

两正交投影组合的 Moore-Penrose 逆的数值域

王然,余维燕*

(海南师范大学数学与统计学院,海南 海口 571158)

摘要:设 \mathcal{H} 为一个复可分 Hilbert 空间, P 和 Q 为 \mathcal{H} 上的 2 个正交投影算子。研究 P 和 Q 的组合 $P+QP$ 的 Moore-Penrose 逆算子 $(P+QP)^\dagger$ 的数值域,运用算子分块技巧给出算子 $(P+QP)^\dagger$ 的数值域的几何刻画,即它的数值域闭包是参数在算子 PQ 谱里的一些椭圆的闭凸包。

关键词:数值域;正交投影;Moore-Penrose 逆;支撑函数

中图分类号:O177.1 **文献标志码:**A

引用格式:王然,余维燕.两正交投影组合的 Moore-Penrose 逆的数值域[J].山东大学学报(理学版),2025,60(5):100-106.

Numerical range of Moore-Penrose inverses of a combination of two orthogonal projections

WANG Ran, YU Weiyang*

(College of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou 571158, Hainan, China)

Abstract: Let \mathcal{H} be a complex separable Hilbert space, and P and Q be two orthogonal projection operators on \mathcal{H} . This article mainly studies the numerical range of the Moore-Penrose inverse operator $(P+QP)^\dagger$ of the combination of P and Q . By using the operator block technique, the geometric characterization of the numerical range of the operator $(P+QP)^\dagger$ is given. That is, the closure of its numerical range is a closed convex hull of some explicit ellipses parameterized by points in the spectrum of operator PQ .

Key words: numerical range; orthogonal projections; Moore-Penrose inverse; support function

0 引言

设 \mathcal{H} 为复可分 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示 \mathcal{H} 上全体有界线性算子,对任一算子 $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,若 $P=P^2=P^*$,则称 P 为正交投影。对任一算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,其数值域和谱的定义分别为

$$W(T) = \{ \langle Tx, x \rangle, x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1 \},$$

$$\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbf{C}: T - \lambda I \text{ 不可逆} \}.$$

数值域在复平面 \mathbf{C} 内总是有界凸集,并且谱包含在数值域的闭包内^[1-2]。对任意两个算子 $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,有 $W(T_1 \oplus T_2) = \text{conv} \{ (T_1) \cup W(T_2) \}$,其中 $\text{conv} S$ 表示集合 S 的凸包。更多关于数值域的性质和结论见文献[3]。令 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,若存在算子 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足

$$TXT = T, \quad XTX = X, \quad (TX)^* = TX, \quad (XT)^* = XT,$$

则称 X 为 T 的 Moore-Penrose 逆,记为 T^\dagger ,且 T 存在 Moore-Penrose 逆当且仅当 T 的值域为闭^[4]。

一些学者将 Halmos 两子空间理论^[5]应用于解决数值域问题,得到了丰富的结果。Klaja^[6]运用 Halmos

两子空间理论讨论了两正交投影乘积的谱与数值域;文献[7]中结合 Halmos 两子空间理论研究了两正压缩算子乘积的数值域;文献[8]中给出了算子 $P+QP$ 的数值域的几何刻画;文献[9-10]中讨论了两正交投影的差与乘积的 Moore-Penrose 逆;文献[11]研究了 $n \times n$ 矩阵的 Moore-Penrose 逆的数值域。其他相关研究见文献[12-16]。本文讨论算子 $P+QP$ 的 Moore-Penrose 逆的数值域。

以下是本文所需的一些记号、概念和引理。

\mathbf{C}, \mathbf{R} 分别表示复数域和实数域。对算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{R}(A), \mathcal{N}(A), \sigma(A)$ 和 A^* 分别表示 A 的值域、核空间、谱和 A 的伴随算子。算子 A 的实部为 $\text{Re}(A) = \frac{A+A^*}{2}$ 。若算子 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $UU^* = U^*U = I$, 其中 I 表示 \mathcal{H} 上的恒等算子, 则称 U 为酉算子。对于任意两个算子 A 和 B , 如果存在酉算子 U 使得 $A = UBU^*$, 则称 A 和 B 酉等价, 记作 $A \sim B$ 。若 \mathcal{M} 为 \mathcal{H} 上任一闭子空间, 用 \mathcal{M}^\perp 表示 \mathcal{M} 的正交补子空间。

引理 1^[17-18] (Halmos 两子空间定理) 设 \mathcal{L} 和 \mathcal{N} 是复可分 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的两个闭子空间, P 和 Q 分别是 \mathcal{L} 和 \mathcal{N} 上的正交投影, 则 \mathcal{H} 有如下空间分解:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{L} \cap \mathcal{N}) \oplus (\mathcal{L} \cap \mathcal{N}^\perp) \oplus (\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N}) \oplus (\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp) \oplus \tilde{\mathcal{H}},$$

其中 $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_0 = \mathcal{L} \ominus ((\mathcal{L} \cap \mathcal{N}) \oplus (\mathcal{L} \cap \mathcal{N}^\perp))$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{L}^\perp \ominus ((\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N}) \oplus (\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp))$ 。若 \mathcal{M}_0 和 \mathcal{M}_1 其中有一个是非平凡的子空间, 则这两个空间的维数相等且存在自伴算子 $S, C: \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$, 使得 $0 \leq C \leq I, 0 \leq S \leq I, C^2 + S^2 = I, \mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(S) = 0$, P 和 Q 分别酉等价于以下算子矩阵:

$$P \sim I \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q \sim I \oplus 0 \oplus I \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

并且, 存在自伴算子 T 满足 $0 \leq T \leq \frac{\pi}{2}I$, 使得 $\cos T = C, \sin T = S$ 。

特别地, 如果 $\mathcal{L} \cap \mathcal{N} = \mathcal{L} \cap \mathcal{N}^\perp = \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N} = \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp = \{0\}$, 则称 $(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ 为一正则对^[18]。此时, $\mathcal{H} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1$, P 和 Q 分别酉等价于以下算子矩阵:

$$P \sim \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q \sim \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

引理 2^[18] 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 若 $\mathcal{R}(T)$ 闭, 则 $T^\dagger = T^*(TT^*)^\dagger$, 且 $(T^*)^\dagger = (T^\dagger)^*$ 。

定义 1^[19] 设 S 为复数域 \mathbf{C} 的有界凸子集, $\alpha \in \mathbf{R}$, \mathcal{S} 关于角 α 的支撑函数定义为

$$\rho_{\mathcal{S}}(\alpha) = \sup \{ \text{Re}(z \exp(-i\alpha)), z \in \mathcal{S} \}.$$

引理 3^[19] 设 $\tilde{\mathcal{S}}$ 是 \mathcal{S} 的闭包, 则

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{ z \in \mathbf{C}, \forall \alpha, \text{Re}(z \exp(-i\alpha)) \leq \rho_{\mathcal{S}}(\alpha) \}.$$

引理 4^[19] 设 \mathcal{S}_1 和 \mathcal{S}_2 是复数域 \mathbf{C} 的两个有界凸子集, \mathcal{S}_1 和 \mathcal{S}_2 的支撑函数分别为 $\rho_{\mathcal{S}_1}(\alpha)$ 和 $\rho_{\mathcal{S}_2}(\alpha)$ 。若有界凸集 \mathcal{S} 的支撑函数满足 $\rho_{\mathcal{S}}(\alpha) = \max_{i=1,2} \rho_{\mathcal{S}_i}(\alpha)$, 则有

$$\tilde{\mathcal{S}} = \overline{\text{conv}\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}}.$$

定义 2 设 $\lambda \in [0, 1]$, $\mathcal{E}(\lambda)$ 表示以 $0, \lambda$ 为焦点, 短轴长为 $\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2}}$ 的椭圆盘。

1 主要结果

定理 1 设 \mathcal{L} 和 \mathcal{N} 是复可分 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的两个非平凡闭子空间, P 和 Q 分别是 \mathcal{L} 和 \mathcal{N} 上的正交投影。若 P 和 Q 分别酉等价于(1)所示的算子矩阵形式, 则对于 $\lambda \in \sigma(PQ)$, 算子 $(P+QP)^\dagger$ 的数值域闭包是椭圆 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的闭凸包, 即

$$\overline{W((P+QP)^\dagger)} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}}.$$

下面讨论当 $(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ 为一正则对时, 算子 $(P+QP)^\dagger$ 的数值域。

定理 2 设 $(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ 为复可分 Hilbert 空间 \mathcal{H} 上的一正则对, P 和 Q 分别为 \mathcal{L} 和 \mathcal{N} 上的正交投影。若 P 和 Q 分别酉等价于(2)所示的算子矩阵形式, 则对于 $\lambda \in \sigma(PQ)$, 算子 $(P+QP)^\dagger$ 的数值域闭包是椭圆盘

$\mathcal{E}(\lambda)$ 的闭凸包,即

$$\overline{W((P+QP)^\dagger)} = \overline{\text{conv} \{ \cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda) \}}.$$

为了证明定理 2,需要以下引理。

引理 5 若 $(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ 为复可分 Hilbert 空间 \mathcal{H} 上的一正则对, P 和 Q 分别是 \mathcal{L} 和 \mathcal{N} 上的正交投影,且酉等价于(2)所示的算子矩阵形式,则 $(P+QP)^\dagger$ 的数值域的支撑函数为

$$\rho_{W((P+QP)^\dagger)}(\alpha) = \sup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \frac{1}{2} \left((1+\lambda)(1+3\lambda)^{-1} \cos \alpha + \sqrt{(1+3\lambda)^{-1} \cos^2 \alpha + \lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2} \sin^2 \alpha} \right).$$

证明 设 $\alpha \in [0, 2\pi]$, 则

$$\begin{aligned} \rho_{W((P+QP)^\dagger)}(\alpha) &= \sup \{ \text{Re}(\langle (P+QP)^\dagger h, h \rangle \exp(-i\alpha)), h \in \mathcal{H}, \|h\| = 1 \} \\ &= \sup \{ \text{Re}(\langle \exp(-i\alpha)(P+QP)^\dagger h, h \rangle), h \in \mathcal{H}, \|h\| = 1 \} \\ &= \sup \{ \langle \text{Re}(\exp(-i\alpha)(P+QP)^\dagger) h, h \rangle, h \in \mathcal{H}, \|h\| = 1 \}. \end{aligned}$$

由 Halmos 两子空间定理及引理 2 可知,存在自伴算子 T 满足 $0 \leq T \leq \frac{\pi}{2}I$, 使得

$$\begin{aligned} (P+QP)^\dagger &\sim \begin{pmatrix} (I+\cos^2 T)(I+3\cos^2 T)^{-1} & \cos T \sin T(I+3\cos^2 T)^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ ((P+QP)^\dagger)^* &\sim \begin{pmatrix} (I+\cos^2 T)(I+3\cos^2 T)^{-1} & 0 \\ \cos T \sin T(I+3\cos^2 T)^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \text{Re}(\exp(-i\alpha)(P+QP)^\dagger) &= \frac{1}{2}(\exp(-i\alpha)(P+QP)^\dagger + \exp(i\alpha)((P+QP)^\dagger)^*) \\ &\sim \begin{pmatrix} \cos \alpha(I+\cos^2 T)(I+3\cos^2 T)^{-1} & \frac{1}{2}\exp(-i\alpha)\cos T \sin T(I+3\cos^2 T)^{-1} \\ \frac{1}{2}\exp(i\alpha)\cos T \sin T(I+3\cos^2 T)^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

设

$$A(t, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(1+\cos^2 t)(1+3\cos^2 t)^{-1} & \frac{1}{2}\exp(-i\alpha)\cos t \sin t(1+3\cos^2 t)^{-1} \\ \frac{1}{2}\exp(i\alpha)\cos t \sin t(1+3\cos^2 t)^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 则有 $\text{Re}(\exp(-i\alpha)(P+QP)^\dagger) \sim A(T, \alpha)$ 。经计算可得 $A(t, \alpha) = U(t, \alpha)B(t, \alpha)U^*(t, \alpha)$,

其中

$$B(t, \alpha) = \begin{pmatrix} v_1(t, \alpha) & 0 \\ 0 & v_2(t, \alpha) \end{pmatrix}, \quad U(t, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{2v_1(t, \alpha)}{u_1(t, \alpha)} & \frac{2v_2(t, \alpha)}{u_2(t, \alpha)} \\ \frac{\exp(i\alpha)\cos t \sin t(1+3\cos^2 t)^{-1}}{u_1(t, \alpha)} & \frac{\exp(i\alpha)\cos t \sin t(1+3\cos^2 t)^{-1}}{u_2(t, \alpha)} \end{pmatrix},$$

且

$$\begin{aligned} v_1(t, \alpha) &= \frac{1}{2} \left[(1+\cos^2 t)(1+3\cos^2 t)^{-1} \cos \alpha + \sqrt{(1+3\cos^2 t)^{-1} \cos^2 \alpha + \cos^2 t \sin^2 t(1+3\cos^2 t)^{-2} \sin^2 \alpha} \right], \\ v_2(t, \alpha) &= \frac{1}{2} \left[(1+\cos^2 t)(1+3\cos^2 t)^{-1} \cos \alpha - \sqrt{(1+3\cos^2 t)^{-1} \cos^2 \alpha + \cos^2 t \sin^2 t(1+3\cos^2 t)^{-2} \sin^2 \alpha} \right], \end{aligned}$$

$$u_i(t, \alpha) = \sqrt{4v_i^2(t, \alpha) + \cos^2 t \sin^2 t (1 + 3 \cos^2 t)^{-2}}, \quad i = 1, 2$$

都满足 $U(t, \alpha)U^*(t, \alpha) = U^*(t, \alpha)U(t, \alpha) = I$ 。因为 $U(t, \alpha)$ 中的元素都是可测函数, 设 T 是自伴算子, 所以由函数演算^[20], 定义

$$\frac{2v_1(T, \alpha)}{u_1(T, \alpha)}, \quad \frac{\exp(i\alpha) \cos T \sin T (I + 3 \cos^2 T)^{-1}}{u_1(T, \alpha)}, \quad \frac{2v_2(T, \alpha)}{u_2(T, \alpha)}, \quad \frac{\exp(i\alpha) \cos T \sin T (I + 3 \cos^2 T)^{-1}}{u_2(T, \alpha)},$$

定义 $B(T, \alpha)$ 和 $U(T, \alpha)$ 使得

$$A(T, \alpha) = U(T, \alpha)B(T, \alpha)U^*(T, \alpha) \text{ 且 } U(T, \alpha)U^*(T, \alpha) = U^*(T, \alpha)U(T, \alpha) = I,$$

从而有

$$\operatorname{Re}(\exp(-i\alpha)(P+QP)^\dagger) \sim A(T, \alpha) \sim B(T, \alpha) = v_1(T, \alpha) \oplus v_2(T, \alpha)。$$

注意到对于任意 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 和 $\alpha \in [0, 2\pi]$, 总有 $v_2(t, \alpha) \leq 0 \leq v_1(t, \alpha)$ 成立。又 $\sigma(T) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, 于是 $v_2(T, \alpha) \leq 0 \leq v_1(T, \alpha)$ 。注意到算子 $v_i(T, \alpha)$ 是自伴算子, 因此有

$$\begin{aligned} \rho_{W((P+QP)^\dagger)}(\alpha) &= \sup \{ \langle \operatorname{Re}(\exp(-i\alpha)(P+QP)^\dagger)h, h \rangle, h \in \mathcal{H}, \|h\| = 1 \} \\ &= \sup \{ \langle (v_1(T, \alpha) \oplus v_2(T, \alpha))h', h' \rangle, h' \in \mathcal{H}, \|h'\| = 1 \} \\ &= \sup \{ \langle v_1(T, \alpha)h', h' \rangle, h' \in \mathcal{H}, \|h'\| = 1 \} \\ &= \|v_1(T, \alpha)\| = \sup_{t_0 \in \sigma(T)} v_1(t_0, \alpha)。 \end{aligned}$$

由引理 1 可得

$$PQP \sim \begin{pmatrix} \cos^2 T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

由于

$$\sigma(PQ) \setminus \{0\} = \sigma(P(PQ)) \setminus \{0\} = \sigma((PQ)P) \setminus \{0\},$$

且 $\sigma(PQP) = \cos^2(\sigma(T)) \cup \{0\}$, 记 $\lambda = \cos^2 t_0, t_0 \in \sigma(T)$, 则 $\lambda \in \sigma(PQ)$, 因此

$$\begin{aligned} \rho_{W((P+QP)^\dagger)}(\alpha) &= \sup_{t_0 \in \sigma(T)} v_1(t_0, \alpha) \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \frac{1}{2}((1+\lambda)(1+3\lambda)^{-1} \cos \alpha + \sqrt{(1+3\lambda)^{-1} \cos^2 \alpha + \lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2} \sin^2 \alpha})。 \end{aligned}$$

证毕。

为了更具体地描述 $W((P+QP)^\dagger)$, 将它刻画为椭圆盘 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的闭凸包。由定义 2, $\lambda \in [0, 1]$, $\mathcal{E}(\lambda)$ 表示以 $0, \lambda$ 为焦点, 短轴长为 $\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2}}$ 的椭圆盘。图 1 给出了当 $\lambda = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ 时的椭圆盘。下面给出 $\mathcal{E}(\lambda)$ 边界的直角坐标方程和参数方程。

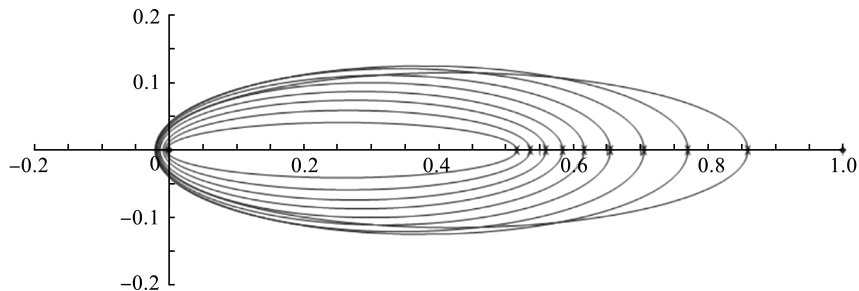


图 1 椭圆盘 $\mathcal{E}(\lambda)$
Fig.1 Ellipses $\mathcal{E}(\lambda)$

注 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的边界的直角坐标方程为

$$\frac{4(x-1/2(1+\lambda)(1+3\lambda)^{-1})^2}{(1+3\lambda)^{-1}} + \frac{4y^2}{\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2}} = 1。$$

$\mathcal{E}(\lambda)$ 的边界的参数方程为

$$x_\lambda(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{(1+3\lambda)^{-1}} \cos \theta + \frac{1}{2}(1+\lambda)(1+3\lambda)^{-1},$$

$$y_\lambda(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2}} \sin \theta.$$

引理 6 设 $\lambda \in [0, 1]$, 则椭圆盘 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的支撑函数为

$$\rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha) = \frac{1}{2}((1+\lambda)(1+3\lambda)^{-1} \cos \alpha + \sqrt{(1+3\lambda)^{-1} \cos^2 \alpha + \lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2} \sin^2 \alpha}).$$

证明 设 $\lambda \in [0, 1]$, 则椭圆盘 $\mathcal{E}(\lambda)$ 相对于原点的支撑函数为

$$\rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha) = \sup_{\theta \in \mathbf{R}} \{x_\lambda(\theta) \cos \alpha + y_\lambda(\theta) \sin \alpha\},$$

其中 $x_\lambda(\theta)$ 和 $y_\lambda(\theta)$ 为椭圆盘 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的边界的参数表示。定义函数

$$f_{\lambda, \alpha}(\theta) = x_\lambda(\theta) \cos \alpha + y_\lambda(\theta) \sin \alpha$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{(1+3\lambda)^{-1}} \cos \theta + \frac{1}{2}(1+\lambda)(1+3\lambda)^{-1} \right) \cos \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2}} \sin \theta \sin \alpha.$$

由于 $\mathcal{E}(\lambda)$ 关于 $y=0$ 对称, 因此只需要考虑 $\alpha \in [0, \pi]$ 即可。下面分 2 种情形证明。

情形 1 设 $\cos \alpha \neq 0$, 由于

$$f'_{\lambda, \alpha}(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{(1+3\lambda)^{-1}} \sin \theta \cos \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2}} \cos \theta \sin \alpha,$$

因此 $f_{\lambda, \alpha}(\theta)$ 的驻点为 $\theta_1 = \arctan(\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-1}} \tan \alpha)$ 和 $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ 。记 $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$, 则 $\cos \theta_i$ 和 $\sin \theta_i$ 分别为

$$\cos \theta_i = \varepsilon_i \frac{1}{\sqrt{1+\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-1} \tan^2 \alpha}}, \quad \sin \theta_i = \varepsilon_i \frac{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-1}} \tan \alpha}{\sqrt{1+\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-1} \tan^2 \alpha}}, \quad i = 1, 2,$$

则

$$f_{\lambda, \alpha}(\theta_i) = x_\lambda(\theta_i) \cos \alpha + y_\lambda(\theta_i) \sin \alpha$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{(1+3\lambda)^{-1}} \cos \theta_i + \frac{1}{2}(1+\lambda)(1+3\lambda)^{-1} \right) \cos \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2}} \sin \theta_i \sin \alpha,$$

将 $\cos \theta_i$ 和 $\sin \theta_i$ 代入 $f_{\lambda, \alpha}(\theta_i)$, 整理得到

$$f_{\lambda, \alpha}(\theta_i) = \frac{1}{2}((1+\lambda)(1+3\lambda)^{-1} \cos \alpha \pm \varepsilon_i \sqrt{(1+3\lambda)^{-1} \cos^2 \alpha + \lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2} \sin^2 \alpha}),$$

于是

$$\rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha) = \sup_{i=1,2} f_{\lambda, \alpha}(\theta_i)$$

$$= \frac{1}{2}((1+\lambda)(1+3\lambda)^{-1} \cos \alpha + \sqrt{(1+3\lambda)^{-1} \cos^2 \alpha + \lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2} \sin^2 \alpha}).$$

情形 2 设 $\cos \alpha = 0$, 此时 $f_{\lambda, \alpha}(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2}} \sin \theta$ 。当 $\sin \theta = 1$ 时, 函数 $f_{\lambda, \alpha}(\theta)$ 达到最大值

$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2}}$, 满足

$$\rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha) = \frac{1}{2}((1+\lambda)(1+3\lambda)^{-1} \cos \alpha + \sqrt{(1+3\lambda)^{-1} \cos^2 \alpha + \lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2} \sin^2 \alpha}).$$

证毕。

由以上引理, 可以证明定理 2。

定理 2 的证明。由引理 5 和引理 6,

$$\rho_{W((P+QP)^{\dagger})}(\alpha) = \sup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \frac{1}{2}((1+\lambda)(1+3\lambda)^{-1} \cos \alpha + \sqrt{(1+3\lambda)^{-1} \cos^2 \alpha + \lambda(1-\lambda)(1+3\lambda)^{-2} \sin^2 \alpha})$$

$$= \sup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha).$$

因为支撑函数刻画了有界凸集的闭包,所以由引理 3 得

$$\overline{W((P+QP)^\dagger)} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}}.$$

证毕。

定理 1 的证明。由引理 1 中的矩阵形式(1),可得

$$(P+QP)^\dagger \sim \frac{1}{2}I \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} (I+\cos^2 T)(I+3\cos^2 T)^{-1} & \cos T \sin T(I+3\cos^2 T)^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 \mathcal{H} 的分解中的 $\tilde{\mathcal{H}} = \{0\}$ 。下面分 3 种情况讨论。

(i) 若 $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}^\perp$ 均不为 $\{0\}$, 则 $W((P+QP)^\dagger) = W\left(\frac{1}{2}I \oplus I \oplus 0 \oplus 0\right) = \text{conv}\left\{\{0\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \{1\}\right\} = [0, 1]$, 此时, $\lambda \in \sigma(PQ) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ 。因为 $\mathcal{E}(0) = \{0\}$, $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\mathcal{E}(1) = [0, 1]$, 所以 $W((P+QP)^\dagger) = \text{conv}\left\{\mathcal{E}(0) \cup \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) \cup \mathcal{E}(1)\right\} = \text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}$ 。

(ii) 若 $\mathcal{L} \cap \mathcal{N} = \{0\}$, 则 $W((P+QP)^\dagger) = W(0 \oplus I \oplus 0 \oplus 0) = \text{conv}\{\{0\} \cup \{1\}\} = [0, 1]$, 此时, $\lambda \in \sigma(PQ) = \{0, 1\}$ 。因为 $\mathcal{E}(0) = \{0\}$, $\mathcal{E}(1) = [0, 1]$, 所以 $W((P+QP)^\dagger) = \text{conv}\{\mathcal{E}(0) \cup \mathcal{E}(1)\} = \text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}$ 。

(iii) 若 $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}^\perp = \{0\}$, 则 $W((P+QP)^\dagger) = W\left(\frac{1}{2}I \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0\right) = \text{conv}\left\{\{0\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 此时, $\lambda \in \sigma(PQ) = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ 。因为 $\mathcal{E}(0) = \{0\}$, $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 所以 $W((P+QP)^\dagger) = \text{conv}\left\{\mathcal{E}(0) \cup \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}$ 。

若 $\tilde{\mathcal{H}} \neq \{0\}$, 下面分 4 种情况讨论。

(i) 若 $\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N} \neq \{0\}$, 在空间 $\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N}$ 上, $(P+QP)^\dagger = 0$, 于是 $(P+QP)^\dagger$ 在空间 $(\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N}) \oplus \tilde{\mathcal{H}}$ 上的数值域的闭包为 $\text{conv}\{\{0\} \cup \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}}\}$ 。因为对任意 $\lambda \in [0, 1]$ 都有 $\{0\} \subset \mathcal{E}(\lambda)$, 所以在空间 $(\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N}) \oplus \tilde{\mathcal{H}}$ 上有 $\overline{W((P+QP)^\dagger)} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}}$ 。

(ii) 若 $\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp \neq \{0\}$, 在空间 $\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp$ 上, $(P+QP)^\dagger = 0$, 用类似 (i) 的方法可以证明在空间 $(\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp) \oplus \tilde{\mathcal{H}}$ 上有 $\overline{W((P+QP)^\dagger)} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}}$ 。

(iii) 若 $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}^\perp \neq \{0\}$, 在空间 $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}^\perp$ 上, $(P+QP)^\dagger = I$, 于是 $(P+QP)^\dagger$ 在空间 $(\mathcal{L} \cap \mathcal{N}^\perp) \oplus \tilde{\mathcal{H}}$ 上的数值域的闭包为 $\text{conv}\left\{\{1\} \cup \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}}\right\}$ 。因为对任意 $\lambda \in [0, 1]$ 都有 $\{0\} \subset \mathcal{E}(\lambda)$, 且 $\tilde{\mathcal{H}} \neq \{0\}$, 所以 0 与 1 的凸组合 $[0, 1]$ 含于 $(P+QP)^\dagger$ 数值域的闭包, 从而 $(P+QP)^\dagger$ 在空间 $(\mathcal{L} \cap \mathcal{N}^\perp) \oplus \tilde{\mathcal{H}}$ 上的数值域的闭包为 $\text{conv}\left\{[0, 1] \cup \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}}\right\}$ 。又因为 $\mathcal{E}(1) = [0, 1]$, 所以在空间 $(\mathcal{L} \cap \mathcal{N}^\perp) \oplus \tilde{\mathcal{H}}$ 上 $\overline{W((P+QP)^\dagger)} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}}$ 。

(iv) 若 $\mathcal{L} \cap \mathcal{N} \neq \{0\}$, 在空间 $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}$ 上, $(P+QP)^\dagger = \frac{1}{2}I$, 于是 $(P+QP)^\dagger$ 在空间 $(\mathcal{L} \cap \mathcal{N}) \oplus \tilde{\mathcal{H}}$ 上的数值域的闭包为 $\text{conv}\left\{\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}}\right\}$ 。因为对任意 $\lambda \in [0, 1]$ 都有 $\{0\} \subset \mathcal{E}(\lambda)$, 且 $\tilde{\mathcal{H}} \neq \{0\}$, 所以 0 与 $\frac{1}{2}$ 的凸组合 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 含于 $(P+QP)^\dagger$ 数值域的闭包, 因此, $(P+QP)^\dagger$ 在空间 $(\mathcal{L} \cap \mathcal{N}) \oplus \tilde{\mathcal{H}}$ 上的数值域的闭包为 $\text{conv}\left\{\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}}\right\}$ 。又因为 $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 所以在空间 $(\mathcal{L} \cap \mathcal{N}) \oplus \tilde{\mathcal{H}}$ 上 $\overline{W((P+QP)^\dagger)} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}}$ 。证毕。

推论 设 \mathcal{L} 和 \mathcal{N} 是复可分 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的两个非平凡闭子空间, P 和 Q 分别是 \mathcal{L} 和 \mathcal{N} 上的正交投影。若 P 和 Q 分别酉等价于(1)所示的算子矩阵形式, 则对于 $\lambda \in \sigma(PQ)$, 有

$$\overline{W((P+QP)^\dagger)} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(PQ)} \mathcal{E}(\lambda)\}} \subset \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in [0, 1]} \mathcal{E}(\lambda)\}}.$$

特别地,当 $\sigma(PQ) = [0, 1]$ 时, $\overline{W((P+QP)^\dagger)} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in [0,1]} \mathcal{E}(\lambda)\}}$ 。如图2所示。

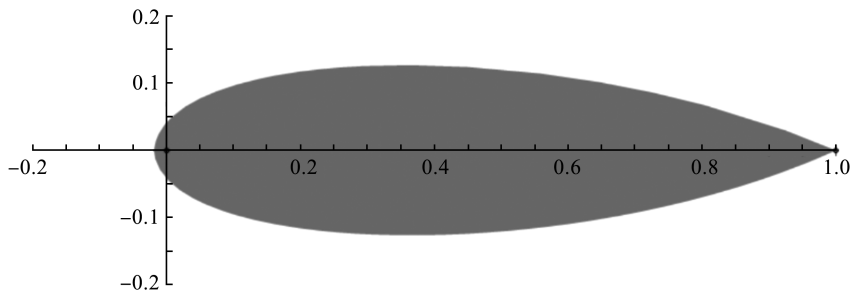


图2 $\overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in [0,1]} \mathcal{E}(\lambda)\}}$
Fig.2 $\overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in [0,1]} \mathcal{E}(\lambda)\}}$

参考文献:

- [1] STONE M H. Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis[J]. Journal of the American Mathematical Society, 1933, 15:84-84.
- [2] TOEPLITZ O. Dasalgebraische analogon zu einem satze von fejer[J]. Mathematische Zeitschrift, 1918, 2(1/2):187-197.
- [3] GUSTAFSON K E, RAO D K. Numerical range[M]. New York: Springer, 1997:208-246.
- [4] PENROSE R. A generalized inverse for matrices[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1955, 51(3):406-413.
- [5] HALMOS P R. Two subspaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1969, 144:381-389.
- [6] KLAJA H. The numerical range and the spectrum of a product of two orthogonal projections[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 411(1):177-195.
- [7] WANG Yueqing, ZUO Ning, DU Hongke. Characterizations of the support function of the numerical range of the product of positive contractions[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2016, 64(10):2068-2080.
- [8] 张晨,余维燕. 算子 $P+QP$ 的数值域[J]. 山东大学学报(理学版), 2023, 58(9):92-98.
ZHANG Chen, YU Weiyan. The numerical range of operator $P+QP$ [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2023, 58(9):92-98.
- [9] CHENG Shizen, TIAN Yongge. Moore-Penrose inverses of products and differences of orthogonal projectors[J]. Acta Scientiarum Mathematicarum, 2003, 69(3):533-542.
- [10] DU Hongke, DENG Chunyuan. Moore-Penrose inverses of products and differences of orthogonal projectors[J]. Acta Analysis Functionalis Application, 2006, 8(2):104-109.
- [11] CHIEN Maoting. Numerical Range of Moore-Penrose inverse matrices[J]. Mathematics, 2020, 8(5):1-8.
- [12] DU Hongke, LI Chikwong, WANG Kuozhong. Numerical ranges of the product of operators[J]. Operators and Matrices, 2017, 11(1):171-180.
- [13] LENARD A. The numerical range of a pair of projections[J]. Journal of Functional Analysis, 1972, 10(4):410-423.
- [14] GERYBA T, SPITKOVSKY I M. On some 4-by-4 matrices with bi-elliptical numerical ranges[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2020, 69(5):855-870.
- [15] GERYBA T, SPITKOVSKY I M. On the numerical range of some block matrices with scalar diagonal blocks[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2020, 69(5):772-785.
- [16] LI Chikwong, POON Yitung, WANG Yashu. Joint numerical ranges and commutativity of matrices[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 491(1):144-156.
- [17] BOTTCHEA A, SPITKOVSKY I M. A gentle guide to the basics of two projections theory[J]. Linear Algebra and its Applications, 2010, 432(6):1412-1459.
- [18] 邓春源,杜鸿科. 两子空间的公共补与 GroB 问题[J]. 数学学报, 2006, 49(5):1099-1112.
DENG Chunyuan, DU Hongke. Common complements of two subspaces and an answer to GroB's question[J]. Acta Mathematica Sinica, Chinese series, 2006, 49(5):1099-1112.
- [19] ROCKAFELLAR R T. Convex analysis[M]. Princeton: Princeton University Press, 1970:79-110.
- [20] RIESZ F, NAGY S B. Functional analysis[M]. Massachusetts: Courier Corporation, 1990.