

带有导数项的二阶 Neumann 边值问题正解的存在性

王丽媛,马如云*

(西安电子科技大学数学与统计学院,陕西 西安 710126)

摘要:研究带有导数项的二阶常微分方程 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -u''+k^2u=f(t,u,u'), & 0<t<1, \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性,其中 $k>0$ 为常数, $f:[0,1]\times[0,\infty)\times\mathbf{R}\rightarrow[0,\infty)$ 为连续函数,当非线性项 f 满足适当超线性增长条件及 Nagumo 条件时至少存在一个正解,该结果的证明基于不动点指数理论。

关键词:Neumann 问题;正解;不动点指数;存在性

中图分类号:O175.8 文献标志码:A

引用格式:王丽媛,马如云.带有导数项的二阶 Neumann 边值问题正解的存在性[J].山东大学学报(理学版),2025,60(5):50-55.

Existence of positive solutions of a second-order Neumann boundary value problem with derivative term

WANG Liyuan, MA Ruyun*

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, Shaanxi, China)

Abstract: This paper studies the existence of positive solutions of a second-order Neumann boundary value problem with derivative term

$$\begin{cases} -u''+k^2u=f(t,u,u'), & 0<t<1, \\ u'(0)=u'(1)=0, \end{cases}$$

where $k>0$ is a constant, $f:[0,1]\times[0,\infty)\times\mathbf{R}\rightarrow[0,\infty)$ is a continuous function. Under superlinearity condition and Nagumo-type condition on f , the problem has at least one positive solution. The proof of the main results is based on fixed-point index.

Key words: Neumann problem; positive solution; fixed-point index; existence

1 引言及主要结果

二阶常微分方程 Neumann 边值问题的研究已经取得了一些结果^[1-9]。Sun 等^[1]研究二阶 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -u''+k^2u=f(t,u), & 0<t<1, \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases} \quad (1)$$

正解的存在性,其中 $k>0$ 为常数, $f:[0,1]\times[0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$ 为连续函数。Wang 等^[2]研究了与问题(1)类似的二阶 Neumann 边值问题,且非线性项 f 不依赖于 u' 。文献[1-2]运用锥拉伸与压缩不动点定理,在 f 满足一定条件下,证明了问题(1)正解的存在性。显然,文献[1-2]的方法和结果不能直接适用于非线性项 f 依赖于 u' 的情形。

收稿日期:2024-01-08;网络出版时间:2024-05-09 11:32:31

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12061064)

第一作者:王丽媛(1998—),女,硕士研究生,研究方向为常微分方程边值问题。E-mail:wly13707667619@163.com

*通信作者:马如云(1964—),男,教授,研究方向为微分方程分歧理论。E-mail:ryma@xidian.edu.cn

Constantin^[3]研究非线性项 f 依赖于 u' 的问题

$$\begin{cases} -u''=f(t,u,u'), & 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \quad (2)$$

正解的存在性,其中 $f:[0,1] \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 为连续函数.若 f 满足

$$|f(t,u,\varphi)| \leq A(t,u)w(\varphi^2),$$

其中 $A(t,u)$ 在 $[0,1] \times \mathbf{R}$ 上的任意紧子集有界, $w:\mathbf{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ 为连续函数且

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{w(s)} = \infty,$$

则问题(2)存在一个正解.文献[3]通过 Nagumo 条件限制 f 的增长性,得到 $\|u'\|_\infty$ 的先验界,根据 Leray-Schauder 不动点定理得到问题(2)正解的存在性.

对于更一般的二阶 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -u''+k^2u=f(t,u,u'), & 0<t<1, \\ u'(0)=u'(1)=0, \end{cases} \quad (3)$$

能否建立正解的存在性结果,其中 $k>0$ 为常数, $f:[0,1] \times [0, \infty) \times \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ 为连续函数.

讨论如下参数化问题

$$\begin{cases} -u''+k^2u=f(t,u,u')+\lambda, & 0<t<1, \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases} \quad (4)$$

解的先验界,其中 λ 为正参数.引入问题(4)的辅助问题

$$\begin{cases} -u''+k^2u=f(t,u,\alpha')+\lambda, & 0<t<1, \\ u'(0)=u'(1)=0, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\alpha \in C^1(0,1)$, $\alpha'(0)=\alpha'(1)=0$.

本文作如下假设:

(H1) 存在常数 $\mu>0$,使得

$$\liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(t,u,\psi)}{u} \geq \mu > c_1$$

对 $(t,\psi) \in [0,1] \times I$ 一致成立,其中 c_1 见式(7), I 是 \mathbf{R} 上包含原点的闭子区间;

(H2) 存在常数 $\nu>0$,使得

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \frac{f(t,u,\psi)}{u} \leq \nu < c_2$$

对 $(t,\psi) \in [0,1] \times I$ 一致成立,其中 c_2 见式(8), I 是 \mathbf{R} 上包含原点的闭子区间;

(H3) 存在常数 $A_1>0, B_1>0$,对 $(t,u,\psi) \in [0,1] \times [0, \infty) \times \mathbf{R}$,有

$$f(t,u,\psi) \leq A_1 - B_1 k^2 u^2 + B_1 \psi^2.$$

定理 1 假设(H1)成立,存在常数 $B_0>0, B_0$ 不依赖于 λ 和 α ,对问题(5)的任意解 u ,有

$$\|u\|_\infty \leq B_0,$$

其中 $\|u\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$.

定理 2 假设(H1)和(H3)成立,对任意常数 $\bar{\lambda}>0$,存在常数 $B>0$,当 $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$ 时,对问题(4)的任意解 u ,有

$$\|u'\|_\infty \leq B.$$

定理 3 假设(H1) — (H3)成立,问题(3)至少存在一个正解.

注 1 当问题(3)中的非线性项 f 不依赖于 u' 时,问题(3)将退化为文献[1]中的问题,即问题(1).

2 预备知识

令 $X=C[0,1], E=C^1[0,1]$,则空间 X, E 分别在范数

$$\|u\|_{\infty} = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|, \quad \|u\| = \|u\|_{\infty} + \|u'\|_{\infty}$$

下是 Banach 空间。

齐次 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -u'' + k^2 u = 0, & 0 < t < 1, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

的 Green 函数为

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{\cosh(k(1-t)) \cosh(ks)}{k \sinh k}, & 0 \leq s < t \leq 1, \\ \frac{\cosh(kt) \cosh(k(1-s))}{k \sinh k}, & 0 \leq t < s \leq 1, \end{cases}$$

其中, $\sinh k = \frac{1}{2}[e^k - e^{-k}]$, $\cosh k = \frac{1}{2}[e^k + e^{-k}]$ 。

记 $m = \min_{0 \leq t, s \leq 1} G(t, s) > 0$, $M = \max_{0 \leq t, s \leq 1} G(t, s)$, $\sigma = mM^{-1}$, 令

$$c_0 := \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) ds, \quad c_1^{-1} := \sigma c_0. \quad (7)$$

由问题(6)的 Green 函数可知,

$$\frac{d}{dt} G(t, s) = \begin{cases} \frac{-\sinh(k(1-t)) \cosh(ks)}{\sinh k}, & 0 \leq s < t \leq 1, \\ \frac{\sinh(kt) \cosh(k(1-s))}{\sinh k}, & 0 \leq t < s \leq 1. \end{cases}$$

令

$$c_3 := \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} G(t, s) \right| ds, \quad c_2^{-1} := c_0 + c_3. \quad (8)$$

引理 1^[10] 令 P 是 Banach 空间中的锥, 令 $F: P \rightarrow P$ 为全连续算子且 $F(0) = 0$, 假设存在 $r > 0$, $R > r$, $H: [0, 1] \times P \rightarrow P$, 使得

- (i) $u \neq tF(u)$, 对任意的 $\|u\| = r$, $t \in [0, 1]$;
- (ii) $F(u) = H(0, u)$, 对任意的 $u \in P$;
- (iii) $H(t, u) \neq u$, 对任意的 $\|u\| = R$, $t \in [0, 1]$;
- (iv) $H(1, u) \neq u$, 对任意的 $\|u\| \leq R$ 。

则算子 F 存在不动点 u_0 , $r < \|u_0\| < R$ 。

3 主要结果的证明

定理 1 证明。问题(5)的解 $u(t)$ 可表示为积分形式:

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) (f(s, u(s), \alpha'(s)) + \lambda) ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

同时

$$\begin{aligned} u(t) &\geq m \int_0^1 (f(s, u(s), \alpha'(s)) + \lambda) ds = \frac{m}{M} \int_0^1 M(f(s, u(s), \alpha'(s)) + \lambda) ds \\ &\geq \frac{m}{M} \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) (f(s, u(s), \alpha'(s)) + \lambda) ds \geq \sigma \|u\|_{\infty}. \end{aligned}$$

下面证明, 存在常数 $B_0 > 0$, 对问题(5)的任意解 u , 有

$$\|u\|_{\infty} \leq B_0.$$

事实上, 若存在问题(5)的解序列 $\{u_n\}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\|u_n\|_{\infty} \rightarrow \infty$ 。由假设(H1)得, 存在 $\delta > 0$, $\delta < \mu - c_1$,

存在 $R>0$, 当 $u \geq R$ 时,

$$f(t, u, \psi) \geq \left(c_1 + \frac{\delta}{2}\right) u_0$$

存在 $n_0>0$, 当 $n \geq n_0$ 时, $|u_n(t)| > R, t \in [0, 1]$; 当 $n \geq n_0$ 时,

$$\begin{aligned} u_n(t) &\geq \int_0^1 G(t, s) f(s, u_n(s), \alpha'(s)) ds \\ &\geq \int_0^1 G(t, s) \left(c_1 + \frac{\delta}{2}\right) u_n(s) ds \\ &\geq \left(c_1 + \frac{\delta}{2}\right) \sigma \|u_n\|_\infty \int_0^1 G(t, s) ds, \end{aligned}$$

则

$$\|u_n\|_\infty \geq c_0 \left(c_1 + \frac{\delta}{2}\right) \sigma \|u_n\|_\infty,$$

所以

$$\sigma c_0 \leq \frac{1}{c_1 + \delta/2},$$

与式(7)矛盾。假设不成立, 定理 1 得证。

定理 2 证明。设 u 是问题(4)的解,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2 + B_1 u'^2) &= \frac{-2B_1 k^2 u u' + 2B_1 u' u''}{\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2 + B_1 u'^2} \\ &= \frac{2B_1 u' (-k^2 u + u'')}{\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2 + B_1 u'^2} \\ &= \frac{-2B_1 u' (f(t, u, u') + \lambda)}{\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2 + B_1 u'^2} \circ \end{aligned}$$

由假设(H3), 当 $u'(t) < 0, t \in (0, 1)$ 时,

$$\frac{d}{dt} \ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2 + B_1 u'^2) \leq -2B_1 u' \circ \tag{9}$$

由假设(H3), 当 $u'(t) > 0, t \in (0, 1)$ 时,

$$\frac{d}{dt} \ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2 + B_1 u'^2) \geq -2B_1 u' \circ \tag{10}$$

下面对 $u'(t)$ 分情况讨论。

(i) 若 $u(t)$ 在 $t=0$ 时取得最大值, 对式(9)积分得

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2(s) + B_1 u'^2(s)) ds \leq \int_0^t -2B_1 u'(s) ds, \quad 0 < t < 1,$$

计算可得

$$\ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2(t) + B_1 u'^2(t)) \leq \ln(\bar{\lambda} + A_1 - B_1 k^2 u(0)) + 2B_1(u(0) - u(t)), \quad 0 < t < 1,$$

即

$$\ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2(t) + B_1 u'^2(t)) \leq \ln(\bar{\lambda} + A_1 - B_1 k^2 \|u\|_\infty) + 2B_1(\|u\|_\infty - u(t)), \quad 0 < t < 1.$$

(ii) 若 $u(t)$ 在 $t=1$ 时取得最大值, 对式(10)积分得

$$\int_t^1 \frac{d}{dt} \ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2(s) + B_1 u'^2(s)) ds \geq \int_t^1 -2B_1 u'(s) ds, \quad 0 < t < 1,$$

计算可得

$$\ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2(t) + B_1 u'^2(t)) \leq \ln(\bar{\lambda} + A_1 - B_1 k^2 u(1)) + 2B_1(u(1) - u(t)), \quad 0 < t < 1,$$

即

$$\ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2(t) + B_1 u'^2(t)) \leq \ln(\bar{\lambda} + A_1 - B_1 k^2 \|u\|_\infty) + 2B_1(\|u\|_\infty - u(t)), \quad 0 < t < 1.$$

(iii) 若 $u(t)$ 在 $t=\xi$ 时取得最大值, $\xi \in (0, 1)$ 。存在 $\varepsilon > 0$, 当 $t \in (\xi - \varepsilon, \xi)$ 时,

$$\ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2(t) + B_1 u'^2(t)) \leq \ln(\bar{\lambda} + A_1 - B_1 k^2 u(\xi)) + 2B_1(u(\xi) - u(t)).$$

当 $t \in (\xi, \xi + \varepsilon)$ 时,

$$\ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2(t) + B_1 u'^2(t)) \leq \ln(\bar{\lambda} + A_1 - B_1 k^2 u(\xi)) + 2B_1(u(\xi) - u(t)).$$

因此, 当 $t \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ 时,

$$\ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2(t) + B_1 u'^2(t)) \leq \ln(\bar{\lambda} + A_1 - B_1 k^2 \|u\|_\infty) + 2B_1(\|u\|_\infty - u(t)).$$

综上, 对情况(i)、(ii)、(iii), 均有

$$\ln(\lambda + A_1 - B_1 k^2 u^2(t) + B_1 u'^2(t)) \leq \ln(\bar{\lambda} + A_1 - B_1 k^2 \|u\|_\infty) + 2B_1(\|u\|_\infty - u(t)), \quad 0 < t < 1. \quad (11)$$

因为问题(5)的解不依赖于 α 和 λ , 当 $\alpha(t) = u(t)$ 时, 问题(5)的解是问题(4)的解。假设(H1)成立, 由定理1可知, 问题(5)的解有先验界, 则问题(4)的解有先验界。结合式(11)可知, 对问题(4)的任意解 $u, \|u'\|_\infty$ 有先验界, 即存在常数 $B > 0, \|u'\|_\infty \leq B$ 。定理2得证。

定理3证明。定义锥 P 为

$$P = \{u \in E : u(t) \geq 0, \min_{0 \leq t \leq 1} u(t) \geq \sigma \|u\|_\infty\}.$$

定义算子 $\mathcal{F}: P \rightarrow P$,

$$\mathcal{F}u(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds.$$

容易验证, \mathcal{F} 为全连续算子, 算子 \mathcal{F} 的不动点为问题(3)的解。

算子 \mathcal{F} 具有保锥性。事实上, $\forall u \in P$,

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq t \leq 1} \mathcal{F}u(t) &= \min_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds \geq m \int_0^1 f(s,u(s),u'(s))ds \\ &= \frac{m}{M} \int_0^1 Mf(s,u(s),u'(s))ds \geq \frac{m}{M} \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds \\ &= \sigma \|\mathcal{F}u\|_\infty. \end{aligned}$$

定义算子 $\mathcal{H}(n,u)(t) = \mathcal{F}_\lambda(n,u)(t)$,

$$\mathcal{F}_\lambda(n,u)(t) = \int_0^1 G(t,s)(f(s,u(s),u'(s)) + n\lambda)ds, \quad 0 \leq t, \quad n \leq 1.$$

由假设(H2)得, 存在 $\delta_0 > 0, \nu = c_2 - \delta_0$, 存在 $r > 0$, 当 $0 \leq u \leq r$ 时,

$$f(t,u,\psi) \leq \left(c_2 - \frac{\delta_0}{2}\right)u.$$

因此, 当 $\|u\| = r$ 时,

$$|\mathcal{F}(u)(t)| = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds \leq \left(c_2 - \frac{\delta_0}{2}\right)\|u\|_\infty \int_0^1 G(t,s)ds \leq c_0 \left(c_2 - \frac{\delta_0}{2}\right)\|u\|_\infty.$$

同理,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}'(u)(t)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} G(t,s) \cdot f(s,u(s),u'(s))ds \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} G(t,s) \right| \cdot |f(s,u(s),u'(s))|ds \\ &\leq \left(c_2 - \frac{\delta_0}{2}\right)\|u\|_\infty \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} G(t,s) \right|ds \leq c_3 \left(c_2 - \frac{\delta_0}{2}\right)\|u\|_\infty. \end{aligned}$$

所以, 当 $\|u\| = r$ 时,

$$\|\mathcal{F}u\| = \|\mathcal{F}u\|_\infty + \|\mathcal{F}'u\|_\infty \leq (c_0 + c_3) \left(c_2 - \frac{\delta_0}{2}\right)\|u\|_\infty = \frac{1}{c_2} \left(c_2 - \frac{\delta_0}{2}\right)\|u\|_\infty < \|u\|_\infty. \quad (12)$$

由式(12)可得, 引理1的(i)成立, 引理1的(ii)显然成立。由定理2可知, 当 $\bar{\lambda}$ 足够大, $\lambda = \bar{\lambda}$ 时, 问题(4)不存在正解; 当 $R = B + 1$ 时, 引理1的(iii)和(iv)成立, 因此, 由引理1可知, 算子 \mathcal{F} 存在不动点, 问题(3)至少存在一个正解。定理3得证。

参考文献:

[1] SUN Jianping, LI Wantong. Multiple positive solutions to second-order Neumann boundary value problems [J]. Applied

Mathematics and Computation, 2003, 146(1):187-194.

- [2] WANG Feng, ZHANG Fang. Existence of positive solutions of Neumann boundary value problem via a cone compression-expansion fixed point theorem of functional type[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2011, 35(1):341-349.
- [3] CONSTANTIN A. On a two point value problem[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 193:318-328.
- [4] HAI D D, SHIVAGI R. Positive radial solutions for a class of singular superlinear problems on the exterior of a ball with nonlinear boundary conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 456(2):872-881.
- [5] GAO Hongliang, MA Ruyun. Multiple positive solutions for a class of Neumann problems[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2015, 2015(48):1-7.
- [6] HEIDARKHANI S, MORADI S, BARILLA D. Existence results for second-order boundary-value problems with variable exponents [J]. Nonlinear Analysis, 2018, 44:40-53.
- [7] LI Yongxiang. Positive solutions for second order boundary value problems with derivative terms[J]. Mathematische Nachrichten, 2016, 289(16):2058-2068.
- [8] SOVRANO E, ZANOLIN F. Indefinite weight nonlinear problems with Neumann boundary conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 452(1):126-147.
- [9] XING Hui, CHEN Hongbin, HE Xibing. Exact multiplicity and stability of solutions of second-order Neumann boundary value problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 232:1104-1111.
- [10] KRASNOSELSKII M, FLAHERTY R, BORON L. Positive solutions of operators equations[J]. The American Mathematical Monthly, 1964, 74(3):343-343.

(编辑:陈丽萍)

(上接第49页)

- [23] LU Yanqiong, JING Zhengqi. Continuum of one-sign solutions of one-dimensional Minkowski-curvature problem with nonlinear boundary conditions[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2023, 46(7):8160-8174.
- [24] BEREANU C, MAWHIN J. Boundary value problems for second-order nonlinear difference equations with discrete ϕ -Laplacian and singular[J]. Journal Of Difference Equations And Applications, 2008, 14(10/11):1099-1118.
- [25] BEREANU C, MAWHIN J. Existence and multiplicity results for nonlinear second order difference equations with Dirichlet boundary conditions[J]. Mathematica Bohemica, 2006, 131(2):145-160.
- [26] CHEN Tianlan, MA Ruyun, LIANG Yongwen. Multiple positive solutions of second-order nonlinear difference equations with discrete singular ϕ -Laplacian[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2019, 25(1):38-55.
- [27] ZHOU Zhan, LING Jiaoxiu. Infinitely many positive solutions for a discrete two point nonlinear boundary value problem with ϕ_c -Laplacian[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 91:28-34.
- [28] LU Yanqiong, MA Ruyun. Multiple positive solutions of the discrete Dirichlet problem with one-dimensional prescribed mean curvature operator[J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2021, 11(2):841-857.
- [29] 郭大均. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科学技术出版社,2002.
GUO Dajun. Nonlinear functional analysis[M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2002.
- [30] KRASNOSELSKII M A. Positive solutions of operator equations[M]. [s.l.]: Groningen, 1964.
- [31] 马如云. 非线性差分方程的理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2019.
MA Ruyun. Theory and application of nonlinear difference equations[M]. Beijing: Science Press, 2019.

(编辑:陈丽萍)