山东大学学报(理学版)2025 年 5 月 第 60 卷 第 5 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.5, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)05-0093-07 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.287

一类含 Catalan 数的超同余式

杨继真[1,2],王云鹏[3*]

(1.上海师范大学理学院, 上海 200234; 2.洛阳师范学院数学科学学院, 河南 洛阳 471934; 3.洛阳理工学院数学与物理教学部, 河南 洛阳 471023)

摘要: 以广义调和数为桥梁,利用级数变换等方法建立若干含有中心二项式系数、Catalan 数及 Bernoulli 数的同余式,并推广了一些已有结果。

关键词:中心二项式系数;Catalan 数;Bernoulli 数;同余式

中图分类号:O157.1 **文献标志码**:A

引用格式:杨继真,王云鹏.一类含 Catalan 数的超同余式[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):93-99.

Some super congruences involving Catalan numbers

YANG Jizhen[1,2], WANG Yunpeng[3*]

(1. Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234; 2. Department of Mathematics, Luoyang Normal College, Luoyang 471934, Henan, China; 3. Department of Mathematics and Physics, Luoyang Institute of Science and Technology, Luoyang 471023, Henan, China)

Abstract: Using the generalized harmonic number and the method of series transformation, some super congruences involving central binomial coefficient, Catalan number and Bernoulli number are established, and generalize some known results are generalized.

Key words: central binomial coefficient; Catalan number; Bernoulli number; congruences

0 引言

Catalan 数是组合数学中的一个经典数列,常用于各种计数问题。比利时数学家 Catalan 在 1838 年发表论文研究了的“字的连乘积问题”或“加括号问题”而命名并广为人知。关于 Catalan 数的研究诸多。近些年,许多学者将中心二项式系数和 Catalan 数结合起来进行研究[1-5]。

形式上满足$\binom{2k}{k}$的二项式系数称为中心二项式系数,其中 $k\in\{0,1,\cdots,\mathbf{N}\}$。Catalan 数定义为

$$C_k=\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}=\binom{2k}{k}-\binom{2k}{k+1},$$

Roderiguez-Villeags[6]猜想如下的同余式成立:

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{16^k}\binom{2k}{k}^2\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}(\bmod p^2),$$

其中 p 是一个奇素数。后来,该同余式被证明[7]。

收稿日期:2023-06-30;**网络出版时间**:2024-02-28 14:13:17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12271234);河南省青年骨干教师计划资助项目(2020GGJS194);河南省一流本科课程《组合数学》(豫教[2020]13099 号)

第一作者:杨继真(1984—),女,副教授,硕士,研究方向为组合数学. E-mail:yangjizhen116@163.com

* **通信作者**:王云鹏(1981—),男,讲师,博士,研究方向为组合数学. E-mail:yunpengwang1981@163.com

毛国帅[5]证明了如下同余式：

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{C_k}{64^k}\binom{4k}{2k}\equiv\frac{2p}{3}\left(\frac{1}{p}\right)(\bmod p^2)。$$

Hamme[8]证明了上式的推广形式如下：

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k+1}\binom{-1/2}{k}^2\equiv 2p^2(\bmod p^3)。$$

并且 Swisher[9]猜想

$$\sum_{k=0}^{(p^r-1)/2}\frac{1}{k+1}\binom{-1/2}{k}^2\equiv 2p^{2r}(\bmod p^{2r+1}),$$

该同余式在文献[10]中得到了证明，并且文献[11]中给出了该猜想的 q-模拟。本文利用调和数和 Bernoulli 数的同余式以及级数变换的方法推广了这些同余式。

1 主要结论

定理 1 令 $p>3$ 为素数，a 是一个正整数并且 $n=p^a-1$，那么

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{64^{k-n}}\binom{4k}{2k}\equiv p^a(1-6p^3B_{p-3})\ (\bmod p^{a+4}),\tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{27^{k-n}}\binom{3k}{k}\equiv p^a\left(1-\frac{8}{3}p^3B_{p-3}\right)(\bmod p^{a+4}),\tag{2}$$

其中 Bernoulli 数 B_k 定义为

$$B_0=1 \text{ 和 } \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0\ (n=1,2,3,\cdots)。$$

由定理 1 可得推论 1。

推论 1 令 $p>3$ 为素数，a 是一个正整数并且 $n=p^a-1$，那么

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{64^{k-n}}\binom{4k}{2k}\equiv\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{27^{k-n}}\binom{3k}{k}\equiv p^a(\bmod p^{a+3})。\tag{3}$$

定理 2 令 $p>3$ 为素数，a 是一个正整数并且 $n=p^a-1$，那么

$$(-64)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{64^k}\binom{4k}{2k}\equiv\frac{4^pp^a(1+p^a-p^{2a})}{6}+\frac{4p^{a+2}q_p(2)\chi_{a>1}}{3}(\bmod p^{a+3}),\tag{4}$$

$$(-27)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{27^k}\binom{3k}{k}\equiv\frac{p^a}{2}+p^{2a}-p^{3a}(\bmod p^{a+3})。\tag{5}$$

这里称 $q_p(a)$ 为费马商，其定义为 $q_p(a)=(a^{p-1}-1)/p$，χ_A 定义为

$$\chi_A=\begin{cases}1, & \text{如果 } A \text{ 成立},\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$$

由定理 2 可得推论 2。

推论 2 令 $p>3$ 为素数，$a\geqslant 3$ 为整数并且 $n=(p^a-1)/2$，那么

$$(-64)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{64^k}\binom{4k}{2k}\equiv\frac{4^pp^a+8p^{a+2}q_p(2)}{6}(\bmod p^{a+3}),\tag{6}$$

$$(-27)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{27^k}\binom{3k}{k}\equiv\frac{p^a}{2}(\bmod p^{a+3})。\tag{7}$$

为了证明上述定理和推论，需要介绍如下的预备知识和相关引理。

2 预备知识及引理

引理 1 令 a,b,n,s 为非负整数且满足 $a>b$ 和 $m=4a^a/(b^b(a-b)^{a-b})$，那么

$$m\chi_{s=0}+\sum_{k=0}^{n}\frac{f(k)}{m^k}\binom{ak}{bk}\binom{2k}{k}=\frac{(n+1)^s}{m^n}\binom{an+a}{bn+b}\binom{2n+2}{n+1},\tag{8}$$

这里

$$f(k)=(k+1)^s\binom{ak+a}{bk+b}\binom{2k+2}{k+1}\left(\binom{ak}{bk}\binom{2k}{k}\right)^{-1}-mk^s。$$

证明　注意到

$$\sum_{k=0}^{n+1}\frac{k^s}{m^k}\binom{ak}{bk}\binom{2k}{k}=\chi_{s=0}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^s}{m^k}\binom{ak}{bk}\binom{2k}{k}=\chi_{s=0}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)^s}{m^{k+1}}\binom{ak+a}{bk+b}\binom{2k+2}{k+1}。$$

因此

$$m\sum_{k=0}^{n+1}\frac{k^s}{m^k}\binom{ak}{bk}\binom{2k}{k}=m\chi_{s=0}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)^s}{m^k}\binom{ak+a}{bk+b}\binom{2k+2}{k+1}。$$

化简后可得(8)。

定义 1　对于 $\alpha\in\mathbf{N}$,广义调和数定义为

$$H_0^{(\alpha)}=0 \text{ 和 } H_n^{(\alpha)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^\alpha},\ \text{其中 } n\in\mathbf{Z}^+。$$

引理 2　令 $p>3$ 为素数并且 a,r 正整数满足 $(p-1)\nmid r$, 那么

$$p^{ra}H_{p^a-1}^{(r)}\equiv p^rH_{p-1}^{(r)}\pmod{p^{2r+2}}。\tag{9}$$

证明　当 $a=1$ 时,同余式(9)显然成立。假设 $a\geqslant 2$, 那么

$$\begin{aligned}p^{ra}H_{p^a-1}^{(r)}&=p^{ra}\sum_{j=0}^{p^{a-1}-1}\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{(jp+i)^r}+p^{r(a-1)}H_{p^{a-1}-1}^{(r)}\\&\equiv p^{ra}\sum_{j=0}^{p^{a-1}-1}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{1}{i^r}-\frac{rj}{i^{r+1}}p\right)+p^{r(a-1)}H_{p^{a-1}-1}^{(r)}\\&=p^{ra+a-1}H_{p-1}^{(r)}+\frac{r}{2}p^{ra+a}H_{p-1}^{(r+1)}+p^{r(a-1)}H_{p^{a-1}-1}^{(r)}\pmod{p^{2r+2}},\end{aligned}$$

注意到 $(p-1)\nmid r$ 和 $a\geqslant 2$,则

$$p^{ra+a-1}H_{p-1}^{(r)}\equiv\frac{r}{2}p^{ra+a}H_{p-1}^{(r+1)}\equiv 0\pmod{p^{2r+2}}。$$

结合以上内容可得

$$p^{ra}H_{p^a-1}^{(r)}\equiv p^{r(a-1)}H_{p^{a-1}-1}^{(r)}\pmod{p^{2r+2}}。\tag{10}$$

利用同余式(10)进行归纳,容易得到(9)。

引理 3　令 $p>3$ 为素数并且 r,a 是正整数,那么

$$\binom{(r+1)p^a-1}{p^a-1}\equiv 1-\frac{1}{3}(r+r^2)p^3B_{p-3}\pmod{p^4}。\tag{11}$$

证明　注意到

$$\binom{(r+1)p^a-1}{p^a-1}=\frac{\prod\limits_{i=1}^{p^a-1}((r+1)p^a-i)}{(p^a-1)!}=\prod_{i=1}^{p^a-1}\left(1+\frac{rp^a}{i}\right)。$$

对于 $i\in\{1,\cdots,p^a-1\}$,有 $p^a/i\equiv 0\pmod p$,因此

$$\begin{aligned}\binom{(r+1)p^a-1}{p^a-1}&\equiv 1+rp^aH_{p^a-1}+\frac{r^2p^{2a}}{2}(H_{p^a-1}^2-H_{p^a-1}^{(2)})\\&\quad+\frac{r^3p^{3a}}{6}(H_{p^a-1}^3-3H_{p^a-1}H_{p^a-1}^{(2)}+H_{p^a-1}^{(3)})\pmod{p^4}。\end{aligned}$$

进一步应用引理 2 可得

$$\binom{(r+1)p^a-1}{p^a-1}\equiv 1+rpH_{p-1}+\frac{r^2p^2}{2}(H_{p-1}^2-H_{p-1}^{(2)})$$

$$+\frac{r^3p^3}{6}(H_{p-1}^3-3H_{p-1}H_{p-1}^{(2)}+H_{p-1}^{(3)})\pmod{p^4}。\tag{12}$$

令 $p>3$ 是一个素数并且 $m=1,2,\cdots,p-2$,则[12]

$$H_{p-1}^{(m)}\equiv\frac{m}{m+1}pB_{p-1-m}\pmod{p^2};$$

如果 $m=1,3,\cdots,p-4$,则

$$H_{p-1}^{(m)}\equiv\frac{m(m+1)}{2}\frac{B_{p-2-m}}{p-2-m}p^2\pmod{p^3};$$

得到

$$\begin{cases}H_{p-1}\equiv-\dfrac{1}{3}p^2B_{p-3}\pmod{p^3},\\ H_{p-1}^{(2)}\equiv\dfrac{2}{3}pB_{p-3}\pmod{p^2}。\end{cases}\tag{13}$$

结合式(12)、(13),得到

$$\binom{(r+1)p^a-1}{p^a-1}\equiv1-\frac{1}{3}rp^3B_{p-3}-\frac{1}{3}r^2p^3B_{p-3}=1-\frac{1}{3}(r+r^2)p^3B_{p-3}\pmod{p^4}。$$

引理 4 令 $p>3$ 为素数并且 r,a 是正整数并且满足 $(p-1)\nmid r$。那么

$$p^{ra}H_{\frac{p^a-1}{2}}^{(r)}\equiv(p^r+p^{2r}\chi_{a>1})H_{\frac{p-1}{2}}^{(r)}\pmod{p^{2r+1}}。\tag{14}$$

证明 $a=1$ 的情况是明显的。假设 $a\geqslant2$。那么

$$\begin{aligned}p^{ra}H_{\frac{p^a-1}{2}}^{(r)}&=p^{ra}H_{\frac{p^a-p}{2}}^{(r)}+p^{ra}\sum_{i=1}^{(p-1)/2}\left(\frac{p^a-p}{2}+i\right)^{-r}\\&=p^{ra}\sum_{j=0}^{(p^{a-1}-1)/2}\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{(jp+i)^r}+p^{r(a-1)}H_{\frac{p^{a-1}-1}{2}}^{(r)}+p^{ra}H_{\frac{p-1}{2}}^{(r)}\\&\equiv\frac{1}{2}p^{ra}H_{p-1}^{(r)}(p^{a-1}+1)+p^{r(a-1)}H_{\frac{p^{a-1}-1}{2}}^{(r)}+p^{ra}H_{\frac{p-1}{2}}^{(r)}\pmod{p^{2r+1}}。\end{aligned}$$

因为 $(p-1)\nmid r$,所以 $H_{p-1}^{(r)}\equiv0\pmod{p}$。于是

$$p^{ra}H_{\frac{p^a-1}{2}}^{(r)}\equiv p^{r(a-1)}H_{\frac{p^{a-1}-1}{2}}^{(r)}+p^{ra}\chi_{a=2}H_{\frac{p-1}{2}}^{(r)}\pmod{p^{2r+1}},$$

这意味着

$$p^{ra}H_{\frac{p^a-1}{2}}^{(r)}\equiv(p^r+p^{2r})H_{\frac{p-1}{2}}^{(r)}\pmod{p^{2r+1}}。$$

这就证明了式(14)。

引理 5 令 $p>3$ 是一个素数并且 a 是一个正整数,那么

$$(-1)^{\frac{p^a-1}{2}}\binom{p^a-1}{(p^a-1)/2}\equiv4^{p-1}+2p^2q_p(2)\chi_{a>1}\pmod{p^3}。\tag{15}$$

证明 令 $n=(p^a-1)/2$,那么

$$(-1)^n\binom{p^a-1}{n}=(-1)^n\frac{(p^a-1)_n}{n!}=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{p^a}{i}\right)。$$

注意到当 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 时,$p^a/i\equiv0\pmod{p}$,则

$$(-1)^n\binom{p^a-1}{n}\equiv1-p^aH_n+\frac{p^{2a}}{2}(H_n^2-H_n^{(2)})\pmod{p^3}。\tag{16}$$

由式(13)可知 $H_{p-1}^{(2)}\equiv0\pmod{p}$。注意到

$$H_{p-1}^{(2)}=\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\frac{1}{p-k^2}\equiv2H_{\frac{p-1}{2}}^{(2)}\pmod{p}。$$

因此 $H_{(p-1)/2}^{(2)}\equiv0\pmod{p}$。在引理 4 中令 $r=2$,则

$$p^{2a}H_n^{(2)}\equiv p^2H_{\frac{p-1}{2}}^{(2)}\equiv0\pmod{p^3}。\tag{17}$$

类似地,在引理 4 中令 $r=1$,可得

$$p^a H_n \equiv (p+p^2\chi_{a>1}) H_{\frac{p-1}{2}} \pmod{p^3}。\tag{18}$$

将式(17)、(18)代入式(16)中,则有

$$(-1)^n\binom{p^a-1}{n} \equiv 1-pH_{\frac{p-1}{2}}-p^2\chi_{a>1}H_{\frac{p-1}{2}}+\frac{p^2}{2}H_{\frac{p-1}{2}}^2 \pmod{p^3}。\tag{19}$$

Lemer[13]证明了

$$H_{(p-1)/2} \equiv pq_p^2(2)-2q_p(2) \pmod{p^2}。\tag{20}$$

结合式(19)、(20)可得

$$\begin{aligned}(-1)^n\binom{p^a-1}{n} &\equiv 1+2pq_p(2)+p^2q_p^2(2)+2p^2q_p(2)\chi_{a>1}\\ &=4^{p-1}+2p^2q_p(2)\chi_{a>1} \pmod{p^3}。\end{aligned}$$

证明完毕。

注　同余式(15)为 Morley[14]中公式(2)的推广形式。

3　主要结果的证明

定理 1 的证明。在引理 1 中令 $a=4,b=2,s=1$,可得 $m=64$ 以及

$$f(k)=(k+1)\binom{4k+4}{2k+2}\binom{2k+2}{k+1}\left(\binom{4k}{2k}\binom{2k}{k}\right)^{-1}=\frac{4(4k+1)(4k+3)}{k+1}-64k=\frac{12}{k+1},$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{64^{k-n}}\binom{4k}{2k}=\frac{n+1}{12}\binom{4n+4}{2n+2}\binom{2n+2}{n+1}。$$

令 $n=p^a-1$,则有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{64^{k-n}}\binom{4k}{2k}=\frac{p^a}{12}\binom{4p^a}{2p^a}\binom{2p^a}{p^a}=p^a\binom{4p^a-1}{p^a-1}\binom{3p^a-1}{p^a-1}。\tag{21}$$

在引理 3 中,令 $r=3$, $r=2$,分别得到

$$\binom{4p^a-1}{p^a-1} \equiv 1-4p^3B_{p-3} \pmod{p^4},\tag{22}$$

$$\binom{3p^a-1}{p^a-1} \equiv 1-2p^3B_{p-3} \pmod{p^4}。\tag{23}$$

将式(22)、(23)代入式(21),则有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{64^{k-n}}\binom{4k}{2k} \equiv p^a(1-4p^3B_{p-3})(1-2p^3B_{p-3}) \equiv p^a-6p^{a+3}B_{p-3} \pmod{p^{a+4}}。$$

这就证明了式(1)成立。

在引理 1 中令 $a=3,b=2,s=1$,则 $m=27$,并且

$$f(k)=(k+1)\binom{3k+3}{k+1}\binom{2k+2}{k+1}\left(\binom{3k}{k}\binom{2k}{k}\right)^{-1}=\frac{3(3k+1)(3k+2)}{k+1}-27k=\frac{6}{k+1}。$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{27^{k-n}}\binom{3k}{k}=\frac{n+1}{6}\binom{3n+3}{n+1}\binom{2n+2}{n+1}。\tag{24}$$

在式(24)中,令 $n=p^a-1$,得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{27^{k-n}}\binom{3k}{k}=\frac{p^a}{6}\binom{3p^a}{p^a}\binom{2p^a}{p^a}=p^a\binom{3p^a-1}{p^a-1}\binom{2p^a-1}{p^a-1}。\tag{25}$$

在引理 3 中,令 $r=1$,则有

$$\binom{2p^a-1}{p^a-1}\equiv 1-\frac{2}{3}p^3B_{p-3}(\bmod p^4)。\tag{26}$$

将式(23)、(26)代入式(25)中,得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{27^{k-n}}\binom{3k}{k}\equiv p^a(1-2p^3B_{p-3})\left(1-\frac{2}{3}p^3B_{p-3}\right)\equiv p^a-\frac{8}{3}p^{a+3}B_{p-3}(\bmod p^{a+4})。$$

证明完毕。

定理 2 的证明。在式(21)中令 $n=(p^a-1)/2$,则有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{64^{k-n}}\binom{4k}{2k}=\frac{p^a+1}{24}\binom{2p^a+2}{p^a+1}\binom{p^a+1}{(p^a+1)/2}=\frac{2p^a(2p^a+1)}{3(p^a+1)}\binom{2p^a-1}{p^a-1}\binom{p^a-1}{(p^a-1)/2}。$$

因此

$$64^n\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{64^k}\binom{4k}{2k}\equiv\frac{2p^a(1+p^a-p^{2a})}{3}\binom{2p^a-1}{p^a-1}\binom{p^a-1}{(p^a-1)/2}(\bmod p^{a+3})。\tag{27}$$

在引理 3 中令 $r=1$,得

$$\binom{2p^a-1}{p^a-1}\equiv 1(\bmod p^3)。\tag{28}$$

将式(15)、(28)代入式(27),得到

$$(64)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{64^k}\binom{4k}{2k}\equiv\frac{(-1)^n4^pp^a(1+p^a-p^{2a})}{6}+\frac{\chi_{a>1}(-1)^n4p^{a+2}q_p(2)}{3}(\bmod p^{a+3})。$$

这就证明了式(4)成立。

在式(24)中,令 $n=(p^a-1)/2$,化简后得

$$27^n\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{27^k}\binom{3k}{k}\equiv\left(\frac{p^a}{2}+p^{2a}-p^{3a}\right)\binom{p^a+n}{n}\binom{p^a-1}{n}(\bmod p^{a+3})。\tag{29}$$

注意到,当 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 时,$p^a/i\equiv 0(\bmod p)$,因此

$$(-1)^n\binom{p^a-1}{n}=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\frac{p^a-i}{i}=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{p^a}{i}\right)。$$

于是

$$(-1)^n\binom{p^a-1}{n}\equiv 1-p^aH_n+\frac{p^{2a}}{2}(H_n^2-H_n^{(2)})\ (\bmod p^3)。\tag{30}$$

类似地,

$$\binom{p^a+n}{n}\equiv 1+p^aH_n+\frac{p^{2a}}{2}(H_n^2-H_n^{(2)})\ (\bmod p^3)。\tag{31}$$

在引理 5 中令 $r=2$,得

$$p^{2a}H^{(2)}_{(p^a-1)/2}\equiv(p^2+p^4\chi_{a>1})H^{(2)}_{(p-1)/2}(\bmod p^5)。$$

注意到 $H^{(2)}_{(p-1)/2}\equiv 0(\bmod p)$,得

$$p^{2a}H^{(2)}_{\frac{p^a-1}{2}}\equiv p^2H^{(2)}_{\frac{p-1}{2}}\equiv 0(\bmod p^3)。\tag{32}$$

结合式(29)—(32),得

$$(-27)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{27^k}\binom{3k}{k}\equiv\left(\frac{p^a}{2}+p^{2a}-p^{3a}\right)\left(1+p^aH_n+\frac{p^{2a}}{2}H_n^2\right)\times\left(1-p^aH_n+\frac{p^{2a}}{2}H_n^2\right)(\bmod p^{a+3})。$$

因此

$$(-27)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{C_k}{27^k}\binom{3k}{k}\equiv\left(\frac{p^a}{2}+p^{2a}-p^{3a}\right)\left(\left(1+\frac{p^{2a}}{2}H_n^2\right)^2-p^{2a}H_n^2\right)$$

$$\equiv \frac{p^a}{2}+p^{2a}-p^{3a} \pmod{p^{a+3}}。$$

证明完毕。

参考文献:

[1] PAN Hao, SUN Zhiwei. A combinatorial identity with application to Catalan numbers[J]. Discrete Mathematics, 2006, 306(16):1921-1940.

[2] SUN Zhiwei, TAURASO R. New congruences for central binomial coefficients[J]. Advances in Applied Mathematics, 2010, 45(1):125-148.

[3] SUN Zhiwei. Super congruences and Euler numbers[J]. Science China Mathematics, 2011, 54(12):2509-2535.

[4] MAO Guoshuai, SUN Zhiwei. New congruences involving products of two binomial coefficients[J]. The Ramanujan Journal, 2019, 49(2):237-256.

[5] MAO Guoshuai. On sums of binomial coefficients involving Catalan and Delannoy numbers modulo p^2[J]. The Ramanujan Journal, 2018, 45(2):319-330.

[6] RODRIGUEZ-VILLEGAS F. Hypergeometric families of Calabi-Yau manifolds[C]//Proceedings of the Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry. Toronto, Canada: American Mathematical Society, 2003:223-231.

[7] MORTENSON E. A supercongruence conjecture of Rodriguez-Villegas for a certain truncated hypergeometric function[J]. Journal of Number Theory, 2003, 99(1):139-147.

[8] VAN HAMME L. Some conjectures concerning partial sums of generalized hypergeometric series[J]. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 1997, 192:223-236.

[9] SWISHER H. On the supercongruence conjecture of van Hamme[J]. Research in the Mathematical Sciences, 2015, 2(1):1-21.

[10] HE Bing. Some congruences on harmonic numbers and binomial sums[J]. Periodica Mathematica Hungarica: Journal of the Janos Bolyai Mathematical Society, 2017, 74(1):67-72.

[11] GUO Junwei. A q-analogue of the (1.2) supercongruence of Van Hamme[J]. International Journal of Number Theory, 2019, 15(1):29-36.

[12] GLAISHER J W L. On the residues of the sums of products of the first $p-1$ numbers, and their powers, to modulus p^2 or p^3[J]. Quarterly Journal of Mathematics, 1900, 31:321-353.

[13] LEHMER E. On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of Fermat and Wilson[J]. Ann of Math, 1938, 39(2):350-360.

[14] MORLEY F. Note on the congruence $2^{4n}\equiv(-1)^n(2n)!/(n!)^2$, where $(2n+1)$ is a prime[J]. Annals of Mathematics, 1895, 9:168-170.

(编辑:陈丽萍)