 M,由步骤(1)得 M 是 N^*-群且 $|M|>p^e$。设 $B=\{H\leq M\mid H$ 是 N^*-群且 $|H|=p^e\}$,根据引理2知 $|B|\geq 1$。如果 $|B|=1$,根据引理7知 M 中至少有 $1+p$ 个 p^e 阶非极大类子群,所以由推论1知 B 中唯一的元素 $H\cong C_{p^{e-1}}\times C_p$。又,依据题设条件有 $H^{O^p(A)}=H$ 且 H 的唯一性隐含着 H char $M\trianglelefteq SP$,故 $A=SO^p(A)$ 作用在 H 上。根据引理3(2)知 $H\leq C$,即 $|C|\geq p^e$。假设 $|B|\geq 2$,若 B 中的所有元素皆是 SP-不变的,根据题设条件,在 B 中取2个不同的元素 H_1 和 H_2,则 H_1H_2 是 $A=SO^p(A)$-不变的。注意到 $|H_1H_2|>p^e$,由 $H_1H_2\leq M$、P 的极小性可得,$H_1H_2\leq C$,即 $|C|\geq p^e$。若 B 中存在一个元素 H_3 使得 $H_3\ntrianglelefteq SP$,则 $|H_3^{PS}|>p^e$。由于 H_3^{PS} 是 $O^p(A)$-不变的,因此 H_3^{PS} 也是 A-不变的。又,$H_3^{PS}\leq M$,从而 P 的极小性暗含着 $H_3^{PS}\leq C$,即 $|C|\geq p^e$。断言成立。

若 P 中存在 A-不变子群 U 使得 $C<U<P$,根据上述断言有 $|U|>p^e$。进而根据 P 的极小性知 $U=C_U(O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}}))\leq C_P(O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}}))=C$,矛盾。故包含关系下,$C$ 在 P 的所有 A-不变真子群中是极大的。

(3) 设 $R/C=C_{P/C}(S)$,则 R 有循环子群 X 使得 $X\nleq C$ 且 $|X|<p^e$。

记 $C=C_P(O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}}))$,有 $[C,O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})]=1$。于是 $[O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}}),C,P]=1$。又,根据步骤(2)得 $C\trianglelefteq P$,$[C,P,O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})]=1$。故由文献[15]中的命题4.1.5知,$[P,O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}}),C]=1$。设 $V=[P,O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})]$,则 $V\cap C\leq Z(V)$。注意到 $V/V\cap C\cong VC/C\leq P/C$,根据步骤(2)得 $V/V\cap C$ 初等交换。从而 $V'\leq V\cap C$ 且对于任意 $v\in V$,均有 $v^p\in V\cap C$。进一步地,令 $W=\Omega_{\{2\}}(V)$,根据文献[5]中的命题2.1.2(3)知任意元素 $x,y\in W$,皆有 $(xy)^p=x^py^p[y,x]^{\binom{p}{2}}\in V\cap C$,进而据文献[5]中的命题2.1.2(2)知 $(xy)^{p^2}=x^{p^2}y^{p^2}([y,x]^p)^{\binom{p}{2}}=x^{p^2}y^{p^2}([y^p,x])^{\binom{p}{2}}=1$。于是 $xy\in W$,这意味着 W 是 P 的 A-不变子群。

若 $W\leq C$,则 $[W,O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})]=1$,即对于 $A^{\mathfrak{A}_{p-1}}$ 的任意 p'-子群 Q,均有 $[W,Q]=1$,再据文献[1]中的定理7.4.3知 $[V,Q]=1$,说明 $[P,Q,Q]=1$。根据文献[1]中的推论7.3.7知 Q 在 P 上作用平凡,从而 Q 的任意性暗含着 $C=P$,矛盾,故 $W\nleq C$。根据步骤(2)有 $CW=P$。又,由 $R/C=C_{P/C}(S)$ 有 $R>C$,因此 $R=R\cap CW=C(R\cap W)$,则 $R\cap W\nleq C$。取元素 $r\in R\cap W-C$,记 $X=\langle r\rangle$,则 $X\nleq C$ 且 $|X|\leq\exp(W)<p^e$。

(4) 最后的矛盾。

据步骤(2)、(3)知,$XC\leq P$ 且 $XC\trianglelefteq PS$。若 $XC<P$,则 P 具有的极大子群 T 使得 $XC\leq T$ 且 $T\trianglelefteq PS$,根据步骤(1)知 T 是阶 $\geq p^{e+1}$ 的 N^*-子群。根据步骤(3)和引理2可知存在 p^e 阶 N^*-子群 K 使得 $X<K\leq T$。于是由题设知 K^{PS} 是 $O^p(A)$-不变子群,这意味着 K^{PS} 是 A-不变的。又,再次依据步骤(3)可知 $C<XC\leq KC\leq K^{PS}C\leq P$。根据步骤(2)得 $K^{PS}C=P$,这与 $K^{PS}C\leq T$ 矛盾,因此 $P=XC$。注意到 P/C 循环,根据引理3中的(1)知 $A^{\mathfrak{A}_{p-1}}$ 中任意 p'-子群 Q,皆有 $[P,Q]\leq C$。又,根据 C 的含义可知 $[C,Q]=1$,由文献[1]中的推论7.3.7得 $[P,Q]=1$。至此,由 Q 的任意性即得 $O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ 在 P 上的作用是平凡的,即 $C=P$,矛盾。证毕。

接下来将利用定理1证明定理2。为方便叙述,先回忆2个基本概念:(1) 一个群称为 p-可解群,若它的主因子为 p'-群或 p-群,(2) 设 G 为 p-可解群,则 G 具有上升 p-列

$$1=P_0(G)\trianglelefteq M_0(G)\trianglelefteq P_1(G)\trianglelefteq M_1(G)\trianglelefteq\cdots\trianglelefteq P_l(G)\trianglelefteq M_l(G)=G,$$

式中,$M_i(G)/P_i(G)=O_{p'}(G/P_i(G))$ 且 $P_i(G)/M_{i-1}(G)=O_p(G/M_{i-1}(G))$,称数 l 为 G 的 p-长,记为 $l_p(G)$,见文献[1]中的定义2.2。

引理14 记整数 $e\geq 3$,假设群 G 的 Sylow p-子群是阶大于 p^e 的 N^*-子群,若 G 的每个 p^e 阶 N^*-子群皆在 G 中是 S-半置换的,则 G 是 p-长为1的 p-可解群。

证明 假设 G 是极小阶反例,据引理8知 $G/O_{p'}(G)$ 满足题设条件,由 G 的极小性知

$$O_{p'}(G)=1。\tag{1}$$

设 P 是 G 的 Sylow p-子群,根据引理9知 P^G 也满足题设条件,由 G 的极小性知 $G=P^G$,则

$$G^{\mathfrak{A}_{p-1}}=P^G=G。\tag{2}$$

设 M 是包含关系下，G 中最大的可解正规子群，则 M 是唯一的。根据引理 2，设 X 是 G 的 p^e 阶 N^*-子群，则由题设知 X 在 G 中是 S-半置换的。根据 M 的极大性和引理 10，得

$$X\leqslant M,\ 这隐含着|M|_p\geqslant p^e。\tag{3}$$

断言：若 $|O_p(M)|>p^e$，则 $O_p(M)=M$ 是 G 的 p-子群且 $[O^p(G),M]=1$。事实上，若 $|O_p(M)|>p^e$，根据题设条件知 $O_p(M)$ 中任意 p^e 阶 N^*-子群 Y 皆在 G 中皆是 S-半置换的。又，$O_p(M)$ char $M\trianglelefteq G$。故根据引理 11 知 Y 是 $O^p(G)$-不变的。由式(2)和定理 1 知 $[O^p(G),O_p(M)]=1$。由于 M 可解，根据式(1)和文献[15]中的习题 5.6 知 $C_M(O_p(M))\leqslant O_p(M)$，使得 $O^p(M)=1$，从而 M 为一个 p-群，故 $O_p(M)=M$，断言成立。

下面分 M 是 p-群和 M 不是 p-群 2 种情形分别给出矛盾。

(1) M 是 p-群。

首先证 $[O^p(G),M]=1$。事实上，当 M 是 p-群时，依据式(3)知 $|M|\geqslant p^e$。若 $|M|=p^e$，由式(3)可知 $X=M$。根据 P 是阶大于 p^e 的 N^*-子群和引理 7 知，P 中至少存在 $1+p$ 个 p^e 阶非极大类子群，由 X 的唯一性知 P 中存在 p^e 阶循环子群。根据推论 1 知 $M=X\cong C_{p^{e-1}}\times C_p$。于是由式(2)和引理 3(2)有 $[O^p(G),M]=1$。另外，若 $|M|>p^e$，则据上述断言也有 $[O^p(G),M]=1$。

对于 G 的任意 p-子群 R 使得 $|R|<p^e$，G 中均存在合适的 Sylow p-子群 S 使得 $R\leqslant S$。依据题设也知 S 是阶 $>p^e$ 的 N^*-子群。由据引理 2 得 S 具有 p^e 阶 N^*-子群 H 使得 $R\leqslant H$。又，依据式(3)知 $H\leqslant M$，故 $R\leqslant M$。注意到 $[O^p(G),M]=1$，有 $[O^p(G),R]=1$。进一步地，由 R 的任意性知 G 的任意 p-子群 U，皆有 $[O^p(N_G(U)),\Omega_2(U)]=1$。由文献[1]中的定理 7.4.3 知 $N_G(U)$ 的每个 p'-子群皆平凡地作用在 U 上，即 $N_G(U)/C_G(U)$ 是 p-群，因此根据文献[1]中的定理 8.3.5 得 G 是 p-幂零的，矛盾。

(2) M 不是 p-群。

设 $\Sigma=\{E\trianglelefteq G\mid E$ 不是 p-群但 E 有正规的 Sylow p-子群$\}$，由于 M 是 G 的可解正规子群，因此由式(1)知 $O_{pp'}(M)\in\Sigma$，说明 $\Sigma\neq\varnothing$。包含关系下在 Σ 中取最小元素，记为 N，则由 N 的极小性和式(1)知 $O^p(N)=N$。为方便，记 V 是 N 的 Sylow p-子群，则 V char $N\trianglelefteq G$。

如果能够证明 P 中存在极大子群 A 使得 $|V/V\cap A|=p$ 且 $V\cap A\trianglelefteq G$，则根据式(2)和引理 3 中的(1)知 $[O^p(G),V]\leqslant V\cap A$。进而 $V/V\cap A$ 在 $N/V\cap A$ 的中心中且它是 $N/V\cap A$ 的非平凡的 Sylow p-子群，这与 $O^p(N)=N$ 矛盾。下面将证明满足条件的子群 A 存在。

由于 V 是 N 中正规的 Sylow p-子群，根据文献[15]中的定理 3.4.3(1)，可设 K 是 V 在 N 中的 p-补，进而 $N=VK$。令 Ω 是 V 在 N 中的所有 p-补组成的集合，并且 G 依共轭变换作用在 Ω 上。依据文献[15]中的定理 3.4.3(2)得 Ω 中所有的元素在 N 中共轭，即 N 在 Ω 上的作用是传递的。又，K 的稳定子群是 $G_K=N_G(K)$，由引理 12 知 $G=NG_K=NN_G(K)=VN_G(K)$。注意到 V char $N\trianglelefteq G$，有 $V\leqslant P$，从而 $P=P\cap VN_G(K)=V(P\cap N_G(K))$。设 $W=P\cap N_G(K)$，则 $P=VW$。另外，由式(1)知 $K\ntrianglelefteq N$，进而 $V\nleqslant N_G(K)$，从而 $V\nleqslant W$，于是 $W<P$。进一步地，若 $|P:W|=p$，则 $|V:V\cap W|=|P:W|=p$，从而 $V\cap W\trianglelefteq V$。又，$V\cap W=V\cap P\cap N_G(K)=V\cap N_G(K)\trianglelefteq N_G(K)$，于是 $V\cap W\trianglelefteq VN_G(K)=G$，这时取 $A=W$。假设 $|P:W|\geqslant p^2$，则由引理 2 得，P 有 N^*-极大子群 T 使得 $W\leqslant T$，从而 $V\nleqslant T$，这隐含着 $|V:V\cap T|=|P:T|=p$。记 V char $N\trianglelefteq G$ 且 M 是包含关系下 G 中最大的可解正规子群，故 $V\leqslant O_p(M)$，再由上述断言知 $|V|\leqslant|O_p(M)|\leqslant p^e$。根据该引理的条件也有 $|P|\geqslant p^{e+1}$，则有 $|V\cap T|<|V|\leqslant|O_p(M)|\leqslant p^e\leqslant|T|$。进一步地，再次根据引理 2 得，$T$ 中存在 p^e 阶 N^*-子群 I 使得 $V\cap T\leqslant I\leqslant T$，这暗含着 $V\cap T=V\cap I$。依据该引理的假设条件知，I 是 G 的 S-半置换 p-子群，故由引理 11 得 $V\cap T=V\cap I$ 被 $O^p(G)$ 正规化。又，由 $V\trianglelefteq P$ 和 $T\trianglelefteq P$ 得 $V\cap T\trianglelefteq P$，因此 $V\cap T\trianglelefteq O^p(G)P=G$，这时取 $A=T$。证毕。

定理 2 的证明。假设 G 是极小阶反例。依据引理 8 知 $G/O_{p'}(G)$ 满足题设条件，进而由 G 的极小性知 $O_{p'}(G)=1$。又，根据引理 14 知 G 是 p-长为 1 的 p-可解群，故 G 具有正规的 Sylow p-子群 P。根据引理 11 和题设知 P 中每个 p^e 阶 N^*-子群皆是 $O^p(G)$-不变的。于是据定理 1 知 $O^p(G^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ 在 P 上作用平凡，这隐含着 $O^p(G^{\mathfrak{A}_{p-1}})$ 在 G 的每个 p-主因子上的作用也是平凡的。因此由引理 13 得 G 是 p-超可解的，矛盾。

3 等价定理

本章给出定理1的一个等价定理,并且还给出群是p-超可解的另一个充分条件。

依据文献[3],π表示一个由素数组成的集合,称$\mathfrak{Z}_\pi$是群G的Sylow子群的π'-补集合,若对于每个素数$q\in\pi(G)-\pi$,$\mathfrak{Z}_\pi$中恰包含一个G的Sylow q-子群。另外,用$\mathscr{P}$表示某个群理论性质,并且称群为$\mathscr{P}$-群若它具有性质$\mathscr{P}$[15]。

引理15[4] 设群A作用在p-群P上,且设$\mathfrak{Z}_p$是群A的Sylow子群的p'-补集合,则下列命题等价:

(1) P中每个$\mathscr{P}$-子群均是$O^p(A)$-不变的;

(2) P中每个$\mathscr{P}$-子群皆被$\mathfrak{Z}_p$的每个元素正规化。

依据引理15,定理1与定理3等价。

定理3 记整数$e\geqslant3$,假设群A作用在阶$>p^e$的p-群P上,且设$\mathfrak{Z}_p$是群A的Sylow子群的p'-补集合。若$\mathfrak{Z}_p$中的每个元素皆正规化P的每个p^e阶N^*-子群,则$O^p(A^{\mathfrak{A}_{p-1}})$在$P$上作用平凡,其中$\mathfrak{A}_{p-1}$是由所有方次数整除$p-1$的交换群组成的群系。

进一步地,称群G的子群H在G中$\mathfrak{Z}_\pi$-置换,若$\pi=\pi(H)$且H与$\mathfrak{Z}_\pi$中的任意元素皆可交换。显然,从一个群中参与置换的Sylow子群的数量来看,$\mathfrak{Z}_\pi$-置换与S-半置换相比对结构影响更大,并推广了S-半置换性质。

例2 设群$T=\langle a,b\mid a^7=b^6=1,\ a^b=a^3\rangle$且$\mathfrak{Z}_3=\{\langle a\rangle,\langle b^3\rangle\}$,则$\mathfrak{Z}_3$是群$T$的Sylow子群的$3'$-补集合。进一步地,$\langle b^2\rangle$在$T$中$\mathfrak{Z}_3$-置换,但是$\langle b^2\rangle$在$T$中不是$S$-半置换的。

证明 因为$|T|=2\times3\times7$,$\langle a\rangle\in \mathrm{Syl}_7(T)$且$\langle b^3\rangle\in \mathrm{Syl}_2(T)$,所以$\mathfrak{Z}_3$是群$T$的Sylow子群的$3'$-补集合。注意到$\langle a\rangle\trianglelefteq T$且$\langle b^2\rangle\in\mathrm{Syl}_3(T)$,有$\langle b^2\rangle$在$T$中$\mathfrak{Z}_3$-置换。

由于$(b^a)^3=(b^3)^a=b^3(a^{-1})^{b^3}a=b^3(a^{b^3})^{-1}a=b^3a^2\neq1$且$((b^a)^3)^2=(b^6)^a=1^a=1$,故$\langle(b^a)^3\rangle\in\mathrm{Syl}_2(T)$。若$\langle b^2\rangle$在$T$中$S$-半置换,则$\langle b^2\rangle$与$\langle(b^a)^3\rangle$可交换,即$\langle b^2\rangle\langle(b^a)^3\rangle=\langle(b^a)^3\rangle\langle b^2\rangle$。这说明$\langle b^2,(b^a)^3\rangle$为6阶群,进而$\langle b^2\rangle\trianglelefteq\langle b^2,(b^a)^3\rangle$,从而$[b^2,(b^a)^3]\in\langle b^2\rangle$。又,

$$\begin{aligned}[b^2,(b^a)^3]&=b^{-2}(b^a)^{-3}b^2(b^a)^3=b^{-2}(a^{-1}b^{-3}a)b^2(a^{-1}b^3a)\\&=(b^{-2}a^{-1}b^2)(bab^{-1})(b^3a^{-1}b^3)a\\&=(a^{-1})^{b^2}a^{b^{-1}}(a^{-1})^{b^3}a\\&=a^{-2}a^5aa=a^5\in\langle a\rangle。\end{aligned}$$

由$\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=1$知$a^5=1$,与$|\langle a\rangle|=7$矛盾,因此$\langle b^2\rangle$在$T$中不是$S$-半置换的。证毕。

引理16 设G是群,则下列命题等价:(1) G的任一$\mathscr{P}$-子群H在G中S-半置换;(2) G的任一$\mathscr{P}$-子群H在G中$\mathfrak{Z}_\pi$-置换。

证明 (1)⇒(2)显然。故只证(2)⇒(1)。事实上,对于任意素数$q\in\pi(G)-\pi(H)$,记Q_1是G中唯一的包含在$\mathfrak{Z}_\pi$中的Sylow q-子群,则据文献[15]中的第二Sylow定理知,对于任意$Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$,均存在一个合适的元素$x\in G$使得$Q=Q_1^x$。由于G中任一$\mathscr{P}$-群H,均有$H^{x^{-1}}\cong H$,根据题设得$H^{x^{-1}}Q_1=Q_1H^{x^{-1}}$,则$HQ=QH$。注意到$H$和$Q$是任意的,得到(1)。证毕。

现在,用$\mathfrak{Z}_\pi$-置换去替换定理2中的S-半置换,由引理16可得下述结果。

定理4 记整数$e\geqslant3$,假设群G的Sylow p-子群是阶大于p^e的N^*-子群,若G中每个p^e阶N^*-子群皆在G中是$\mathfrak{Z}_p$-置换的,则G是p-超可解群。

参考文献:

[1] 徐明曜,黄建华,李慧陵,等. 有限群导引[M]. 北京:科学出版社,1999:20-56.

XU Mingyao, HUANG Jianhua, LI Huiling, et al. Finite groups guidance[M]. Beijing: Science Press, 1999:20-56.

[2] BERKOVICH Y, ISAACS I M. p-supersolvability and actions on p-groups stabilizing certain subgroups[J]. Journal of Algebra, 2014, 414:82-94.

[3] GUO Xiuyun, MENG Hangyang. Actions on p-groups with the kernel containing the $\mathfrak{F}$-residuals[J]. Communications in Algebra, 2017, 45:3022-3033.
[4] BAI Pengfei, GUO Xiuyun, ZHANG Boru. The Action on p-groups and p-supersolvability[J]. Algebra Colloquium, 2017, 24:685-696.
[5] 徐明曜,曲海鹏. 有限 p 群[M]. 北京:北京大学出版社,2010:63-75.
XU Mingyao, QU Haipeng. Finite p-groups[M]. Beijing: Peking University Press, 2010:63-75.
[6] LI Baojun, GONG Lü. On f-hypercentral actions of finite group[J]. Communications in Algebra, 2009, 37:3410-3417.
[7] LÜ Gong, CHEN Qilin, LI Baojun. On cyclic actions of finite groups[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2024, 21: 1-23.
[8] 曹建基,王俊新,白鹏飞. 蕴含交换极大子群的极大类 3-群上的光滑斜态射[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59:23-30.
CAO Jianji, WANG Junxin, BAI Pengfei. Smooth skew morphisms of a kind of maximal class 3-groups which have abelian maximal subgroups[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2024, 59:23-30.
[9] WEI Xianbiao, GUO Xiuyun. On s-permutable subgroups and p-nilpotency of finite groups[J]. Communications in Algebra, 2009, 37:3410-3417.
[10] SKIBA A N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups[J]. Journal of Algebra, 2007, 315:192-209.
[11] WANG Lifang, WANG Yanming. On s-semipermutable maximal and minimal subgroups of Sylow p-subgroups of finite groups[J]. Communications in Algebra, 2006, 34:143-149.
[12] GUO Xiuyun, LU Jiakuan. On SS-supplemented subgroups of finite groups and their properties[J]. Glasgow Mathematical Journal, 2012, 54:481-491.
[13] ASAAD M, HELIEL A A. On permutable subgroups of finite groups[J]. Archiv der Mathematik, 2003, 80:113-118.
[14] HELIEL A A, BALLESTER-BOLINCHES A, ESTEBAN-ROMERO R, et al. $\mathfrak{Z}$-permutable subgroups of finite groups[J]. Monatshefte für Mathematik, 2016, 179:523-534.
[15] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京:科学出版社,1999:74.
XU Mingyao. Finite groups guidance[M]. Beijing: Science Press, 1999:74.
[16] ISAACS I M. Semipermutable π-subgroups[J]. Archiv der Mathematik (Basel), 2014, 102:1-6.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 12 页)

参考文献:

[1] LU Jiakuan, WEI Meng. On solvability of finite groups with few non-normal subgroups[J]. Communications in Algebra, 2015, 43(5):1752-1756.
[2] FENG Aifang, LIU Zuhua. Finite groups having exactly two conjugate classes of non-subnormal subgroups[J]. Communications in Algebra, 2015, 43(9):3840-3847.
[3] LU Jiakuan, WEI Meng. On finite groups with non-subnormal subgroups[J]. Communications in Algebra, 2017, 45(5): 2043-2046.
[4] SKIBA A N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups[J]. Journal of Algebra, 2015, 436:1-16.
[5] SKIBA A N. On some results in the theory of finite partially soluble groups[J]. Communications in Mathematics and Statistics, 2016, 4(3):281-309.
[6] ZHANG Chi, XU Songnian, WU Zhenlin. Some notes on σ-soluble groups and σ-subnormality[J]. Communications in Algebra, 2023, 51(8):3266-3272.
[7] AL-SHOMRANI M M, HELIEL A A, BALLESTER-BOLINCHES A. On σ-subnormal closure[J]. Communications in Algebra, 2020, 48(8):3624-3627.
[8] 郭文彬. 群类论[M]. 北京:科学出版社,2000.
GUO WenBin. The theory of classes of groups[M]. Beijing: Science Press, 2000.
[9] 徐明耀.有限群引导[M]. 北京:科学出版社,1987.
XU MingYao. An introduction to finite groups[M]. Beijing: Science Press, 1987.
[10] HUPPERT B. Endliche gruppen I [M]. Berlin: Springer, 1967.

(编辑:陈丽萍)