

一种融合对象邻接关系的网络概念及其推荐应用

李晓兰^{1,3}, 刘忠慧^{1,3}, 闵帆^{1,2,3*}

(1.西南石油大学计算机与软件学院, 四川 成都 610500; 2.西南石油大学人工智能研究院, 四川 成都 610500; 3.西南石油大学机器学习研究中心, 四川 成都 610500)

摘要:传统的概念仅包含对象和属性之间的关系,忽略了对象与对象之间的邻接关系,导致推荐效果不佳。为了解决这一问题,本文基于网络形式背景提出邻接网络(adjacency network, AN)概念,并设计了AN概念集构造方法和基于该概念集的推荐算法。设计AN概念由外延对象、邻接内涵和内涵属性组成,其中邻接内涵为外延对象的邻接节点。提出启发式构造算法,利用概念的容积作为启发式信息,生成AN概念集。采用不同的推荐策略,为外延对象和邻接内涵对象进行预推荐,通过推荐次数阈值判断实现最终推荐。本文在11个真实数据集上进行了实验,并将结果与经典的协同过滤算法和基于形式概念的推荐算法进行了比较。结果表明,本文提出的算法具有较好的推荐效果。

关键词:网络形式背景;AN概念;邻接内涵;推荐置信度;推荐系统

中图分类号:TP181 **文献标志码:**A

引用格式:李晓兰,刘忠慧,闵帆.一种融合对象邻接关系的网络概念及其推荐应用[J].山东大学学报(理学版),2025,60(7):56-68.

A network concept incorporated adjacency relationships between objects and its recommendation application

LI Xiaolan^{1,3}, LIU Zhonghui^{1,3}, MIN Fan^{1,2,3*}

(1. School of Computer Science and Software Engineering, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, Sichuan, China; 2. Institute for Artificial Intelligence, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, Sichuan, China; 3. Lab of Machine Learning, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, Sichuan, China)

Abstract: The traditional concepts only include the relationship between objects and attributes, while the adjacency relationships between objects are ingored, resulting in poor recommendation performance. To solve this problem, the adjacency network concept based on the network formal context is proposed, and a method for constructing an AN concept set is designed, along with a recommendation algorithm based on this set. The AN concept is consisted of extent objects, adjacency intent and intent attributes. The adjacency intent is formed by adjacent nodes of extent objects. A heuristic construction algorithm is proposed, which utilizes the concept volume as heuristic information to construct the AN concept set. Different strategies are adopted to make the pre-recommendation for extent objects and adjacency intent objects. The final recommendation result is determined by the recommendation frequency threshold. The algorithm is verified on eleven real datasets. It is compared with the classical collaborative filtering algorithms and recommendation algorithms based on the formal concepts. The results show that our algorithm has better recommendation effect.

Key words: network formal context; adjacency network concept; adjacency intent; recommendation confidence; recommendation system

0 引言

形式概念分析(formal concept analysis, FCA)^[1]是一种在形式背景上进行数据分析与知识挖掘的有效

收稿日期:2024-05-14; 网络出版时间:2025-01-16 12:34:21

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61976245); 中央引导地方科技发展专项资助项目(2021ZYD0003); 南充市校科技战略合作项目(23XNSYSX0062_23XNSYJG0054)

第一作者:李晓兰(2000—),女,硕士研究生,研究方向为形式概念分析和网络形式背景. E-mail:lixiaolan513@163.com

*通信作者:闵帆(1973—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为粒计算、主动学习与多标签学习等. E-mail:minfan@swpu.edu.cn

工具。它可以表示对象和属性之间的二元关系,以及概念与概念之间的层次关系。目前,FCA已广泛应用于机器学习^[2-4]、数据挖掘^[5-6]、特征选择^[7-9]和知识发现^[10-12]等领域。此外,FCA还与其他理论整合,如模糊集合^[13-15]、粒计算^[16-18]、粗糙集^[19-21]以及三支决策^[22-24],为多个领域提供了解决方案。

FCA主要关注对象与属性之间的关系,忽略了对对象之间的网络结构。马娜等^[25]将网络结构以邻接矩阵的形式与形式背景统一起来,提出了网络形式背景。定义了网络概念及其网络特征值,研究了网络概念生成等问题。范敏等^[26]从FCA中的必然算子、可能算子出发,提出变精度可能算子,并将其与网络特征值结合,定义了网络弱概念。此外,Yan等^[27]将网络形式背景与三支概念分析结合进行数据分析,同时在网络形式背景下提出网络三支概念,并给出了网络三支概念知识发现算法。另外,Fan等^[28]将网络形式背景和三支决策形式背景统一在同一个框架下,并提出了基于它的网络弱概念,还探讨了基于该网络弱概念和置信度的双向规则提取算法和约简算法。这些理论和应用加深了人们对网络形式背景的认识,拓宽了其应用范围。

FCA在推荐系统的应用主要基于概念格^[29-31],然而,概念格构造存在高时空复杂度,一些算法利用概念集代替概念格。基于概念集合的推荐(the concept set based recommendation, CSBR)算法^[32]利用启发式方法构造概念集合进行协同过滤推荐。基于概念集的个性化推荐(concept set based-personalized recommendation, CSPR)算法^[33]则考虑了概念中外延对象之间的相似性,采用模拟退火法构造概念集,实现个性化推荐。刘忠慧等^[34]在三支概念分析下引入了内涵粗糙三支概念,该概念由外延、正内涵以及负内涵组成,结合外延用户偏好以及内涵特性实现个性化推荐。这些算法构造的概念只有对象与属性的关系,未考虑对象之间的关,导致推荐效果不佳。

因此,一些研究者在网络形式背景下进行推荐研究。其中,基于弱概念相似度的组推荐(group recommendation algorithm based on weaken-concept similarity, GRAWS)算法^[35]在网络形式背景下,通过选取专家节点划分社区,利用属性弱概念下限相似度对社区中的对象进行推荐。基于因果力的邻域推荐(neighborhood recommendation algorithm based on causality force, NRACF)算法^[36]将决策属性加入到网络形式背景中,构成网络决策形式背景,结合了变精度算子、因果力和领域推荐的思想,通过构建社区的方式对社区成员进行领域推荐。上述算法均采用了构建社区的方式进行推荐,但是缺乏对网络形式背景下生成概念的使用。

本文在网络形式背景下,提出了AN概念,并设计了AN概念集的构造方法及其推荐算法。首先,将对象之间的邻接关系以邻接内涵的形式加入到概念中构成AN概念。然后,以内涵属性为约束目标,概念容积为优化目标,为每个对象生成相应的AN概念。接着,根据对象在概念的外延或邻接内涵,采用不同的策略进行预推荐。若对象在概念外延中,通过计算待推荐属性在概念中的推荐置信度判断是否进行推荐。若对象在概念邻接内涵中,向该对象推荐概念的内涵属性。最后,通过推荐频数阈值判断得到最终的推荐结果。实验结果表明,相较于经典的协同过滤算法和基于形式概念的推荐算法,本文提出的算法具有较好的推荐效果。

1 相关理论

本节将首先回顾FCA的相关理论和知识,然后引入网络形式背景,并基于网络形式背景提出AN概念。

1.1 形式背景

定义1 形式背景^[1]。形式背景是一个三元组 $T=(O,A,R)$,其中 O 为对象集, A 为属性集, $R\subseteq O\times A$ 为 O 和 A 之间的二元关系。

对于任何, $x\in O, a\in A, (x,a)\in R$ 表示对象 x 拥有属性 a ,而 $(x,a)\notin R$ 表示对象 x 未拥有属性 a 。

定义2 \square/\diamond 算子^[1]。给定一个形式背景 $T=(O,A,R)$,对象集 $X\subseteq O$,属性集 $B\subseteq A$,则 \square/\diamond 算子定义为

$$X^{\square} = \{a \in A \mid \forall x \in X, (x, a) \in R\}, \quad (1)$$

$$B^{\diamond} = \{x \in O \mid \forall a \in B, (x, a) \in R\}, \quad (2)$$

式中: X^{\square} 表示 X 中所有对象共同拥有的属性, B^{\diamond} 表示拥有 B 中所有属性的对象。

定义3 形式概念^[1]。在形式背景 $T=(O,A,R)$ 中,令 $X\subseteq O, B\subseteq A$,若满足 $X^{\square}=B, B^{\diamond}=X$,则称二元组 (X,B) 为形式概念,其中 X 为概念的外延, B 为概念的内涵。

表1为一个形式背景的示例,记录了10个对象对8个属性的拥有情况。1中1表示拥有,0表示不拥有,如对象 x_0 拥有属性 a_0 ,对象 x_1 不拥有属性 a_0 。

表1 一个形式背景的例子
Table 1 An example of formal context

O	A							
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
x_0	1	0	1	1	0	1	0	1
x_1	0	1	1	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	1	0	1	0
x_3	1	1	0	0	1	0	1	1
x_4	1	0	1	0	0	1	1	1
x_5	0	1	0	1	1	0	1	0
x_6	1	0	1	0	0	1	0	1
x_7	1	0	1	1	0	1	0	0
x_8	0	1	1	1	1	0	1	1
x_9	1	0	1	1	0	1	0	1

例1 在表1中,令 $X = \{x_1, x_2, x_8\}$,有 $X^\square = \{a_2, a_4, a_6\}$,令 $B = \{a_2, a_4, a_6\}$,有 $B^\diamond = \{x_1, x_2, x_8\}$,则有 $X^\square = B$, $B^\diamond = X$,因此称 $(\{x_1, x_2, x_8\}, \{a_2, a_4, a_6\})$ 是一个形式概念,其中 $\{x_1, x_2, x_8\}$ 和 $\{a_2, a_4, a_6\}$ 分别为此概念的外延和内涵。

1.2 网络形式背景

对象之间的网络结构以邻接矩阵的形式融入到形式背景中,构成了网络形式背景,定义如下。

定义4 网络形式背景^[25]。网络形式背景是一个四元组 $Q = (O, M, A, I)$ 。其中, $O = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是对象集; $M = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ 是网络的结构矩阵, $M_l = (m_{ij}^l)_{n \times n} (l = 1, 2, \dots, k)$ 表示网络的 l 阶邻接矩阵,当对象 x_i 和 x_j 是 l 阶邻接,即 $m_{ij}^l = 1$,否则, $m_{ij}^l = 0$; $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 是属性集; $I = \{I_1, I_2, \dots, I_k, I_{k+1}\}$, I_1, I_2, \dots, I_k 是 $O \times O$ 上的二元关系,约定 $(x_i, x_j) \in I_l$ 表示对象 x_i 和 x_j 是 l 阶邻接的; I_{k+1} 是 $O \times A$ 上的二元关系,约定 $(x_i, a_j) \in I_{k+1}$ 表示对象 x_i 拥有属性 a_j 。

表2是一个网络形式背景,根据表中信息,在 M_1 对应的矩阵中, $m_{1n}^1 = 1$ 即 $(x_1, x_n) \in I_1$,表示对象 x_1 和 x_n 是一阶邻接关系。在 A 对应的矩阵中, $(x_1, a_1) \in I_{k+1}$ 表示对象 x_1 拥有属性 a_1 。

表2 网络形式背景
Table 2 A network formal context

O	M_1					...	M_k				A			
	x_0	x_1	...	x_n			x_0	x_1	...	x_n	a_0	a_1	...	a_n
x_0	0	0	...	1	...	0	1	...	0	1	1	...	1	
x_1	0	1	...	0	...	0	0	...	0	1	1	...	1	
...	
x_n	1	0	...	0	...	0	1	...	0	0	1	...	0	

本文讨论只有一阶邻接矩阵的网络形式背景,后续出现的网络形式背景其邻接矩阵均为一阶。

1.3 AN 概念

本文基于网络形式背景提出 AN 概念,该概念引入了对象之间的邻接关系。为了更好地描述 AN 概念,在网络形式背景下引入新的算子,用于表示对象之间的邻接关系。

定义5 Δ 算子。给定一个网络形式背景 $Q = (O, M, A, I)$,对象集 $X \subseteq O$,则 Δ 算子的定义为

$$X^\Delta = \{x_j \in O \mid \forall x_i \in X, (x_i, x_j) \in I_1\} \tag{3}$$

式中 X^Δ 表示 X 中所有对象共同拥有的一阶邻接对象。定义2中两个算子也同样适用于网络形式背景,其中式(1)、(2)中 R 等同于网络形式背景中的 I_2 。因此 AN 概念的定义如下。

定义6 AN 概念。给定一个网络形式背景 $Q = (O, M, A, I)$,令 $X \subseteq O$, $B \subseteq A$,若满足 $X^\square = B$, $B^\diamond = X$, $D = X^\Delta$,则称三元组 $C = (X, (D, B))$ 为 AN 概念,其中, X 为概念的外延, D 为概念的邻接内涵, B 为概念的内

涵属性。

AN 概念在形式概念的基础上加入了外延对象的邻接节点作为邻接内涵,因此,当邻接内涵 $D = \emptyset$ 时,AN 概念会退化为形式概念。

例 2 表 3 是一个网络形式背景,记录了 10 个对象之间的一阶邻接情况,及 10 个对象对 8 个属性的拥有情况。令 $X = \{x_2, x_5\}$, 有 $X^\square = \{a_3, a_4, a_6\}$, $X^\Delta = \{x_1, x_3, x_8\}$, 则令 $B = \{a_3, a_4, a_6\}$, 有 $B^\diamond = \{x_2, x_5\}$ 。满足 $X^\square = B$, $B^\diamond = X$, 因此 $(\{x_2, x_5\}, (\{x_1, x_3, x_8\}, \{a_3, a_4, a_6\}))$ 是一个 AN 概念,其中, $\{x_2, x_5\}$ 为外延, $\{x_1, x_3, x_8\}$ 为邻接内涵, $\{a_3, a_4, a_6\}$ 为内涵属性。

表 3 一个网络形式背景的例子
Table 3 An example of network formal context

O	M ₁										A							
	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇
x ₀	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
x ₁	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
x ₂	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
x ₃	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
x ₄	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
x ₅	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
x ₆	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
x ₇	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
x ₈	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
x ₉	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1

2 问题描述与分析

2.1 AN 概念集的构造

本文将在 AN 概念集的基础下实现推荐,因此,设计了以内涵属性为约束条件,概念容积为优化目标的启发式概念生成方法,概念容积用来评价 AN 概念的质量,定义如下。

定义 7 概念容积。给定一个 AN 概念 $C = (X, (D, B))$, 概念 C 的容积的定义为

$$V(C) = V(X, (D, B)) = \begin{cases} |X| \times |D| \times |B|, & D \neq \emptyset, \\ |X| \times |B|, & \text{其它}, \end{cases} \quad (4)$$

式中 $|\cdot|$ 表示集合的基数。

概念的容积越大,表示该概念质量越好,所包含的信息越多。

问题 1 AN 概念的构造。

输入 网络形式背景 $Q = (O, M, A, I)$, 内涵属性阈值 α 。

输出 AN 概念集 $S(C)$ 。

约束条件 1 $\cup_{(X, (D, B)) \in S(C)} X = O$ 。

约束条件 2 $\forall (X, (D, B)) \in S(C), |B| \geq \alpha$ 。

优化目标 $\max(V(C)), C \in S(C)$ 。

输入网络形式背景和内涵属性阈值为 α , 最后输出 AN 概念集。约束条件 1 规定,所生成的 AN 概念应该覆盖所有对象;约束条件 2 规定,生成的概念内涵属性的规模不得小于 α , 当对象之间共同拥有的属性足够多,推荐成功的可能性越大。优化目标旨在最大化概念的容积,保证生成的概念具有更好的质量,从而提高后续的推荐效果。

2.2 基于 AN 概念集的推荐

基于 AN 概念集的推荐,为外延和邻接内涵中的 2 类对象设计不同的推荐方法。当待推荐对象在概念的内涵中,利用外延对象和邻接内涵对象的偏好判断对其的推荐,因此分别设置外延推荐置信度和邻接内涵推荐置信度。

定义 8 外延推荐置信度。给定网络形式背景 $Q=(O, M, A, I)$, AN 概念 $C=(X, (D, B))$, 对任意的 $x \in D, a \in A - \{x\}^\square$, 属性 a 在概念 C 下的外延推荐置信度为

$$R_{Er}(a, X) = \frac{|\{x \in X | (x, a) \in I\}|}{|X| - 1}. \quad (5)$$

定义 9 邻接内涵推荐置信度。给定网络形式背景 $Q=(O, M, A, I)$, AN 概念 $C=(X, (D, B))$, 当 $D \neq \emptyset$ 时, 对任意的 $x \in D, a \in A - \{x\}^\square$, 属性 a 在概念 C 下的邻接内涵推荐置信度为

$$R_{Ar}(a, D) = \frac{|\{x \in D | (x, a) \in I\}|}{|D|}. \quad (6)$$

当 AN 概念的邻接内涵为空集时, 不考虑邻接内涵推荐置信度的计算。

问题 2 基于 AN 概念集的推荐。

输入 网络形式背景 $Q=(O, M, A, I)$, AN 概念集 $S(C)$, 外延推荐置信度阈值 β_1 , 邻接内涵推荐置信度阈值 β_2 , 推荐频数阈值 θ 。

输出 推荐矩阵 L 。

约束条件 1 $\forall C \in S(C), \forall x \in X(C), \forall a \in A - \{x\}^\square$, 如果 $R_{Er}(a, X(C)) \geq \beta_1$, 或 $R_{Ar}(a, D(C)) \geq \beta_2$, 那么 $Q(x, a)++$ 。

约束条件 2 $\forall C \in S(C), \forall x \in D(C), \forall a \in A - \{x\}^\square$, 如果 $a \in B(C)$, 那么 $Q(x, a)++$ 。

约束条件 3 $\forall x \in O, \forall a \in A$, 如果 $Q(x, a) \geq \theta$, 那么 $L(x, a) = 1$ 。

优化目标 $\max(F1)$ 。

输入包括网络形式背景、由问题 1 构造的 AN 概念集 $S(C)$, 用来控制预推荐的置信度阈值 β_1, β_2 , 以及判断最终的推荐的频数阈值 θ 。最后输出的 L 是一个 $|O| \times |A|$ 大小的布尔矩阵, 存储最终的推荐结果。约束条件中出现的矩阵 Q 用来存放预推荐结果。约束条件 1 表示, 向概念外延对象进行推荐时, 首先计算出待推荐属性在概念中的外延推荐置信度, 若大于等于 β_1 , 则进行预推荐; 否则将计算待推荐项目的邻接内涵推荐置信度, 若大于等于 β_2 , 同样进行预推荐。约束条件 2 表示, 向概念邻接内涵的对象进行推荐时, 若待推荐属性在概念内涵属性中, 也可以进行预推荐。约束条件 3 表示, 当预推荐次数大于等于 θ , 就确定最终的推荐。优化目标表示最大化 $F1$ 值, 以确保推荐效果更佳。

3 算法设计

为了解决上面提出的 2 个问题, 本章设计了 2 个算法: AN 概念集构造 (AN network concept set construction, ANSC) 算法和基于 AN 概念集的推荐 (AN network concept set based recommendation, ANSR) 算法。同时给出了算法相应的描述与伪代码, 分析了算法的时间复杂度, 最后给出了运行实例。

3.1 AN 概念集构造算法

算法 1 AN 概念集构造算法。

输入 网络形式背景 $Q=(O, M, A, I)$, 内涵属性阈值 α 。

输出 AN 概念集 $S(C)$ 。

(1) $C \leftarrow \emptyset, P \leftarrow O$;

(2) while ($P \neq \emptyset$) do

(3) $v = 0$; /* 记录概念的容积, 初始为 0 */

(4) $B \leftarrow \emptyset$;

(5) $x^* = \operatorname{argmax}_{x \in P} (|\{x\}^\square| + |\{x\}^\Delta|)$; /* P 中的拥有属性和邻接对象个数最多的对象 */

(6) $a^* = \operatorname{argmax}_{a \in \{x^*\}^\square} |\{a\}^\diamond|$; /* 对象 x^* 拥有最受欢迎的属性 */

(7) $B = B \cup \{a^*\}$; /* 初始化内涵属性 */

(8) while (true) do

(9) $a^* = \operatorname{argmax}_{a \in (\{x^*\}^\square \setminus B)} |(B \cup \{a\})^\diamond|$; /* 找出 $\{x^*\}^\square$ 剩余属性中与 B 结合最受欢迎的属性 */

```

(10)       $v' = V((B \cup \{a^*\})^\diamond, (((B \cup \{a^*\})^\diamond)^\Delta, B \cup \{a^*\}));$  /* 计算出新的概念的容积 */
(11)      if  $((v' > v) \vee (|B| + 1 < \alpha))$  then
(12)           $B = B \cup \{a^*\};$  /* 更新内涵属性 */
(13)           $v = v';$  /* 更新概念的容积 */
(14)      else
(15)          break;
(16)      end if
(17)  end while
(18)       $C = (B^\diamond, ((B^\diamond)^\Delta, B));$ 
(19)       $S(C) = S(C) \cup \{C\};$ 
(20)       $P = P - X(C);$ 
(21)  end while
(22)  return  $S(C)$ 。

```

算法1 基于启发式信息生成覆盖所有对象的 AN 概念集。其中,步骤(1)初始化概念集 $S(C)$ 和存放对象的集合 P 。步骤(3)—(4)初始化概念容积和内涵属性。步骤(5)找出 P 中拥有属性和邻接节点个数最多的对象 x^* 。步骤(6)—(7)将 x^* 最受欢迎的属性作为初始化的内涵属性。步骤(8)—(17)将内涵属性与 $\{x^*\}$ 剩余的属性结合,若此时得到的概念容积更大,同时内涵属性的数量大于 α ,则更新内涵属性和概念规模,最后得到容积最大时的内涵属性。步骤(18)—(20)根据内涵属性更新概念,并加入到概念集,从 P 中移除该概念的外延对象。最后返回概念集 $S(C)$ 。

3.2 基于 AN 概念集的推荐算法

算法2 基于 AN 概念集的推荐算法。

输入 网络形式背景 $Q = (O, M, A, I)$, AN 概念集 $S(C)$, 外延推荐置信度阈值 β_1 , 邻接内涵推荐置信度阈值 β_2 , 推荐频数阈值 θ 。

输出 推荐矩阵 L 。

```

(1)   $L_{|O| \times |A|} \leftarrow 0, Q_{|O| \times |A|} \leftarrow 0;$ 
(2)  for  $(x \in O, a \in A)$  do
(3)      for  $(C \in S(C)_x \subseteq S(C))$  do
(4)          if  $((x \in X(C)) \wedge ((x, a) \notin I))$  then
(5)              if  $(R_{Er}(a, X(C)) \geq \beta_1)$  then
(6)                   $Q[x, a] ++;$  /* 记录推荐次数 */
(7)              else if  $(R_{Ar}(a, D(C)) \geq \beta_2)$  then
(8)                   $Q[x, a] ++;$  /* 记录推荐次数 */
(9)              end if
(10)         end if
(11)         if  $((x \in D(C)) \wedge ((x, a) \notin I))$  then
(12)             if  $(a \in B(C))$  then
(13)                  $Q[x, a] ++;$  /* 记录推荐次数 */
(14)             end if
(15)         end if
(16)     end for
(17) end for
(18) for  $(x \in O, a \in A)$  do
(19)     if  $(Q[x, a] \geq \theta)$  then
(20)          $L[x, a] = 1;$  /* 记录最终的推荐结果 */
(21)     end if

```

(22) end for

(23) return L 。

算法2利用算法1计算出来的概念集进行推荐。其中,步骤(1)初始化矩阵 L 和 Q 。步骤(2)—(3)首先遍历每个对象及属性,然后在概念集 $S(C)$ 中查找对象所在的子集 $S(C)_x$, 并对其遍历。步骤(4)—(10)表示,当对象在概念外延中,首先计算出待推荐属性的外延推荐置信度。若大于等于 β_1 , 就推荐该属性给对象,反之,计算待推荐属性的邻接内涵推荐置信度,若大于等于 β_2 , 同样推荐该属性给对象。步骤(11)—(15)表示,当对象在概念邻接内涵中,向对象推荐概念内涵属性中对象未拥有的属性。步骤(18)—(22)判断预推荐次数是否大于等于 θ , 若满足才确定最终的推荐。最后返回存放最终推荐结果的矩阵 L 。

3.3 复杂度分析

本文算法时间复杂度为算法1、算法2的时间复杂度之和。网络形式背景的大小为 $n \times (n+m)$, 其中 n 表示对象个数, m 表示属性个数。

算法1的核心是不断更新内涵属性以获得最大的概念容积来生成 AN 概念, 得到覆盖所有对象的概念集。首先遍历完 P 中对象的, 时间复杂度为 $O(n)$ 。接着找到 P 中拥有属性和邻接对象个数最多的对象 x 的时间复杂度为 $O(n+m)$, 再找到对象 x 最受欢迎的属性的最大时间复杂度为 $O(nm)$ 。然后得到内涵属性的时间复杂度为 $O(nm)$, 最后根据内涵属性更新概念的时间复杂度为 $O(n^2m)$ 。因此算法1的时间复杂度为 $O(n \times ((n+m) + (nm) + (nm) + (n^2m))) = O(n^3m)$ 。

算法2的核心是利用构建好的 AN 概念集进行推荐。首先遍历每个对象和属性的时间复杂度为 $O(nm)$, 在概念集中查找对象所在的子集并遍历的时间复杂度为 $O(n)$ 。当对象在概念外延中, 计算外延推荐置信度和内涵推荐置信度的时间复杂度为 $O(n)$; 当对象在邻接内涵中, 判断内涵属性是否推荐给对象的时间复杂度为 $O(n)$ 。最后得到最终推荐结果的时间复杂度为 $O(nm)$ 。因此算法2的时间复杂度为 $O(nm \times n \times (n+n) + nm) = O(n^3m)$ 。

所以总的时间复杂度为 $O(n^3m)$ 。

3.4 运行实例

本章用一个实例描述了 AN 概念集的构造以及基于概念集的推荐过程。使用的网络形式背景如表所示, 设内涵属性阈值 $\alpha=2$, 外延推荐置信度阈值 $\beta_1=0.55$, 邻接内涵推荐置信度阈值 $\beta_2=0.6$, 推荐频数阈值 $\theta=2$ 。

AN 概念集的构造过程: 首先根据网络形式背景, 计算出每个对象的邻接节点和属性个数之和, 将对象按计算出来的结果升序放入 P 中, 即 $P = \{x_5, x_6, x_7, x_3, x_0, x_2, x_8, x_9, x_4, x_1\}$ 。然后遍历 P 中的对象, 为每个对象构造相应的概念。以 x_5 为例, x_5 的属性为 $\{x_5\}^\square = \{a_1, a_3, a_4, a_6\}$, 其中最受欢迎的属性是 a_6 。所以将 a_6 作为初始的内涵属性, 将剩余的属性与内涵属性相结合, 找到通过 \diamond 算子计算后得到集合最大的属性。计算出此时概念的容积, 如果大于初始容积, 且内涵属性阈值大于 α , 将该属性加入内涵属性中。重复遍历 $\{x_5\}^\square$ 中剩余的属性, 直至找到概念容积最大时的内涵属性, 更新得到对应的概念。最后得到关于 x_5 的概念为 $C_1 = (\{x_2, x_5\}, (\{x_1, x_3, x_8\}, \{a_3, a_4, a_6\}))$, 然后将 C_1 中的外延对象 $\{x_2, x_5\}$ 从 P 中移除, 更新 $P = P - \{x_2, x_5\} = \{x_6, x_7, x_3, x_0, x_8, x_9, x_4, x_1\}$ 。继续遍历 P 中的对象生成概念, 直至 P 为空集, 最后得到概念集的结果如表4所示。

表4 例2中的网络形式背景下构造出的 AN 概念集
Table 4 AN network concept set constructed under the network formal context in example 2

对象	概念	AN 概念
x_5	C_1	$(\{x_2, x_5\}, (\{x_1, x_3, x_8\}, \{a_3, a_4, a_6\}))$
x_6	C_2	$(\{x_0, x_4, x_6, x_9\}, (\{x_1, x_7\}, \{a_0, a_2, a_5, a_7\}))$
x_7	C_3	$(\{x_0, x_7, x_9\}, (\{x_2, x_4, x_6\}, \{a_0, a_2, a_3, a_5\}))$
x_3	C_4	$(\{x_1, x_3, x_8\}, (\{x_2, x_4, x_5\}, \{a_0, a_2, a_4, a_6, a_7\}))$

基于表4中概念集的推荐是以对象 x_3 为例, 待推荐属性是 $\{a_2, a_3, a_5\}$, x_3 出现在 C_4 的外延和 C_1 的邻接内涵中。 x_3 在 C_4 时, 表5为在 C_4 中的推荐过程, 计算出待推荐属性分别在 C_4 外延和邻接内涵中的推荐置信度。 $R_{Er}(a_2, X(C_4)) = 1 > \beta_1$, 所以 a_2 被推荐; $R_{Er}(a_3, X(C_4)) = 0 < \beta_1$, $R_{Ar}(a_3, D(C_4)) = 0.66 > \beta_2$, 所以 a_3

被推荐; $R_{Er}(a_5, X(C_4)) = 0.5 < \beta_1$ 且 $R_{Ar}(a_5, D(C_4)) = 0.33 < \beta_2$ 。所以 a_5 不被推荐。 x_3 在 C_1 时,若待推荐属性在 C_1 的内涵属性中,就可以被推荐。 x_3 的待推荐属性中只有 $a_3 \in B(C_1)$,所以只有 a_3 被推荐。

表 5 对象 x_3 在概念 C_4 中的推荐过程
Table 5 The recommendation process of x_3 in C_4

待推荐属性	推荐置信度		结果
	$R_{Er}(a, X(C_4))$	$R_{Ar}(a, D(C_4))$	
a_2	$1(>\beta_1)$	$0.66(>\beta_2)$	推荐
a_3	$0(<\beta_1)$	$0.66(>\beta_2)$	推荐
a_5	$0.5(<\beta_1)$	$0.33(<\beta_2)$	不推荐

在 C_4 中,被推荐属性有 a_2 和 a_3 ,在 C_1 中,被推荐的属性只有 a_3 ,所以 a_3 被推荐 2 次,大于 θ 。因此最终将属性 a_3 推荐给对象 x_3 。

4 实验与分析

4.1 数据集

为了验证本文算法的有效性,实验使用了 11 个真实数据集,其中包括完整数据集 MovieLens-100k、MovieLens-1m、Filmtrust 以及从 MovieLens-1m、Jester、Eachmovie 抽样的 8 个数据集。表 6 为数据集的详细信息。表中的稀疏度定义为评分数量/(对象数×属性数)。

表 6 数据集信息
Table 6 Datasets information

数据集	对象数	属性数	稀疏度
MovieLens-100k	943	1 682	0.063 0
MovieLens-1m	6 040	3 952	0.041 9
Filmtrust	1 508	2 071	0.011 4
ml-10m-s	3 660	1 100	0.214 1
jester-s	10 000	140	0.248 6
Eachmovie-2k	2 000	1 648	0.011 4
Eachmovie-3k	3 000	1 648	0.011 7
ML-1m-1	2 000	1 000	0.042 4
ML-1m-2	2 000	1 000	0.050 8
ML-1m-3	2 000	1 000	0.052 6
ML-1m-4	2 000	1 000	0.057 2

在后续的实验,利用对象之间的属性相似度来确定对象之间是否存在边相连,从而构建对象间的网络结构,以此获得网络形式背景。

4.2 评价指标

本文用以下 3 个评价指标来评估推荐结果,分别是准确率 $P_{precision}$ 、召回率 R_{recall} 和 $F1$ 。设 $L(O)$ 为算法生成的对象推荐矩阵,而 $T(O)$ 为验证推荐结果的测试矩阵。

准确率表示正确推荐的数量占推荐总数的比例,定义为

$$P_{precision} = \frac{|L(O) \cap T(O)|}{|L(O)|} \quad (7)$$

召回率表示正确推荐的数量占测试集中总数的比例,定义为

$$R_{recall} = \frac{|L(O) \cap T(O)|}{|T(O)|} \quad (8)$$

$F1$ 综合了准确率和召回率,定义为

$$F1 = \frac{2P_{precision}R_{recall}}{P_{precision} + R_{recall}} \quad (9)$$

4.3 推荐策略分析

AN 概念由外延对象、邻接内涵对象和内涵属性构成,在推荐应用时,考虑到外延对象和邻接内涵对象的不同特点,采用了不同的推荐策略。对于外延对象,采用传统的方式,即通过相邻对象的偏好进行推荐。对于邻接内涵对象,本文设计了一种新的方法,即利用概念中的内涵属性进行推荐。这一方法解决了传统的形式概念忽略使用概念中内涵的不足的问题。

为了验证新方法是否可行,设计实验进行验证。在实验中,使用 ANSR 和 ANSR-分别表示对邻接内涵对象进行推荐和不推荐。从 MovieLens-1m 数据集中随机抽样了 4 个 $2\,000 \times 1\,000$ 的数据集,分别记录为 ML-1m-1 到 ML-1m-4。在实验过程中,将数据集按照 8:2 的比例划分训练集和测试集,并采用 3 个评价指标进行测量。图 1 为 ANSR 和 ANSR-在 3 个指标和 2 种算法下的推荐效果。

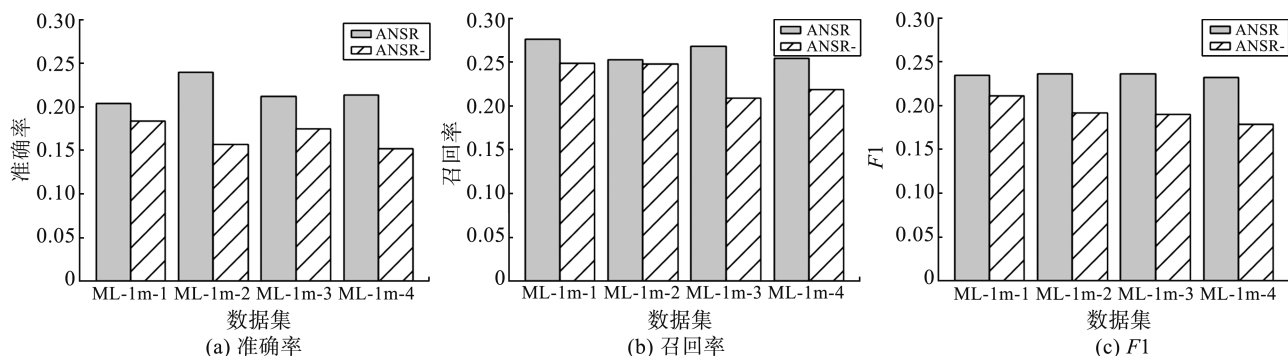


图 1 3 个指标下 ANSR 和 ANSR-的对比

Fig.1 Comparison between ANSR and ANSR-under three different indicators

实验结果表明,在 4 个抽样数据集下,ANSR 的推荐效果在 3 个指标下都高于 ANSR-。说明对邻接内涵对象进行推荐可以提高算法效率。

4.4 参数分析

本文算法中有 3 个重要的参数,分别是内涵属性阈值 α ,外延推荐置信度阈值 β_1 ,推荐频数阈值 θ 。为了分析它们对算法的影响,继续使用数据集 ML-1m-1 到 ML-1m-4,并将其按照 8:2 的比例划分训练集和测试集进行实验。在整个实验过程中,设置参数的取值范围及步长,并将其他参数设置为理论上的最佳值,以探索这些参数对实验结果的影响。

α 决定了 AN 概念中内涵属性的规模,影响 AN 概念集的生成。因此设计实验来评估 α 对推荐结果的影响。设 $\alpha \in (0, 20]$,步长为 1。实验结果如图 2 所示,在不同的数据集下,随着 α 的增加, F1 先增加然后逐渐下降,并在 $\alpha = 11$ 左右达到最大值。因此,合理设置 α ,可以得到更好的推荐结果。

β_1 决定向对象推荐哪些属性。因此设计实验来评估 β_1 对推荐结果的影响。设 $\beta_1 \in [0, 1]$,步长为 0.05。实验结果如图 3 所示,随着 β_1 的增加, F1 总体先增加后稳定或略有下降的趋势。根据不同的数据集选择 β_1 能改善推荐效果。

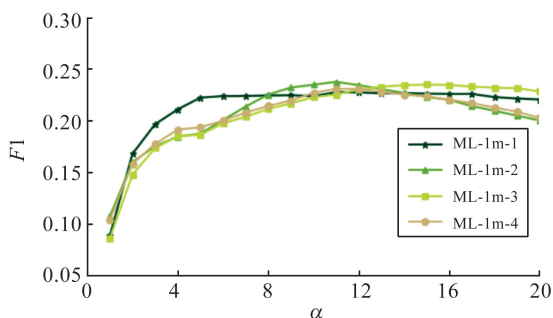


图 2 不同 α 对 ANSR 算法推荐结果的影响

Fig.2 The impact of different α on ANSR algorithm recommendation results

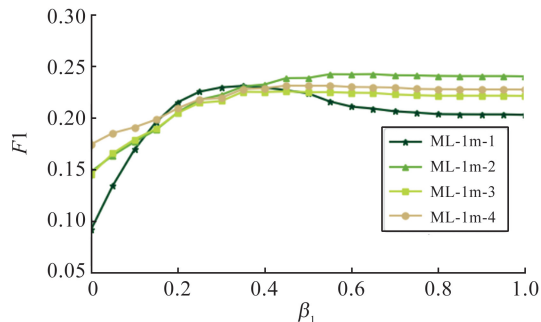


图 3 不同 β_1 对 ANSR 算法推荐结果的影响

Fig.3 The impact of different β_1 on ANSR algorithm recommendation results

θ 用于判断最终的推荐结果的影响。因此设计实验来评估 θ 对推荐结果的影响。设 $\theta \in [0, 20]$,步长为 1。

实验结果如图 4 所示,在不同的数据集上,随着 θ 的增加, $F1$ 先增加后逐渐减少,在 $\theta=5$ 左右达到最大值。

4.5 算法对比

为了验证本文提出的算法,将 ANSR 算法与 k 近邻 (k -nearest neighbor, KNN)、基于物品的协同过滤 (item-based collaborative filtering, IBCF) 算法、基于概念集合的推荐算法 CSBR 和 CSPR、以及结合形式概念分析和 KNN 的算法 GreConD-KNN 进行了比较。其中, KNN 旨在为目标对象寻找 k 个相似对象,然后利用这些相似对象的属性偏好进行推荐。IBCF 则利用属性之间的相似性,根据待推荐对象的历史偏好,将相似的属性推荐给对象。CBSR 是利用概念面积作为启发式信息来构建概念集。利用概念中邻居对象的偏好进行推荐。CSPR 利用模拟退火方法构建概念集,后利用概念进行个性化推荐。

GreConD-KNN^[37] 将形式概念分析与 KNN 相结合,利用形式概念分析进行矩阵分解,将分解的用户因子矩阵作为 KNN 的输入,对用户进行协同推荐。在 KNN、IBCF 和 GreConD-KNN 中,本文使用 Jaccard 距离来计算对象或属性的相似性。

对比实验在 7 个数据集上进行,其中 MovieLens-100k、MovieLens-1m、Filmtrust、Eachmovie-2k 和 Eachmovie-3k 的稀疏度较低,Moivelens-10m-s 和 Jester-s 的稀疏度较高。数据集按照 8:2 的比例划分训练集和测试集。实验中各个指标是通过随机重复划分 5 次训练集和测试集得到的平均值。

表 7—10 为数据集在多个算法下对比实验的结果。ANSR 在数据集 Filmtrust 和 Eachmovie-2k 上具有较高的精确度,在数据集 MovieLens-100k 和 Eachmovie-2k 上也较高的精确度。在召回率方面,ANSR 在多个数据集上具有较低的较高的召回率。ANSR 在数据集 MovieLens-100k、Filmtrust、Eachmovie-2k 和 Eachmovie-3k 上 $F1$ 均达到最高,尤其在 Filmtrust 上表现突出。尽管 ANSR 算法在运行时间上不占优势,但其总体推荐效果明显优于其他算法。通过分析实验结果发现,在稀疏度较低的数据集,ANSR 比其他对比算法推荐效果更好,而在稀疏度较高的数据集上,ANSR 的推荐效果较差。因此 ANSR 更适合于稀疏度较低的数据集。

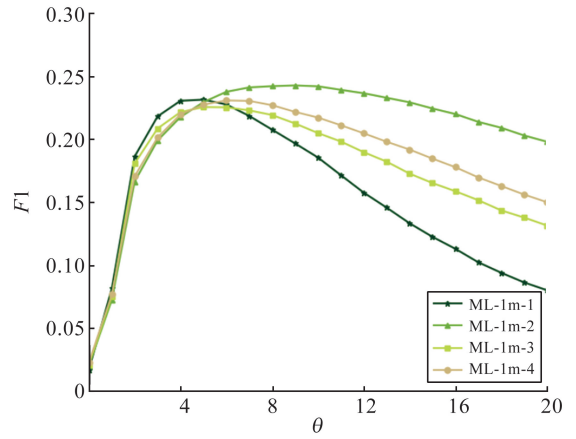


图 4 不同 θ 对 ANSR 算法推荐结果的影响
Fig.4 The impact of different θ on ANSR algorithm recommendation results

表 7 不同数据集下不同算法的准确率

Table 7 Precision of different algorithms on different datasets

数据集	ANSR	KNN ($k=3$)	IBCF	CSBR	CSPR	GreConD-KNN
MovieLens-100k	0.252 6	0.201 5	0.321 3	0.195 7	0.225 6	0.181 3
MovieLens-1m	0.211 6	0.188 4	0.262 2	0.124 3	0.156 1	0.243 9
Filmtrust	0.656 3	0.450 9	0.201 9	0.575 6	0.553 9	0.536 2
ml-10m-s	0.243 4	0.233 8	0.283 5	0.281 1	0.311 5	0.203 2
jester-s	0.628 7	0.740 0	0.698 5	0.552 1	0.597 6	0.261 4
Eachmovie-2k	0.223 1	0.203 6	0.140 9	0.207 4	0.209 4	0.140 7
Eachmovie-3k	0.234 6	0.207 6	0.200 7	0.212 0	0.235 9	0.182 7

表 8 不同数据集下不同算法的召回率

Table 8 Accuracy of different algorithms on different datasets

数据集	ANSR	KNN ($k=3$)	IBCF	CSBR	CSPR	GreConD-KNN
MovieLens-100k	0.279 1	0.345 0	0.190 2	0.283 9	0.274 9	0.238 9
MovieLens-1m	0.235 8	0.338 4	0.280 3	0.323 9	0.204 8	0.233 2
Filmtrust	0.4865	0.436 7	0.363 6	0.464 1	0.548 8	0.514 3
ml-10m-s	0.348 5	0.475 7	0.443 9	0.268 2	0.331 4	0.235 9
jester-s	0.570 1	0.636 0	0.721 1	0.549 5	0.587 3	0.272 1
Eachmovie-2k	0.274 1	0.276 4	0.229 7	0.260 8	0.252 4	0.152 0
Eachmovie-3k	0.277 1	0.277 5	0.283 7	0.269 8	0.234 9	0.197 0

表9 不同数据集下不同算法的 $F1$
Table 9 $F1$ of different algorithms on different datasets

数据集	ANSR	KNN($k=3$)	IBCF	CSBR	CSPR	GreConD-KNN
MovieLens-100k	0.265 0	0.254 4	0.238 6	0.231 5	0.247 4	0.206 0
MovieLens-1m	0.223 0	0.242 0	0.270 9	0.179 7	0.237 7	0.117 1
Filmtrust	0.557 9	0.443 7	0.259 3	0.513 0	0.543 7	0.524 8
ml-10m-s	0.286 6	0.313 5	0.346 0	0.274 4	0.320 7	0.218 3
jester-s	0.596 3	0.684 1	0.709 6	0.549 9	0.583 7	0.265 9
Eachmovie-2k	0.250 0	0.234 4	0.174 6	0.230 9	0.228 6	0.146 0
Eachmovie-3k	0.253 8	0.237 5	0.235 1	0.237 2	0.235 2	0.189 5

表10 不同数据集下不同算法的运行时间
Table 10 Runtime of different algorithms on different datasets

数据集	ANSR	KNN($k=3$)	IBCF	CSBR	CSPR	GreConD-KNN
MovieLens-100k	5 s	2 s	15 s	2 s	1 s	3 s
MovieLens-1m	2 min	4 min	>1 h	20 s	5 s	7 min
Filmtrust	2 s	4 s	42 s	<1 s	<1 s	1 s
ml-10m-s	4 min	1 min	38 s	3 s	3 s	23 s
jester-s	13 s	6 min	2 s	<1 s	14 s	5 min
Eachmovie-2k	3 s	7 s	37 s	<1 s	<1 s	2 s
Eachmovie-3k	6 s	18 s	58 s	<1 s	<1 s	7 s

5 总结与展望

本文在网络形式背景下提出一个新的概念,即 AN 概念,设计了一种启发式构造方法构造 AN 概念集,利用构建好的概念集进行推荐。针对概念中的外延对象和邻接内涵对象,采用了不同的推荐策略。对于邻接内涵对象,利用概念中的内涵属性对其进行推荐,有效提高了推荐效率。这一研究为网络形式背景下的推荐应用提供了一种新的解决方式。例如,在电子商务平台中,通过分析用户之间的邻接关系,能更好地预测对象的购买行为,提供更个性化的商品推荐。在社交媒体中,对象之间的互动关系可以作为邻接关系的基础,从而提高内容推荐的精准度。

尽管 AN 概念在推荐过程中有优势,但是也存在着一些问题:由于本文构造概念时引入对象之间的邻接关系,导致算法的时间复杂度增加,因此在处理大规模数据集时,未来可以参考刘文星等^[38]提出的网络社区划分方法,将网络划分为子网络,再由子网络生成 AN 概念集进行推荐。对象行为和兴趣具有动态性,未来研究可以结合 Yan 等^[27]关于网络 OE 概念动态更新的思路,对网络形式背景和 AN 概念进行实时更新,以确保推荐的时效性和准确性。本文基于网络形式背景的研究仅考虑了对象之间的一阶邻接,未来研究可以探讨对象之间多阶邻接,以更全面地捕捉对象之间的关联性。

参考文献:

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts[C] // Ordered Sets. Berlin: Springer, 1982:445-470.
- [2] LI Jinhai, HUANG Chenchen, QI Jianjun, et al. Three-way cognitive concept learning via multi-granularity[J]. Information Sciences, 2017, 378:244-263.
- [3] DE MAIO C, FENZA G, GALLO M, et al. Toward reliable machine learning with congruity: a quality measure based on formal concept analysis[J]. Neural Computing and Applications, 2023, 35(2):1899-1913.
- [4] PAK C H, KIM J H, JONG M G. Describing hierarchy of concept lattice by using matrix[J]. Information Sciences, 2021, 542:58-70.
- [5] HASSAN B A, RASHID T A, MIRJALILI S. Formal context reduction in deriving concept hierarchies from corpora using adaptive evolutionary clustering algorithm star[J]. Complex & Intelligent Systems, 2021, 7(5):2383-2398.
- [6] HU Qian, YUAN Zhong, Qin Keyun, et al. A novel outlier detection approach based on formal concept analysis[J].

- Knowledge-Based Systems, 2023, 268:110486.
- [7] PAN Lizheng, WANG Shunchao, YIN Zeming. Recognition of human inner emotion based on two-stage FCA-relieff feature optimization[J]. Information Technology and Control, 2022, 51(1):32-47.
- [8] MASICH I, REZOVA N, SHKABERINA G, et al. Subgroup discovery in machine learning problems with formal concepts analysis and test theory algorithms[J]. Algorithms, 2023, 16(5):246.
- [9] WEI Ling, QI Jianjun, ZHANG Wenxiu, et al. Concept reduction and concept characteristics in formal concept analysis[J]. Scientia Sinica Informationis, 2020, 50(12):1817-1833.
- [10] YANG Zheng, ZGANG Xi, DU Xianghua, et al. Dynamic knowledge discovery under the linguistic concept weighted network formal context based on three-way decision[C]//18th International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering, New Jersey: IEEE, 2023:465-470.
- [11] LI Jinhai, MEI Changlin, LV Yuejin. Incomplete decision contexts: approximate concept construction, rule acquisition and knowledge reduction[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(1):149-165.
- [12] ZHI Huilai, LI Jinhai. Granule description based knowledge discovery from incomplete formal contexts via necessary attribute analysis[J]. Information Sciences, 2019, 485:347-361.
- [13] ZHI Huilai, LI Jinhai, LI Yanan. Multilevel conflict analysis based on fuzzy formal contexts[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(12):5128-5142.
- [14] BENITEZ-CABALLERO M J, MEDINA J, RAMIREZ-POUSSA E, et al. Rough-set-driven approach for attribute reduction in fuzzy formal concept analysis[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 391:117-138.
- [15] 刘忠慧,姜帅,闵帆. 模糊概念集的启发式构造方法及其推荐应用[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(3):14-26.
LIU Zhonghui, JIANG Shuai, MIN Fan. Heuristic construction method of fuzzy concept set and its recommended application [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2024, 59(3):14-26.
- [16] XU Weihua, LI Wentao. Granular computing approach to two-way learning based on formal concept analysis in fuzzy datasets [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2014, 46(2):366-379.
- [17] LI Jinhai, MEI Chenglin, XU Weihua, et al. Concept learning via granular computing: a cognitive viewpoint[J]. Information Sciences, 2015, 298:447-467.
- [18] ZHI Huilai, LI Jinhai. Granule description of incomplete data: a cognitive viewpoint[J]. Cognitive Computation, 2022, 14(6):2108-2119.
- [19] WEI Ling, QI Jianjun. Relation between concept lattice reduction and rough set reduction[J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23(8):934-938.
- [20] 于洪,王国胤,姚一豫. 决策粗糙集理论研究现状与展望[J]. 计算机学报,2015,38(8):1628-1639.
YU Hong, WANG Guoyin, YAO Yiyu. Current research and future perspectives on decision-theoretic rough sets[J]. Chinese Journal of Computers, 2015, 38(8):1628-1639.
- [21] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Granular computing and data mining for ordered data: the dominance-based rough set approach[M]//Granular, Fuzzy, and Soft Computing. New York: Springer, 2023:117-145.
- [22] YANG Sichun, LU Yuman, JIA Xiuyi, et al. Constructing three-way concept lattice based on the composite of classical lattices[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 121:174-186.
- [23] YAO Yiyu. Three-way granular computing, rough sets, and formal concept analysis[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 116:106-125.
- [24] GUO Doudou, XU Weihua, QIAN Yuhua, et al. Fuzzy-granular concept-cognitive learning via three-way decision: performance evaluation on dynamic knowledge discovery[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2024, 32(3):1409-1423.
- [25] 马娜,范敏,李金海. 复杂网络下的概念认知学习[J]. 南京大学学报(自然科学),2019,55(4):609-623.
MA Na, FAN Min, LI Jinhai. Concept-cognitive learning under complex network[J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2019, 55(4):509-623.
- [26] 范敏,罗杉,李金海. 基于变精度可能算子的网络概念认知[J]. 山东大学学报(理学版),2022,57(8):1-12.
FAN Min, LUO Shan, LI Jinhai. Cognition of network concepts based on variable precision possibility operator[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2022, 57(8):1-12.
- [27] YAN Mengyu, LI Jinhai. Knowledge discovery and updating under the evolution of network formal contexts based on three-way decision[J]. Information Sciences, 2022, 601:18-38.
- [28] FAN Min, LUO Shan, LI Jinhai. Network rule extraction under the network formal context based on three-way decision[J]. Applied Intelligence, 2023, 23:5126-5146.

- [29] ZOU Caifeng, ZHANG Daqiang, WAN Jiafu, et al. Using concept lattice for personalized recommendation system design [J]. IEEE Systems Journal, 2015, 11(1):305-314.
- [30] ZHAO Xuejian, LI Hao, TANG Haotian. Recommendation rating prediction algorithm based on user interest concept lattice reduction[J]. Journal of Computer Applications, 2023, 43(11):3340.
- [31] HUANG Wenqing, HAO Fei, PANG Guangyao. Complementary context-enhanced concept lattice aware personalized recommendation [C] // IEEE 20th International Conference on Trust, Security and Privacy in Computing and Communications (TrustCom), New Jersey: IEEE, 2021:919-926.
- [32] LIU Zhonghui, ZHAO Qi, ZHOU Lu, et al. A heuristic concept construction approach to collaborative recommendation[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2022, 149:116-132.
- [33] 刘忠慧,陈建宇,宋国杰,等. 基于模拟退火法的概念集构造算法[J]. 模式识别与人工智能,2021,34(8):723-732.
LIU Zhonghui, CHEN Jianyu, SONG Guojie, et al. Construction algorithm of concept set based on simulated annealing algorithm[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2021, 34(8):723-732.
- [34] 刘忠慧,李鑫,闵帆. 内涵粗糙三支概念及个性化推荐[J]. 西北大学学报(自然科学版),2022,52(5):774-783.
LIU Zhonghui, LI Xin, MIN Fan. Three-way concept with rough intent and its application in personalized recommendation [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2022, 52(5):774-783.
- [35] 范敏,张洁,李金海. 基于弱概念相似度的组推荐方法[J]. 数据采集与处理,2023,38(2):439-450.
FAN Min, ZHANG Jie, LI Jinhai. Group recommendation method based on weaken-concept similarity[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2023, 38(2):439-450.
- [36] 范敏,郭瑞欣,李金海. 网络决策形式背景下基于因果力的邻域推荐算法[J]. 模式识别与人工智能,2022,35(11):977-988.
FAN Min, GUO Ruixin, LI Jinhai. Neighborhood recommendation algorithm based on causality force under network formal decision context[J]. Pattern recognition and Artificial Intelligence, 2022, 35(11):977-988.
- [37] BELOHLAVEK R, VYCHODIL V. Discovery of optimal factors in binary data via a novel method of matrix decomposition [J]. Journal of Computer and System Sciences, 2010, 76(1):3-20.
- [38] 刘文星,范敏,李金海. 网络形式背景下的社区划分方法研究[J]. 计算机科学与探索,2021,15(8):1441-1449.
LIU Wenxing, FAN Min, LI Jinhai. Research on community division method under network formal context[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2021, 15(8):1441-1449.

(编辑:陈丽萍)

(上接第55页)

- [14] 程传良,纪志坚,董洁,等. 有向树图下的多智能体系统能控性分析[J]. 青岛大学学报(工程技术版),2016,31(2):7-13.
CHENG Chuanling, JI Zhijian, DONG Jie, et al. Energy controllability analysis of multi-agent system under directed tree diagram[J]. Journal of Qingdao University(Engineering Technology Edition), 2016, 31(2):7-13.
- [15] 熊宇峰,周刚,陈颖,等. 基于树形贝叶斯网络的配电网快速灾情推断[J]. 电网技术,2020,44(6):2222-2228.
XIONG Yufeng, ZHOU Gang, CHEN Ying, et al. Rapid disaster inference of distribution network based on tree Bayesian network[J]. Power System Technology, 2020, 44(6):2222-2228.
- [16] 刘纘武. 应用图论[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2006.
LIU Yuwu. Application graph theory[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2006.

(编辑:陈丽萍)