山东大学学报(理学版)2025 年 7 月 第 60 卷 第 7 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.7, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)07-0116-15 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.7.2024.122

基于 FT-粗糙集构建知识结构与寻找学习路径方法

周缪娟[1],黄韩亮[1,2]*,张纪平[3],李进金[1,3]
(1.闽南师范大学数学与统计学院, 福建 漳州 363000; 2.福建省粒计算及其应用重点实验室, 福建 漳州 363000; 3.泉州师范学院数学与计算机科学学院, 福建 泉州 362000)

摘要:提出 FT-粗糙集下构建知识结构的方法,讨论如何对学习者进行技能评估和学习路径选择。在模糊近似空间中,利用 FT-粗糙集的上逆和下逆模型构建知识结构并研究了知识结构的性质。在已知学习者的知识状态的情形下对学习者的技能的掌握情况进行评估,并给出学习路径图及其算法,通过教学实例说明算法的有效性和可行性。

关键词:知识空间理论;FT-粗糙集;知识结构;技能评估;学习路径

中图分类号:TP182 **文献标志码**:A

引用格式:周缪娟,黄韩亮,张纪平,等.基于 FT-粗糙集构建知识结构与寻找学习路径方法[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(7):116-130.

Method for constructing knowledge structures and finding learning paths based on FT-rough set

ZHOU Miaojuan[1], HUANG Hanliang[1,2]*, ZHANG Jiping[3], LI Jinjin[1,3]
(1. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, Fujian, China; 2. Fujian Key Laboratory of Granular Computing and Applications, Zhangzhou 363000, Fujian, China; 3. School of Mathematics and Computer Science, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, Fujian, China)

Abstract: The method of constructing knowledge structures under FT-rough set is proposed, and how to evaluate learners' skills and select learning paths is discussed. In fuzzy approximation space, knowledge structures are constructed using the upper and lower inverse models of FT-rough set, and their properties are studied. The mastery of learners' skills is evaluated under the condition that their knowledge state is known, and learning paths diagram and its algorithm are provided. The effectiveness and feasibilities of the proposed algorithm are verified by teaching examples.

Key words: knowledge space theory; FT-rough set; knowledge structures; skill assessment; learning path

0 引言

知识空间理论[1](knowledge space theory, KST)是一种数学心理模型[2-4],它的基本思想是通过分析个体对不同水平的一系列有关问题的解答情况来确定个体在不同知识中的认知水平,该理论广泛应用于教育等领域[5-8]。

在 KST 中,知识结构是对学习者进行评估和学习指导的重要工具,如何准确地构建知识结构是 KST 的研究热点。Falmagne 等[9]研究基于专家问询生成知识空间的方法,然而,这种方法仅考虑领域专家的知识和经验,忽视不同学习者可能具有不同的潜在认知能力。Schrepp[10]从大数据中构造关于项目集的推测关系,并用于构建知识结构,但获取大量且适用的数据是较为困难的。为更准确地构建知识结构,Doignon[11]将技能引入 KST 中,通过技能映射建立问题与技能之间的对应关系,并从技能映射获取知识结构。在实际

收稿日期:2024-05-14; **网络出版时间**:2024-11-26 10:14:26

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12271191, 11871259);福建省自然科学基金资助项目(2023J01122, 2023J01125, 2023J05175, 2022J01306, 2022J05169, 2021J01984);福建省 2022 本科高校教育教学研究项目(FBJG20220091)

第一作者:周缪娟(2001—),女,硕士研究生,研究方向为粗糙集与知识空间理论. E-mail:zhou.2001@qq.com

* **通信作者**:黄韩亮(1980—),男,教授,硕士生导师,博士,研究方向为模糊集理论及其应用. E-mail:huanghl@mnnu.edu.cn

教育背景中,学习者在学习过程对技能的掌握程度会有所差异,并且解决不同的问题对技能掌握的要求也有所不同。基于此,Sun 等[12]提出模糊技能的概念,并给出模糊技能映射下构建知识结构的方法。

学习路径是自适应学习的一个重要研究课题,它能够有效地指导学习者学习,并进行个性化学习推荐。KST 是寻找学习路径的有力工具。Heller 等[13]利用 KST 获取能力状态并寻找学习路径的方法。何秋红等[14]应用 KST 对国际大学生程序设计竞赛的学习路径算法进行研究,并设计贪心算法 MaxPath 实现竞赛的 3 种学习路径。陈东晓等[15]通过 KST 来构建学习者在微积分测试中展示的知识结构和学习路径,以此研究微积分学前辅导对成绩的影响。

近年来,学者们将 KST 与其他学科建立了紧密的联系。例如,对于形式背景和 KST,Rusch 等[16]首次将形式背景和 KST 相结合,研究由形式背景构建知识结构的方法。认知诊断理论和 KST 密切相关[17-18],Heller 等[19]将两者相结合,扩展了 KST 的应用范围。目前,将 KST 与不同学科的结合已成为研究的焦点之一。

粗糙集理论[20](rough set theory, RST)是一种用于分析对象的模糊和不精确描述的数学工具,该理论在数据挖掘、机器学习、知识发现、知识空间等领域得到广泛的应用。Düntsch 等[21]讨论 KST 和 RST 的联系。Yao 等[22]和王国胤等[23]在同一框架中探究 KST 和 RST,利用 RST 中的近似思想构造知识结构。Liu[24]利用双论域粗糙集对技能映射下构造的知识结构进行等价刻画。高纯等[25]借助粗糙集属性约简的思想,得到寻找极小技能集的方法。杨桃丽等[26]结合变精度粗糙集模型的思想,介绍技能包含度的概念,并提出构造知识结构的两种变精度模型。Xu 等[27]在此基础上提出模糊技能包含度的概念,研究基于模糊能力的基本局部独立模型,考虑其不可辨识性。将 RST 应用到 KST 中,可解决 KST 中的一些重要问题,如知识结构的构建,极小技能集等问题。

T-粗糙集模型[28]是相容关系下的双论域粗糙集模型,它是 Pawlak 粗糙集模型的重要推广形式之一,由于 T-粗糙集中的对象集和属性集是分明的,而在实际生活中,对象集和属性集是模糊的现象更为普遍,例如问题的分层,技能熟练度等问题。张纪平等[29]将 T-粗糙集推广为 FT-粗糙集,FT-粗糙集的基本思想为基于对象集和属性集的模糊二元关系建立模糊集值映射,研究模糊属性集的上逆和下逆,从而得到分明的对象集。若将对象集视为问题集,属性集视为技能集,则 FT-粗糙集可应用于构建知识结构与寻找学习路径,拓宽了 T-粗糙集的应用范围,同时,T-粗糙集的上逆和下逆也可用于构建知识结构。基于以上分析,本文利用粗糙集可构造知识结构这一特点,在模糊近似空间下,研究由 FT-粗糙集的下逆模型和上逆模型构造知识结构的方法,并研究其性质。其次,评估学习者对技能的掌握情况,以此给出适合学习者个性化情况的学习路径图及其算法,通过教学实例说明算法的可行性和有效性。

1　预备知识

设 S 是非空有限集合,$\mathscr{F}(S)=\{Y|Y:S\to[0,1]\}$ 表示 S 上所有模糊集构成的集族,记 $Y:S\to[0,1]$ 为 $Y=\left\{\dfrac{Y(s)}{s}\mid s\in S\right\}$。当 $Y(s)=0$ 时,可省略不写。

$\mathscr{F}(S)$ 上的相等关系、包含关系以及并、交规定运算[30],$\forall Y_1,Y_2\in\mathscr{F}(S)$,有

(1) $Y_1=Y_2\Leftrightarrow Y_1(s)=Y_2(s)$, $\forall s\in S$;

(2) $Y_1\subseteq Y_2\Leftrightarrow Y_1(s)\leqslant Y_2(s)$, $\forall s\in S$;

(3) $(Y_1\cup Y_2)(s)\Leftrightarrow Y_1(s)\vee Y_2(s)$, $\forall s\in S$;

(4) $(Y_1\cap Y_2)(s)\Leftrightarrow Y_1(s)\wedge Y_2(s)$, $\forall s\in S$。

定义 1[29]　设 Q 和 S 是两个非空有限集合,若对 $\forall q\in Q$,都有 S 上的一个非空模糊集与之对应,并记此模糊集为 $T(q)$,则 $T:Q\to\mathscr{F}(S)\setminus\{\varnothing\}$ 称为模糊集值映射。

注 1　为行文方便,$T(q)$ 简记为 T_q,模糊集值映射 T 可表示 Q 到 S 上的一个模糊关系。

定义 2[29]　设 Q 和 S 是两个非空有限集合,$T:Q\to\mathscr{F}(S)\setminus\{\varnothing\}$ 是模糊集值映射,称 (Q,S,T) 为模糊近似空间,对 $Y\in\mathscr{F}(S)$,Y 的上逆 $T^+(Y)$ 和下逆 $T^{-1}(Y)$ 分别定义为

$$T^+(Y)=\{q\in Q|\forall s\in S,\ T_q(s)\leqslant Y(s)\},\quad T^{-1}(Y)=\{q\in Q|\exists s\in S,\ 0<T_q(s)\leqslant Y(s)\}。$$

称序对($T^{+}(Y)$, $T^{-1}(Y)$)为 FT-粗糙集。

注 2 定义 2 所定义的模糊近似空间与文献[31]定义的模糊近似空间的不同之处在于用模糊集值映射表示 2 个集合间的模糊关系,并且不含空集,其定义符合知识空间理论的应用背景,将 Q 视为问题集,S 视为技能集,对 $\forall q\in Q$, $T_q\neq\varnothing$ 表示解决任何问题都要先掌握与该问题相关的模糊技能集。

命题 1[29] 设(Q,S,T)是模糊近似空间,$\forall Y_1$, $Y_2\in\mathscr{F}(S)$,有

(1) $T^{+}(Y_1)\subseteq T^{-1}(Y_1)$;

(2) $T^{-1}(S)=T^{+}(S)=Q$;

(3) $T^{-1}(\varnothing)=T^{+}(\varnothing)=\varnothing$;

(4) $T^{+}(Y_1\cap Y_2)=T^{+}(Y_1)\cap T^{+}(Y_2)$;

(5) $T^{+}(Y_1)\cup T^{+}(Y_2)\subseteq T^{+}(Y_1\cup Y_2)$;

(6) $T^{-1}(Y_1\cap Y_2)\subseteq T^{-1}(Y_1)\cap T^{-1}(Y_2)$;

(7) $T^{-1}(Y_1\cup Y_2)=T^{-1}(Y_1)\cup T^{-1}(Y_2)$;

(8) 如果 $Y_1\subseteq Y_2$,则 $T^{+}(Y_1)\subseteq T^{+}(Y_2)$;

(9) 如果 $Y_1\subseteq Y_2$,则 $T^{-1}(Y_1)\subseteq T^{-1}(Y_2)$。

定义 3[1] 设 Q 为非空有限问题集,称学习者在问题集 Q 上能够正确回答的问题子集为该学习者的知识状态,记为 K;若 $\mathscr{K}$ 是由某些知识状态构成的集族,且至少包含$\varnothing$和 Q,则称$(Q,\mathscr{K})$为知识结构。

若给定 Q,直接称 $\mathscr{K}$ 为知识结构。

若 $\mathscr{K}$ 对并运算保持封闭性(即对 $\forall K_1,K_2\in\mathscr{K}$, $K_1\cup K_2\in\mathscr{K}$),则称$(Q,\mathscr{K})$为知识空间,或直接称 $\mathscr{K}$ 为知识空间;若 $\mathscr{K}$ 对交运算保持封闭性(即对 $\forall K_1,K_2\in\mathscr{K}$, $K_1\cap K_2\in\mathscr{K}$),则称$(Q,\mathscr{K})$为简单闭包空间,或直接称 $\mathscr{K}$ 为简单闭包空间。

定义 4[1] 若 $\mathscr{G}'$是由 $\mathscr{G}$的子集族的并构成的集族,即 $\forall\mathscr{F}\subseteq\mathscr{G}$,有 $\cup\mathscr{F}\in\mathscr{G}'$,则称 $\mathscr{G}'$是 $\mathscr{G}$的张成或 $\mathscr{G}$张成 $\mathscr{G}'$,记作 $\mathscr{G}'=\mathrm{Span}(\mathscr{G})$。

定义 5[32] 设$(Q,\mathscr{K})$为知识结构,称$(Q,\mathscr{K})$是一个学习空间,如果满足如下 2 个条件:

(L1)学习顺畅性。对于 $\forall K$, $L\in\mathscr{K}$,如果 $K\subset L$,则存在有限的知识状态链

$$K=K_0\subset K_1\subset\cdots\subset K_p=L$$

使得$|K_i\backslash K_{i-1}|=1(1\leqslant i\leqslant p)$,其中$K_i\in\mathscr{K}$;

(L2)学习连续性。对于 $\forall K,L\in\mathscr{K}$,如果 $K\subset L$ 且对问题 $q\in Q$,满足 $K+\{q\}\in\mathscr{K}$,则 $L\cup\{q\}\in\mathscr{K}$。

从教育学角度看,条件(L1)表示如果学习者的知识状态是 K,那么学习者可通过每次掌握 $L\backslash K$ 中一个问题,逐渐达到知识状态 L;条件($L2$)表示懂得越多得学生,其学习能力越强。

定义 6[33] 设$(Q,\mathscr{K})$是知识结构,$\forall K\in\mathscr{K}(K\neq Q)$,知识状态为 K 的学习者通过学习后达到紧接着的下一个状态 $K'\in\mathscr{K}(K\subset K')$称为 K 的后继状态。

2 由 FT-粗糙集构建的知识结构

知识空间、简单闭包空间和学习空间都是具有教育意义的特殊知识结构,学习空间是良级知识空间。本章证明知识空间和简单闭包空间可分别由 FT-粗糙集的下逆模型和上逆模型表示,并且讨论这两个知识结构满足对偶性的条件,探讨了 FT-粗糙集的下逆模型和上逆模型分别生成学习空间和良级简单闭包空间的充要条件。

定义 7 设(Q,S,T)是模糊近似空间,对 $Y\in\mathscr{F}(S)$,称

$$T^{-1}(Y)=\{q\in Q\mid\exists s\in S,\ 0<T_q(s)\leqslant Y(s)\}$$

为 Y 通过下逆模型诱导的知识状态,记为 K^{-}。称 $\mathscr{K}^{-}=\{T^{-1}(Y)\mid Y\in\mathscr{F}(S)\}$为$(Q,S,T)$通过下逆模型诱导的知识结构。

定义 8 设(Q,S,T)是模糊近似空间,对 $Y\in\mathscr{F}(S)$,称

$$T^{+}(Y)=\{q\in Q\mid\forall s\in S,\ T_q(s)\leqslant Y(s)\}$$

为 Y 通过上逆模型诱导的知识状态，记为 K^+。称 $\mathscr{K}^+=\{T^+(Y)\mid Y\in\mathscr{F}(S)\}$ 为 (Q,S,T) 通过上逆模型诱导的知识结构。

注 3　取 Y 为 $\mathscr{F}(S)$ 中的不同模糊集，其分别通过下逆模型生成的知识状态 K^- 和上逆模型生成的知识状态 K^+ 可能是相同的。通过一个例子说明注 3。

例 1　设 (Q,S,T) 是模糊近似空间，其中 $Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$，$S=\{s_1,s_2,s_3\}$，T 如表 1 所示。

表 1　例 1 中模糊集值映射 T

Table 1　Fuzzy Set-valued Mapping T in Example 1

T	s_1	s_2	s_3
q_1	0	0.3	0
q_2	0.5	0.6	0.7
q_3	0.5	0.6	0
q_4	0.8	0	0

取 $Y=\left\{\frac{0.3}{s_1},\frac{0.7}{s_2},\frac{0.5}{s_3}\right\}$，$Y$ 通过下(上)逆模型生成知识状态 $K^-=\{q_1,q_2,q_3\}$，$K^+=\{q_1\}$。

取 $Y=\left\{\frac{0.6}{s_1},\frac{0.8}{s_2}\right\}$，$Y$ 通过下(上)逆模型生成知识状态 $K^-=\{q_1,q_2,q_3\}$，$K^+=\{q_1,q_3\}$。

取 $Y=\left\{\frac{0.3}{s_1},\frac{0.5}{s_2},\frac{0.9}{s_3}\right\}$，$Y$ 通过下(上)逆模型生成知识状态 $K^-=\{q_1,q_2\}$，$K^+=\{q_1\}$。

由此，取 $Y=\left\{\frac{0.3}{s_1},\frac{0.7}{s_2},\frac{0.5}{s_3}\right\}$ 和 $Y=\left\{\frac{0.6}{s_1},\frac{0.8}{s_2}\right\}$，$Y$ 通过下逆模型生成的知识状态相同，但通过上逆模型生成的知识状态不同，取 $Y=\left\{\frac{0.3}{s_1},\frac{0.7}{s_2},\frac{0.5}{s_3}\right\}$ 和 $Y=\left\{\frac{0.3}{s_1},\frac{0.5}{s_2},\frac{0.9}{s_3}\right\}$，$Y$ 通过下逆模型生成的知识状态不同，但通过上逆模型生成的知识状态相同。

由于 $\mathscr{F}(S)$ 是无限的，通过遍历每一个模糊集求其通过下(上)逆模型的知识状态，最终得到其下(上)逆模型诱导的知识结构是无法实现的，因此对 $\mathscr{F}(S)$ 进行分类，使其首先变成有限等价类，进而生成知识结构。

记号 1　设 (Q,S,T) 是模糊近似空间，对 $s\in S$，记

$$h_s=|\{T_q(s)\in(0,1]\mid q\in Q\}|\leqslant|Q|,\quad w_i\in\{1,2,3,\cdots,|Q|\},\quad \alpha_i(s)=\begin{cases}0, & i=0\\ T_{q_{w_i}}(s), & 1\leqslant i\leqslant h_s\end{cases}。$$

按隶属度的大小将 $\{T_q(s)\in(0,1]\mid q\in Q\}$ 进行严格的递增排序为

$$0<T_{q_{w_1}}(s)<T_{q_{w_2}}(s)<\cdots<T_{q_{w_{(h_s-1)}}}(s)<T_{q_{w_{h_s}}}(s)\leqslant1,$$

即 $\alpha_0(s)=0<\alpha_1(s)<\alpha_2(s)<\cdots<\alpha_{h_s-1}(s)<\alpha_{h_s}(s)\leqslant1$。

对于 $Y\in\mathscr{F}(S)$，及 $s\in S$，相应存在 $0\leqslant i\leqslant h_s-1$ 使得 $Y(s)\in[\alpha_i(s),\alpha_{i+1}(s))$，或 $i=h_s$，$Y(s)\in[\alpha_{h_s}(s),1]$。

称 $Y(s)\in[\alpha_i(s),\alpha_{i+1}(s))$ 与 $\alpha_i(s)$ 近似，当且仅当满足以下条件：

(1) 若 $0\leqslant i\leqslant h_s-1$，则有 $Y(s)\in[\alpha_i(s),\alpha_{i+1}(s))$；

(2) 若 $i=h_s$，则有 $Y(s)\in[\alpha_{h_s}(s),1]$。

对 $Y,Y'\in\mathscr{F}(S)$，称 Y 和 Y' 等价，即 $Y\sim Y'$，当且仅当对每个 $s\in S$，$Y(s)$ 与 $Y'(s)$ 相应都同某个 $\alpha_i(s)$ 近似，其中 $i\in0,1,2,\cdots,h_s$。

对 $Y\in\mathscr{F}(S)$，记 $[Y]=\{Y'\mid Y\sim Y',Y'\in\mathscr{F}(S)\}$ 和 $\mathscr{F}(S)/\sim=\{[Y]\mid Y\in\mathscr{F}(S)\}$，则 $\mathscr{F}(S)/\sim$ 是有限集，且 $|\mathscr{F}(S)/\sim|=\prod_{s\in S}(h_s+1)$。

由定义 7 和记号 1 可得定理 1。

定理 1　设 (Q,S,T) 是模糊近似空间，对 $[Y]\in\mathscr{F}(S)/\sim$，$[Y]$ 中的任一模糊集 Y' 通过下逆模型生成的知识状态是相同的。

证明　任取 $Y'\in[Y]$，对 $s_j\in S$，$j=1,2,\cdots,|S|$，存在 $0\leqslant i\leqslant h_{s_j}-1$，使得 $Y'(s_j)\in[\alpha_i(s_j),\alpha_{i+1}(s_j))$ 或 $i=h_{s_j}$，$Y'(s_j)\in[\alpha_{h_{s_j}}(s_j),1]$，注意到 $Y\sim Y'$，于是

(ⅰ)若 $Y'(s_j)\in[\alpha_i(s_j),\alpha_{i+1}(s_j))$,则有

$$T^{-1}\left(\left\{\frac{Y'(s_j)}{s_j}\right\}\right)=\{q\in Q\mid Y'(s_j)\geqslant T_q(s_j)>0\}=\{q\in Q\mid \alpha_{i+1}(s_j)>T_q(s_j)>0\}=T^{-1}\left(\left\{\frac{Y(s_j)}{s_j}\right\}\right);$$

(ⅱ)若 $Y'(s_j)\in[\alpha_{h_{s_j}}(s_j),1]$,则有 $T^{-1}\left(\left\{\frac{Y'(s_j)}{s_j}\right\}\right)=\{q\in Q\mid 1\geqslant T_q(s_j)>0\}=T^{-1}\left(\left\{\frac{Y(s_j)}{s_j}\right\}\right)$。

由(ⅰ)、(ⅱ)可得,$T^{-1}(Y')=\bigcup\limits_{s_j\in S}T^{-1}\left(\left\{\frac{Y'(s_j)}{s_j}\right\}\right)=\bigcup\limits_{s_j\in S}T^{-1}\left(\left\{\frac{Y(s_j)}{s_j}\right\}\right)=T^{-1}(Y)$。以上表明$[Y]$中的任一模糊集 Y'通过下逆模型生成的知识状态都为 $T^{-1}(Y)$。

由定义 8 和记号 1 可得定理 2。

定理 2　设(Q,S,T)是模糊近似空间,对$[Y]\in\mathscr{F}(S)/\sim$,$[Y]$中的任一模糊集 Y'通过上逆模型生成的知识状态是相同的。

证明　任取 $Y'\in[Y]$,对$s_j\in S$, $j=1,2,\cdots,|S|$,那么存在$0\leqslant i\leqslant h_{s_j}-1$,使得 $Y'(s_j)\in[\alpha_i(s_j),\alpha_{i+1}(s_j))$或者 $i=h_{s_j}$,$Y'(s_j)\in[\alpha_{h_{s_j}}(s_j),1]$,注意到 $Y\sim Y'$,令 $Y'=\left\{\frac{1}{s_1},\cdots,\frac{1}{s_{j-1}},\frac{Y'(s_j)}{s_j},\cdots,\frac{1}{s_{|S|}}\right\}$, $Y=\left\{\frac{1}{s_1},\cdots,\frac{1}{s_{j-1}},\frac{Y(s_j)}{s_j},\cdots,\frac{1}{s_{|S|}}\right\}$。

(ⅰ) 若 $Y'(s_j)\in[\alpha_i(s_j),\alpha_{i+1}(s_j))$,则有 $T^+(Y')=\{q\in Q\mid Y'(s_j)\geqslant T_q(s_j)\}=\{q\in Q\mid\alpha_{i+1}(s_j)>T_q(s_j)\}=T^+(Y)$;

(ⅱ) 若 $Y'(s_j)\in[\alpha_{h_{s_j}}(s_j),1]$, $T^+(Y')=Q=T^+(Y)$。

由(ⅰ)、(ⅱ)可得 $T^+(Y')=T^+(Y)$。以上表明$[Y]$中的任一模糊集 Y'通过上逆模型生成的知识状态都为 $T^+(Y)$。

例 2　在例 1 中,将$\mathscr{F}(S)$按记号 1 进行分类,得到表 2。由表 2 可求出每个等价类$[Y]$通过下(上)逆模型生成的知识状态,如表 3 所示。

表 2　$\mathscr{F}(S)/\sim$中的所有等价类

Table 2　Equivalence classes in $\mathscr{F}(S)/\sim$

$[Y]$	s_1	s_2	s_3	$[Y]$	s_1	s_2	s_3
$[Y_1]$	[0,0.5)	[0,0.3)	[0,0.7)	$[Y_{10}]$	[0.5,0.8)	[0.3,0.6)	[0.7,1.0]
$[Y_2]$	[0,0.5)	[0,0.3)	[0.7,1.0]	$[Y_{11}]$	[0.5,0.8)	[0.6,1.0]	[0,0.7)
$[Y_3]$	[0,0.5)	[0.3,0.6)	[0,0.7)	$[Y_{12}]$	[0.5,0.8)	[0.6,1.0]	[0.7,1.0]
$[Y_4]$	[0,0.5)	[0.3,0.6)	[0.7,1.0]	$[Y_{13}]$	[0.8,1.0]	[0,0.3)	[0,0.7)
$[Y_5]$	[0,0.5)	[0.6,1.0]	[0,0.7)	$[Y_{14}]$	[0.8,1.0]	[0,0.3)	[0.7,1.0]
$[Y_6]$	[0,0.5)	[0.6,1.0]	[0.7,1.0]	$[Y_{15}]$	[0.8,1.0]	[0.3,0.6)	[0,0.7)
$[Y_7]$	[0.5,0.8)	[0,0.3)	[0,0.7)	$[Y_{16}]$	[0.8,1.0]	[0.3,0.6)	[0.7,1.0]
$[Y_8]$	[0.5,0.8)	[0,0.3)	[0.7,1.0]	$[Y_{17}]$	[0.8,1.0]	[0.6,1.0]	[0,0.7)
$[Y_9]$	[0.5,0.8)	[0.3,0.6)	[0,0.7)	$[Y_{18}]$	[0.8,1.0]	[0.6,1.0]	[0.7,1.0]

表 3　$\mathscr{F}(S)/\sim$中的每个等价类生成的知识状态

Table 3　Fuzzy knowledge states delineated by the equivalence classes of $\mathscr{F}(S)/\sim$

$[Y]$	$[Y_1]$	$[Y_2]$	$[Y_3]$	$[Y_4]$	$[Y_5]$	$[Y_6]$	$[Y_7]$	$[Y_8]$	$[Y_9]$
$T^{-1}(Y)$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1,q_2\}$	$\{q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_2,q_3\}$	$\{q_2,q_3\}$	$\{q_1,q_2,q_3\}$
$T^+(Y)$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_1\}$
	$[Y_{10}]$	$[Y_{11}]$	$[Y_{12}]$	$[Y_{13}]$	$[Y_{14}]$	$[Y_{15}]$	$[Y_{16}]$	$[Y_{17}]$	$[Y_{18}]$
$T^{-1}(Y)$	$\{q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_2,q_3,q_4\}$	$\{q_2,q_3,q_4\}$	Q	Q	Q	Q
$T^+(Y)$	$\{q_1\}$	$\{q_1,q_3\}$	$\{q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\{q_1,q_4\}$	$\{q_1,q_4\}$	$\{q_1,q_3,q_4\}$	Q

由表 3 可得,模糊近似空间(Q,S,T)通过下(上)逆模型诱导的知识结构为

$$\mathscr{K}^-=\{\varnothing,\{q_1\},\{q_2\},\{q_1,q_2\},\{q_2,q_3\},\{q_1,q_2,q_3\},\{q_2,q_3,q_4\},Q\},$$

$$\mathscr{K}^+=\{\varnothing,\{q_1\},\{q_4\},\{q_1,q_3\},\{q_1,q_4\},\{q_1,q_2,q_3\},\{q_1,q_3,q_4\},Q\}。$$

下面,基于记号 1 及定理 1 给出模糊近似空间(Q,S,T)通过下逆模型生成知识结构 $\mathscr{K}^-$ 的算法 1。

算法 1　获取模糊近似空间(Q,S,T)的知识结构 $\mathscr{K}^-$。

输入　模糊近似空间(Q,S,T)。

输出　$\mathscr{K}^-$。

(1) 令 $\mathscr{F}(S)/\sim=\varnothing$, $\mathscr{K}^-=\varnothing$;

(2) 由记号 1 对 $\mathscr{F}(S)$进行分类得到 $\mathscr{F}(S)/\sim=\{[Y]\mid Y\in\mathscr{F}(S)\}$;

(3) 任取$[Y]\in\mathscr{F}(S)/\sim$,由定义 7 计算 $T^{-1}(Y)$;

(4) 若 $T^{-1}(Y)\notin\mathscr{K}^-$,则 $\mathscr{K}^-=\mathscr{K}^-\cup\{T^{-1}(Y)\}$;

(5) 令 $\mathscr{F}(S)/\sim=\mathscr{F}(S)/\sim-\{[Y]\}$,若 $\mathscr{F}(S)/\sim\neq\varnothing$,则转到步骤(3),否则转到步骤(6);

(6) 输出 $\mathscr{K}^-$。

算法 1 的时间复杂度为 $O(|\mathscr{F}(S)|)$。

类似地,基于记号 1 及定理 2 给出模糊近似空间(Q,S,T)通过上逆模型生成知识结构 $\mathscr{K}^+$的算法 2。

算法 2　获取模糊近似空间(Q,S,T)的知识结构 $\mathscr{K}^+$。

输入　模糊近似空间(Q,S,T)。

输出　$\mathscr{K}^+$。

(1)令 $\mathscr{F}(S)/\sim=\varnothing$, $\mathscr{K}^+=\varnothing$;

(2)由记号 1 对 $\mathscr{F}(S)$进行分类得到 $\mathscr{F}(S)/\sim=\{[Y]\mid Y\in\mathscr{F}(S)\}$;

(3) 任取$[Y]\in\mathscr{F}(S)/\sim$,由定义 8 计算 $T^+(Y)$;

(4) 若 $T^+(Y)\notin\mathscr{K}^+$,则 $\mathscr{K}^+=\mathscr{K}^+\cup\{T^+(Y)\}$;

(5) 令 $\mathscr{F}(S)/\sim=\mathscr{F}(S)/\sim-\{[Y]\}$,若 $\mathscr{F}(S)/\sim\neq\varnothing$,则转到步骤(3),否则转到步骤(6);

(6) 输出 $\mathscr{K}^+$。

算法 2 的时间复杂度为 $O(|\mathscr{F}(S)|)$。

由 FT-粗糙集所构建的知识结构的性质、定义 7 和命题 1 可得如下结论。

命题 2　设(Q,S,T)是模糊近似空间,则 $\mathscr{K}^-$是一个知识空间。

证明　因 $\mathscr{K}^-=\{T^{-1}(Y)\mid Y\in\mathscr{F}(S)\}$,由命题 1(2)、(3)知$\varnothing,Q\in\mathscr{K}^-$,由(7)知 $T^{-1}(Y_1\cup Y_2)=T^{-1}(Y_1)\cup T^{-1}(Y_2)$,则 $\mathscr{K}^-$是并封闭的。因此,$\mathscr{K}^-$是一个知识空间。

由定义 8 和命题 1 可得如下结论。

命题 3　设(Q,S,T)是模糊近似空间,则 $\mathscr{K}^+$是一个简单闭包空间。

证明　$\mathscr{K}^+=\{T^+(Y)\mid Y\in\mathscr{F}(S)\}$,由命题 1(2)、(3)知$\varnothing$, $Q\in\mathscr{K}^+$,由(4)知 $T^+(Y_1\cap Y_2)=T^+(Y_1)\cap T^+(Y_2)$,则 $\mathscr{K}^+$是交封闭的。因此 $\mathscr{K}^+$是一个简单闭包空间。

命题 4　设(Q,S,T)是模糊近似空间,若$|\mathscr{F}(S)/\sim|=|2^S|$,则知识空间 $\mathscr{K}^-$与简单闭包空间 $\mathscr{K}^+$对偶,即

$$\mathscr{K}^-=\{K^-\mid Q-K^-\in\mathscr{K}^+\},\quad \mathscr{K}^+=\{K^+\mid Q-K^+\in\mathscr{K}^-\}。$$

证明　对于$K^-\in\mathscr{K}^-$,则$\exists Y\in\mathscr{F}(S)$,使得 $K^-=T^{-1}(Y)=\{q\in Q\mid\exists s\in S,\ 0<T_q(s)\leqslant Y(s)\}$,那么$q'\notin K^-$的充分必要条件是对每个 $s\in S$, $T_{q'}(s)=0$ 或 $0<T_{q'}(s)$,但 $Y(s)<T_{q'}(s)$,由于$|\mathscr{F}(S)/\sim|=|2^S|$,此时$(Q,S,T)$是分明的近似空间,那么 $q'\notin K^-$的充分必要条件是对每个 $s\in S$, $T_{q'}(s)=0$ 或 $0<T_{q'}(s)$,但 $Y(s)=0$, $T_{q'}(s)=1$,于是取 $Y'(s)=1-Y(s)$,则每个 $s\in S$,有 $T_{q'}(s)\leqslant Y'(s)$,从而有$\forall s\in S$, $T_{q'}(s)\leqslant Y'(s)$,这表明 $q'\in T^+(Y')$。

以上表明 $\mathscr{K}^-=\{K^-\mid Q-K^-\in\mathscr{K}^+\}$,且 $\mathscr{K}^+=\{K^+\mid Q-K^+\in\mathscr{K}^-\}$。

命题 4 表明当$|\mathscr{F}(S)/\sim|=|2^S|$时,由 FT-粗糙集的上逆模型与下逆模型下生成的知识结构是对偶的。

在模糊近似空间中(Q,S,T)中,考虑 $\mathscr{K}^-$在什么条件下为学习空间。

记号 2　设(Q,S,T)是模糊近似空间,对 $q\in Q$, $s\in S$, 记 $G_q^s=\{p\in Q\mid 0<T_p(s)\leqslant T_q(s)\}$, $\mathscr{G}(s)=\{G_q^s\mid q\in Q\}$。

引理 1　设(Q,S,T)是模糊近似空间,则 $\mathrm{span}(\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s))=\mathscr{K}^-$。

证明　一方面,由命题 1 知,$\mathrm{span}(\mathscr{G}(s))\subseteq\mathscr{K}^-$;另一方面,对于$K^-\in\mathscr{K}^-$, $\exists Y\in\mathscr{F}(S)$,使得

$$K^-=T^{-1}(Y)=\{q\in Q\mid \exists s\in S,\ 0<T_q(s)\leqslant Y(s)\},$$

记 $Y_{K^-}=\{s\mid \exists q\in Q,\ 0<T_q(s)\leqslant Y(s)\}$,则 $K^-=\bigcup_{q\in K^-}\bigcup_{s\in Y_{K^-}}G_q^s$。若 $q'\in K^-$,则 $\exists s\in S,\ 0<T_{q'}(s)\leqslant Y(s)$,表明 $s\in Y_{K^-}$,且 $q'\in G_{q'}^s$,则 $q'\in\bigcup_{q\in K^-}\bigcup_{s\in Y_{K^-}}G_q^s$,故 $K^-\subseteq\bigcup_{q\in K^-}\bigcup_{s\in Y_{K^-}}G_q^s$;若 $q'\notin K^-$,$\forall s\in S,\ 0<T_{q'}(s)\leqslant Y(s)$ 都不成立,即 $\forall s\in S,\ T_{q'}(s)=0$ 或 $T_{q'}(s)>Y(s)$。注意到对 $q\in K^-$,必有 $T_q(s)\leqslant Y(s)$,因此 $q'\notin\bigcup_{q\in K^-}\bigcup_{s\in Y_{K^-}}G_q^s$,则 $K^-\supseteq\bigcup_{q\in K^-}\bigcup_{s\in Y_{K^-}}G_q^s$,故 $K^-=\bigcup_{q\in K^-}\bigcup_{s\in Y_{K^-}}G_q^s$,因此 $\mathscr{K}^-\subseteq\mathrm{span}(\mathscr{G}(s))$,表明 $\mathrm{span}(\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s))=\mathscr{K}^-$。

引理 1 表明 $\mathscr{K}^-$ 中的任意知识状态 K^- 都可由有限个 $\mathscr{G}(s)$ 的并得到。

定义 9[1] 设集族 $\mathscr{H}$ 是并封闭的,若 $\mathscr{B}$ 是能张成 $\mathscr{H}$ 的最小集族,则称 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{H}$ 的基,即 $\mathrm{span}(\mathscr{B})=\mathscr{H}$。

引理 2[34] $\mathscr{B}$ 是学习空间的基当且仅当 $\forall B\in\mathscr{B},\ |B\setminus\bigcup_{X\in\mathscr{B},\ X\subset B}X|=1$。

定理 3 设(Q,S,T)是模糊近似空间,$\mathscr{K}^-$ 是学习空间当且仅当 $\forall G_q^s\in\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s),\ |G_q^s\setminus\bigcup_{X\in\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s),\ X\subset G_q^s}X|\leqslant 1$。

证明 *充分性*。设 $\mathscr{B}$ 是(Q,S,T)诱导 $\mathscr{K}^-$ 的基。若 $\forall G_q^s\in\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s),\ |G_q^s\setminus\bigcup_{X\in\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s),\ X\subset G_q^s}X|\leqslant 1$,由引理 1 知 $\mathscr{K}^-=\mathrm{span}(\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s))$,则 $\mathscr{B}\subseteq\mathrm{span}(\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s))$,$\forall B\in\mathscr{B}$,有 $|B\setminus\bigcup_{X\in\mathscr{B},\ X\subset B}X|=1$,由引理 2 知,$(Q,S,T)$诱导的 $\mathscr{K}^-$ 是学习空间。

必要性。若 $\mathscr{K}^-$ 是学习空间,则对 $G_q^s\in\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s)$,当 $G_q^s\in\mathscr{B}$ 时,由引理 2 知 $|G_q^s\setminus\bigcup_{X\in\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s),\ X\subset G_q^s}X|=1$;当 $G_q^s\notin\mathscr{B}$ 时,有 $0=|G_q^s\setminus G_q^s|=|G_q^s\setminus\bigcup_{X\in\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s),\ X\subset G_q^s}X|$。

综上 $|G_q^s\setminus\bigcup_{X\in\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s),\ X\subset G_q^s}X|\leqslant 1$。

定理 3 说明 $\mathscr{K}^-$ 是否是学习空间可通过由模糊近似空间(Q,S,T)所确定的 $\mathscr{G}(s)$ 进行判定。

例 3 设(Q,S,T)为模糊近似空间,其中 $Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$, $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$,T 如表 4 所示。

表 4 例 3 中模糊集值映射 T

Table 4 Fuzzy set-valued mapping T in example 3

T	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1	0	0.7	0.2	0.3
q_2	0.5	0	0	0.3
q_3	0.6	0.4	0	0
q_4	0	0	0.9	0

由记号 2 得

$G_{q_2}^{s_1}=\{q_2\}$, $G_{q_3}^{s_1}=\{q_2,q_3\}$, $G_{q_1}^{s_2}=\{q_1,q_3\}$, $G_{q_3}^{s_2}=\{q_3\}$, $G_{q_1}^{s_3}=\{q_1\}$, $G_{q_4}^{s_3}=\{q_1,q_4\}$, $G_{q_1}^{s_4}=G_{q_2}^{s_4}=\{q_1,q_2\}$,则

$\mathscr{G}(s_1)=\{\{q_2\},\{q_2,q_3\}\}$, $\mathscr{G}(s_2)=\{\{q_3\},\{q_1,q_3\}\}$, $\mathscr{G}(s_3)=\{\{q_1\},\{q_1,q_4\}\}$, $\mathscr{G}(s_4)=\{\{q_1,q_2\}\}$。

$$\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s)=\{\{q_1\},\{q_2\},\{q_3\},\{q_1,q_2\},\{q_1,q_4\},\{q_2,q_3\},\{q_1,q_3\}\},$$

经计算,$\forall G_q^s\in\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s),\ |G_q^s\setminus\bigcup_{X\in\bigcup_{s\in S}\mathscr{G}(s),\ X\subset G_q^s}X|\leqslant 1$,由定理 3 可知,在模糊近似空间$(Q,S,T)$下诱导得到知识空间 $\mathscr{K}^-$ 为学习空间。

下面给出由 FT-粗糙集的上逆模型诱导的简单闭包空间 $\mathscr{K}^+$ 具有良级性的条件。

定义 10[35] 设$(Q,\mathscr{K})$是知识结构,若对 $\forall K,\ L\in\mathscr{K}$,存在有限序列 $K=K_0,K_1,K_2,\cdots,K_p=L$,满足 $|K_i\setminus K_{i-1}|=1$,其中 $1\leqslant i\leqslant p$, $p=d(K,L)=|(K\setminus L)\cup(L\setminus K)|$,称$(Q,\mathscr{K})$是良级的。

由定义 5 和定义 10 可知,学习空间是良级知识空间。

定理 4 设(Q,S,T)是模糊近似空间,若 $|\mathscr{F}(S)/\sim|=|2^S|$,则 $\mathscr{K}^-$ 是学习空间当前仅当 $\mathscr{K}^+$ 是良级的。

证明 *必要性*。设 $\mathscr{K}^-$ 是学习空间,由于 $|\mathscr{F}(S)/\sim|=|2^S|$,则由命题 4 可知 $\mathscr{K}^-$ 和 $\mathscr{K}^+$ 是对偶的,则对 $\forall K^+,\ L^+\in\mathscr{K}^+,\ \exists K^-,\ L^-\in\mathscr{K}^-$,满足 $K^-=Q-K^+,\ L^-=Q-K^-$,由于学习空间是良级知识空间,故存在 K^- 到 L^- 的紧路径,即 $K^-=K_0^-,\ K_1^-,K_2^-,\cdots,K_p^-=L^-$,且 $|K_i^-\setminus K_{i-1}^-|=1$,且 $1\leqslant i\leqslant p,\ p=d(K^-,L^-)$,由对偶性可知,

$\exists K_i^+=Q-K_i^-\in\mathscr{K}^+$,因为$|K_i^-\backslash K_{i-1}^-|=1$,不妨设 $K_{i-1}^-\subset K_i^-$,则 $K_i^+\subset K_{i-1}^+$,且$\exists q\in Q$ 使得 $q\in K_i^-$, $q\notin K_{i-1}^-$,故有 $q\in K_{i-1}^+$, $q\notin K_i^+$。若存在$\exists q'\in Q$,满足 $q'\in K_{i-1}^+$, $q'\notin K_i^+$,则 $q'\in Q-K_i^+=K_i^-$, $q'\notin Q-K_{i-1}^+=K_{i-1}^-$,此时有$|K_i^-\backslash K_{i-1}^-|\geqslant 2$,矛盾,故$|K_{i-1}^+\backslash K_i^+|=1$, $1\leqslant i\leqslant p=d(K^+,L^+)$。同理可得 $p=d(K^+,L^+)=d(K^-,L^-)$,故存在由 K^+ 到 L^+ 的紧路径 $K^+=K_0^+,K_1^+,\cdots,K_q^+=L^+$,因此 $\mathscr{K}^+$ 是良级的。充分性证明类似。

因此,当$|\mathscr{F}(S)/\sim|=|2^S|$, $\mathscr{K}^-$是学习空间当前仅当 $\mathscr{K}^+$是良级的结论成立。

3　两类模型下的学习路径选择

本章视 Q 为问题集,S 为与 Q 中问题相关的技能集,模糊集值映射 T 可表示 Q 到 S 上的一个模糊关系,对 $q\in Q$, $s\in S$, $T_q(s)$表示解决问题 q 至少掌握技能 s 的熟练度,若 $T_q(s)=0$,则表明问题 q 的解决与技能 s 无关,$Y\in F(S)$为学习者对技能的掌握情况(能力状态)。由于在实际教学情境中,学习者的能力状态和知识状态(个体在问题域 Q 上能够解决的问题集合)往往不是一一对应的,即掌握了不同技能的学习者可能对问题的回答情况是一样的,这将无法通过学习者对问题的回答情况评估其是否掌握相应的技能。基于此,在模糊近似空间(Q,S,T)下,下面分别在下逆和上逆两种模型中讨论对学习者进行技能评估与寻找学习路径的方法。

3.1　下逆模型下的学习路径选择

从语义上看,下逆模型表示问题的解决存在多种方法,且每种方法的难度可能是不同的,这符合教学中的“一题多解”策略。此时,学习者若至少达到与解决问题相关的其中一个技能的熟练度,则可解决此问题。在这一节中,根据学习者的知识状态对其能力状态进行评估,并据此指导学习者后面技能学习的选择。

记号 3　设(Q,S,T)是模糊近似空间,$K^-\in\mathscr{K}^-$, $A_{K^-}\in\mathscr{F}(S)$, 且对 $s\in S$,当 $K^-\subset Q$ 时,

$$A_{K^-}(s)=\Big(\bigwedge_{q\in Q-K^-,T_q(s)>0}T_q(s)\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{q\in Q-K^-,T_q(s)=0}1\Big);$$

当 $K^-=Q$ 时,对 $s\in S$, $A_{K^-}(s)=1$。

定理 5　设(Q,S,T)是模糊近似空间,若 K^-是学习者 Y 通过下逆模型生成的知识状态,则对 $s\in S$,当 $A_{K^-}(s)=1$ 时,有 $Y(s)\leqslant A_{K^-}(s)$;当 $A_{K^-}(s)<1$ 时,有 $Y(s)<A_{K^-}(s)$。

证明　$\forall s\in S$,当 $A_{K^-}(s)=1$,显然 $Y(s)\leqslant A_{K^-}(s)$;当 $A_{K^-}(s)<1$ 时,若 $Y(s)\geqslant A_{K^-}(s)$,则$\exists q_0\in Q-K^-$, $A_{K^-}(s)=T_{q_0}(s)>0$,且 $0<T_{q_0}(s)\leqslant Y(s)$,则$q_0\in K^-$,与$q_0\in Q-K^-$矛盾。故当 $A_{K^-}(s)<1$, $Y(s)<A_{K^-}(s)$。

由定理 5,易得推论 1。

推论 1　设(Q,S,T)是模糊近似空间,若 K^-是学习者 Y 通过下逆模型生成的知识状态,则 $Y\subset A_{K^-}$。

由上述结论可知,在下逆模型中,由学习者的知识状态 K^-可知其最大能力状态不超过 A_{K^-}。

例 4　在例 1 中,若学习者的知识状态 $K_1^-=\{q_1,q_2\}$,由表 2 可知,其能力状态 $Y\in[Y_4]$,即 $Y(s_1)\in[0,0.5)$、$Y(s_2)\in[0.3,0.6)$、$Y(s_3)\in[0.7,1]$,即学习者 Y 掌握技能 s_1 的熟练程度小于 0.5、掌握技能 s_2 的熟练程度不小于 0.3 且小于 0.6、掌握技能 s_3 的熟练程度为不小于 0.7。若学习者 Y 进一步掌握技能 s_1 的熟练程度为 0.5,则由下逆模型可知,则学习者 Y 可解决问题 q_2、q_3;若学习者 Y 进一步掌握技能 s_2 的熟练程度为 0.6,则学习者可解决问题 q_1、q_2、q_3。因此,当前学习者 Y 的能力状态满足 $Y\subset\left\{\dfrac{0.5}{s_1},\dfrac{0.6}{s_2},\dfrac{1}{s_3}\right\}$,而由记号 3,可知

$$A_{K_1^-}(s_1)=\bigwedge_{q\in\{q_3,q_4\},T_q(s_1)>0}T_q(s_1)=T_{q_3}(s_1)\wedge T_{q_4}(s_1)=0.5,$$

$$A_{K_1^-}(s_2)=\Big(\bigwedge_{q\in\{q_3\},T_q(s_2)>0}T_q(s_2)\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{q\in\{q_4\},T_q(s_2)=0}1\Big)=T_{q_3}(s_2)\wedge 1=0.6,$$

$$A_{K_1^-}(s_3)=\bigwedge_{q\in\{q_3,q_4\},T_q(s_3)=0}1=1,\text{因此 }A_{K_1^-}=\left\{\frac{0.5}{s_1},\frac{0.6}{s_2},\frac{1}{s_3}\right\}。\text{即 }Y\subset A_{K_1^-}。$$

记号 4　设(Q,S,T)是模糊近似空间,对 K_1^-, $K_2^-\in\mathscr{K}^-$, 且 K_2^- 是 K_1^- 的后继状态,记

$$W=\{s\in S|A_{K_2^-}(s)>A_{K_1^-}(s)\},\qquad E=\left\{\left\{\frac{A_{K_1^-}(s)}{s}\right\}|s\in W\right\}。$$

明显地, $E\in 2^{\mathscr{F}(S)}$。

定理 6 设(Q,S,T)是模糊近似空间,知识状态为 K_1^- 的学习者进一步学习并掌握 E 中的任一模糊技能集可达到其后继状态 K_2^-。

证明 若$\exists s'\in W$, $\exists q'\in K_2^- - K_1^-$, $q'\notin T^{-1}\left(\left\{\dfrac{A_{K_1^-}(s')}{s'}\right\}\right)$,则有

(ⅰ)由于 $q'\in K_2^-$,则$\exists Y\in\mathscr{F}(S)$, $T^{-1}(Y)=K_2^-$,且$\exists s'\in W$, $0<T_{q'}(s')\leqslant Y(s')$;

(ⅱ)由定理 5 知,$\forall s'\in W$, $Y(s')\leqslant A_{K_2^-}(s')$;

(ⅲ)由于 $q'\notin K_1^-$,则有 $q'\in Q-K_1^-$,由记号 3,$\forall s'\in W$, $T_{q'}(s')\geqslant A_{K_1^-}(s')=\bigwedge\limits_{q\in Q-K_1^-}T_q(s')$。由(ⅰ)、(ⅱ)得$\exists s'\in W$, $0<T_{q'}(s')\leqslant A_{K_2^-}(s')$,又结合(ⅲ)可知$\exists s'\in W$, $A_{K_2^-}(s')\leqslant A_{K_1^-}(s')$,这与定理 6 中的条件 $A_{K_1^-}(s')<A_{K_2^-}(s')$矛盾,因此,$\forall s\in W$, $\forall q\in K_2^- - K_1^-$, $q\in T^{-1}\left(\left\{\dfrac{A_{K_1^-}(s)}{s}\right\}\right)$。这表明知识状态为 K_1^- 的学习者进一步学习并掌握 E 中的任一模糊技能集可达到其后继状态 K_2^-。

例 5 在例 2 中,知识状态 $K_1^-=\{q_1,q_2\}$的后继状态为 $K_2^-=\{q_1,q_2,q_3\}$,则 $A_{K_1^-}=\left\{\dfrac{0.5}{s_1},\dfrac{0.6}{s_2},\dfrac{1}{s_3}\right\}$, $A_{K_2^-}=\left\{\dfrac{0.8}{s_1},\dfrac{1}{s_2},\dfrac{1}{s_3}\right\}$,则 $A_{K_2^-}(s_1)>A_{K_1^-}(s_1)$, $A_{K_2^-}(s_2)>A_{K_1^-}(s_2)$,由记号 4,$W=\{s_1,s_2\}$, $E=\left\{\left\{\dfrac{0.5}{s_1}\right\},\left\{\dfrac{0.6}{s_2}\right\}\right\}$,由定理 6 得,知识状态为 K_1^- 的学习者学习模糊技能集$\left\{\dfrac{0.5}{s_1}\right\}$或$\left\{\dfrac{0.6}{s_2}\right\}$,即学习者对技能 s_1 的掌握熟练度为 0.5 或对技能 s_2 的掌握熟练度为 0.6 时,此时有 $K_2^-=K_1^-\cup\left(\left\{\dfrac{A_{K_1^-}(s_1)}{s_1}\right\}\right)=K_1^-\cup\left(\left\{\dfrac{A_{K_1^-}(s_2)}{s_2}\right\}\right)$。

这说明知识状态为 $K_1^-=\{q_1,q_2\}$的学习者进一步学习并掌握 E 中的任一模糊技能集后可达到后继状态 $K_2^-=\{q_1,q_2,q_3\}$。

基于定理 5、6,给定模糊近似空间(Q,S,T),在下逆模型中,对$K^-\in\mathscr{K}^-$,寻找$K^-\in\mathscr{K}^-$的所有后继状态以及学习并掌握的模糊技能集,从而得到学习路径。

下面将基于模糊近似空间(Q,S,T),给出下逆模型的学习路径图算法。

算法 3 基于模糊近似空间(Q,S,T),获取关于下逆模型的学习路径图。

输入 模糊近似空间(Q,S,T)。

输出 学习路径图 G。

(1) 给定一个空图 G;

(2) $\partial\leftarrow\varnothing$, $\rho\leftarrow\varnothing$,其中$\partial$表示 G 中所有边的集合,ρ 表示 G 中的所有学习路径,$A\leftarrow\varnothing$, $W\leftarrow\varnothing$, $E\leftarrow\varnothing$;

(3) 由算法 1 计算$\mathscr{K}^-$;

(4) 根据$\subseteq$关系对 $\mathscr{K}^-$上的知识状态进行排序;

(5) for $i=1$ to $|\mathscr{K}^-|$ do

(6) $\quad A(i)\leftarrow A_{\mathscr{K}^-(i)}$;

(7) end for

(8) for $i=1$ to $|\mathscr{K}^-|-1$ do

(9) $\quad$ for $j=i+1$ to $|\mathscr{K}^-|$ do

(10) $\quad\quad$ if $\mathscr{K}^-(j)$是 $\mathscr{K}^-(i)$的后继状态 then

(11) $\quad\quad\quad W=\{s\in S|A(j)(s)>A(i)(s)\}$;

(12) $\quad\quad\quad E=\left\{\left\{\dfrac{A(i)(s)}{s}\right\}\ \middle|\ s\in W\right\}$;

(13) $\quad\quad\quad \rho\leftarrow\rho\cup(\mathscr{K}^-(i),\mathscr{K}^-(j))$,其中$(\mathscr{K}^-(i),\mathscr{K}^-(j))$是由 $\mathscr{K}^-(i)$指向 $\mathscr{K}^-(j)$的边,边$(\mathscr{K}^-(i),\mathscr{K}^-(j))$的标记为 E;

(14) $\quad\quad$ end if

(15)　end for

(16) end for

(17) 根据∂找出学习路径,画出学习路径图 G。

算法 3 的时间复杂度为 $O(|\mathscr{F}(S)|+|\mathscr{K}^{-}|^{2})$。

例 6　在例 1 中,获得模糊近似空间(Q,S,T)关于下逆模型的学习路径图,如图 1 所示。

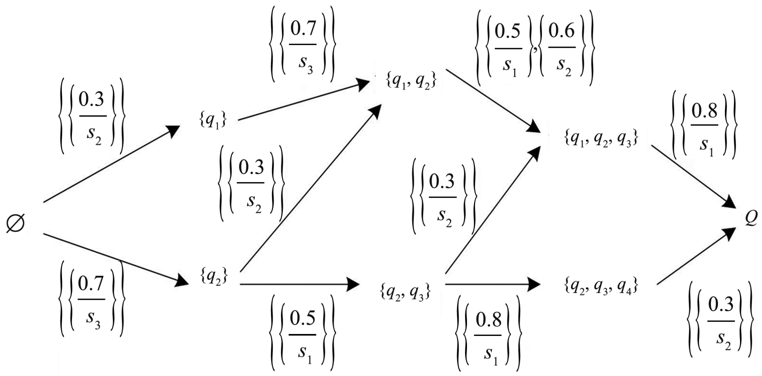

图 1　例 1 中关于下逆模型的学习路径图

Fig.1　Learning paths diagram for the lower inverse model in example 1

由学习路径图 1 可知,有 6 条学习路径,分别为:(1)$\xrightarrow[s_2]{0.3}\xrightarrow[s_3]{0.7}\xrightarrow[s_1]{0.5}\xrightarrow[s_1]{0.8}$;(2)$\xrightarrow[s_2]{0.3}\xrightarrow[s_3]{0.7}\xrightarrow[s_2]{0.6}\xrightarrow[s_1]{0.8}$;(3)$\xrightarrow[s_3]{0.7}\xrightarrow[s_1]{0.5}\xrightarrow[s_1]{0.8}\xrightarrow[s_2]{0.3}$;(4)$\xrightarrow[s_3]{0.7}\xrightarrow[s_1]{0.5}\xrightarrow[s_2]{0.3}\xrightarrow[s_1]{0.8}$;(5)$\xrightarrow[s_3]{0.7}\xrightarrow[s_2]{0.3}\xrightarrow[s_1]{0.5}\xrightarrow[s_1]{0.8}$;(6)$\xrightarrow[s_3]{0.7}\xrightarrow[s_2]{0.3}\xrightarrow[s_2]{0.6}\xrightarrow[s_1]{0.8}$。学习者可以根据自身情况和兴趣选择学习路径。例如,若学习者当前的知识状态为$\{q_2,q_3\}$,这意味者学习者目前能解决的问题为 q_2 和 q_3,当学习者选择下一步学习并掌握技能 s_2,熟练度为 0.3,则达到后继状态$\{q_1,q_2,q_3\}$,此时学习者可解决问题 q_1;当学习者选择下一步学习并掌握技能 s_1,熟练度为 0.8,则达到后继状态$\{q_2,q_3,q_4\}$,此时学习者可解决问题 q_4,由此可知,下逆模型的学习路径图为学习者提供了个性化的学习路径。

3.2　上逆模型下的学习路径选择

从语义上看,上逆模型表示问题的解决与多个技能相关,并且对每个技能达到的熟练度也可能不同。此时,学习者至少要达到解决问题所需的每个技能的熟练度才可以解决该问题。在已知学习者知识状态情况下,评估学习者对技能的掌握情况。同时,指导学习者应学习哪些模糊技能来改变当前的知识状态,最终获得学习路径。

定理 7　设(Q,S,T)是模糊近似空间,知识状态为 K^{+}的学习者的最小能力状态为 $D_{K^+}=\bigcup\limits_{q\in K^+}T_q$。

证明　先证能力状态 D_{K^+}可诱导知识状态 K^{+},即 $T^{+}(D_{K^+})=K^{+}$,这是因为

(*i*) 若$q'\in K^{+}$,则有 $\forall s\in S$,都有 $T_{q'}(s)\leqslant\bigvee\limits_{q\in K^+}T_q(s)=(\bigcup\limits_{q\in K^+}T_q)(s)=D_{K^+}(s)$,则$q'\in T^{+}(D_{K^+})$,这表明 $K^{+}\subseteq T^{+}(D_{K^+})$;

(ⅱ)若$q'\notin K^{+}$,则$\exists Y\in\mathscr{F}(S)$,$\exists s_0\in S$,使得 $T_{q'}(s_0)>Y(s_0)$,$\forall q\in K^{+}$,有 $Y(s_0)\geqslant T_q(s_0)$,则$\forall q\in K^{+}$,有 $T_q(s_0)<T_{q'}(s_0)$,即$(\bigcup\limits_{q\in K^+}T_q)(s_0)=D_{K^+}(s_0)<T_{q'}(s_0)$,则$q'\notin D_{K^+}$,表明 $T^{+}(D_{K^+})\subseteq K^{+}$。

由(ⅰ)、(ⅱ)得,$T^{+}(D_{K^+})=K^{+}$,D_{K^+}可诱导知识状态 K^{+}。

再证,D_{K^+}是诱导 K^{+}的最小能力状态。若$\exists H\in\mathscr{F}(S)$,且 $H\subset D_{K^+}$也可诱导知识状态 K^{+},即 $T^{+}(H)=K^{+}$,则对$\forall q\in K^{+}$,$\forall s\in S$,有 $T_q(s)\leqslant H(s)$,从而$\bigvee\limits_{q\in K^+}T_q(s)\leqslant H(s)$,这表明 $D_{K^+}=\bigcup\limits_{q\in K^+}T_q\subseteq H$,这与 $H\subset D_{K^+}$矛盾。故 D_{K^+}是诱导 K^{+}的最小能力状态。

由定理 7,易得推论 2。

推论 2　设(Q,S,T)是模糊近似空间,若知识状态为 K^{+}的学习者的能力状态为 Y,则 $D_{K^+}\subseteq Y$。

由上述结论,可根据学习者的知识状态可得到其最小能力状态,即学习者必须掌握的模糊技能集。

例 7　在例 1 中,当学习者 Y 的知识状态为 $K_1^{+}=\{q_1\}$时,由定理 7 得学习者 Y 的最小能力状态 $D_{K_1^+}=$

$D_{\{q_1\}}=T_{q_1}=\left\{\frac{0}{s_1},\frac{0.3}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\}$,即此时学习者至少掌握技能 s_2 的熟练度为 0.3。

接下来,考虑指导学习者进一步学习并掌握模糊技能集从而达到新的后继状态。

记号 5 设(Q,S,T)是模糊近似空间,对 $K_1^+,K_2^+\in\mathscr{K}^+$, 且 K_2^+ 是 K_1^+ 是后继状态,记

$$M=\{s\in S\mid D_{K_2^+}(s)>D_{K_1^+}(s)\},\quad N=\left\{\frac{D_{K_2^+}(s)}{s}\;\middle|\; s\in M\right\}。$$

定理 8 设(Q,S,T)是模糊近似空间,则知识状态为 K_1^+ 的学习者进一步学习并掌握模糊技能集 N 可达到后继状态 K_2^+。

证明 由定理 7 可知,知识状态为 K_1^+ 的学习者 Y 的最小能力状态是 $D_{K_1^+}$,由于 $K_1^+\subset K_2^+$,因此 $D_{K_2^+}=D_{K_1^+}\cup(\bigcup_{q\in K_2^+-K_1^+}T_q)$,因此 $D_{K_1^+}\subset D_{K_2^+}$ 当学习者学习模糊技能集 N 后,此时学习者的能力状态变为 $D_{K_1^+}\cup N$。$\forall s\in S$, 有$(D_{K_1^+}\cup N)(s)=\begin{cases}D_{K_1^+}(s) & \text{当 } D_{K_1^+}(s)=D_{K_2^+}(s)\text{ 时}\\ N(s)\cup D_{K_1^+}(s) & \text{当 } D_{K_1^+}(s)<D_{K_2^+}(s)\text{ 时}\end{cases}=D_{K_2^+}(s)$,即 $D_{K_2^+}=D_{K_1^+}\cup N$。以上表明知识状态为 K^+的学习者进一步学习并掌握模糊技能集 N 可达到后继状态 K_2^+。

例 8 在例 2 中,知识状态 $K_1^+=\{q_1\}$ 的后继状态分别为 $K_2^+=\{q_1,q_3\}$ 和 $K_3^+=\{q_1,q_4\}$,则

$$D_{K_2^+}=T_{q_1}\cup T_{q_3}=\left\{\frac{0}{s_1},\frac{0.3}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\}\cup\left\{\frac{0.5}{s_1},\frac{0.6}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\}=\left\{\frac{0.5}{s_1},\frac{0.6}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\},$$

$$D_{K_3^+}=T_{q_1}\cup T_{q_4}=\left\{\frac{0}{s_1},\frac{0.3}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\}\cup\left\{\frac{0.8}{s_1},\frac{0}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\}=\left\{\frac{0.8}{s_1},\frac{0.3}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\},$$

由例 2 知 $D_{K_1^+}=\left\{\frac{0}{s_1},\frac{0.3}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\}$,则 $D_{K_2^+}(s_1)>D_{K_1^+}(s_1)$, $D_{K_2^+}(s_2)>D_{K_1^+}(s_2)$,由记号 5 得 $M=\{s_1,s_2\}$, $N=\left\{\frac{0.5}{s_1},\frac{0.6}{s_2}\right\}$,由定理 8 知,知识状态为 K_1^+ 学习者进一步学习并掌握模糊技能集 N,即当技能 s_1 与 s_2 熟练度分别达到 0.5、0.6 时,学习者的能力状态提升至$\left\{\frac{0.5}{s_1},\frac{0.6}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\}$、$T^+\left(\left\{\frac{0.5}{s_1},\frac{0.6}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\}\right)=K_2^+$,即学习者可达到后继状态 K_2^+。同样,知识状态为 K_1^+ 学习者进一步学习并掌握模糊技能集$\left\{\frac{0.8}{s_1}\right\}$,当技能 s_1 熟练度分别达到 0.8 时,学习者的能力状态提升至$\left\{\frac{0.8}{s_1},\frac{0.3}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\}$、$T^+\left(\left\{\frac{0.8}{s_1},\frac{0.3}{s_2},\frac{0}{s_3}\right\}\right)=K_3^+$,学习者达到后继状态 K_3^+。

基于定理 7、8,给定模糊近似空间(Q,S,T),在上逆模型中,对$K^+\in\mathscr{K}^+$,寻找$K^+\in\mathscr{K}^+$的所有后继状态以及学习并掌握的模糊技能集,从而得到学习路径。

下面将基于模糊近似空间(Q,S,T),给出上逆模型的学习路径图算法。

算法 4 基于模糊近似空间(Q,S,T),获取关于上逆模型的学习路径图。

输入 模糊近似空间(Q,S,T)。

输出 学习路径图 G。

(1) 给定一个空图 G;

(2) $\partial\leftarrow\varnothing$, $\rho\leftarrow\varnothing$, 其中$\partial$ 表示 G 中所有边的集合,ρ 表示 G 中所有学习路径, $D\leftarrow\varnothing$, $M\leftarrow\varnothing$, $N\leftarrow\varnothing$;

(3) 由算法 2 计算 $\mathscr{K}^+$;

(4) 根据$\subseteq$关系对 $\mathscr{K}^+$上的知识状态进行排序;

(5) for $i=1$ to $|\mathscr{K}^+|$ do

(6) $\quad D(i)\leftarrow D_{\mathscr{K}^+(i)}$;

(7) end for

(8) for $i=1$ to $|\mathscr{K}^+|-1$ do

(9) $\quad$ for $j=i+1$ to $|\mathscr{K}^+|$ do

(10) $\quad\quad$ if $\mathscr{K}^+(j)$是$\mathscr{K}^+(i)$的后继状态 then

(11)　　　$M=\{s\in S \mid D(j)(s)>D(i)(s)\}$;

(12)　　　$N=\left\{\frac{D(j)(s)}{s}\ \middle|\ s\in M\right\}$;

(13)　　　$\rho\leftarrow\rho\cup(\mathscr{K}^{+}(i),\mathscr{K}^{+}(j))$, 其中$(\mathscr{K}^{+}(i),\mathscr{K}^{+}(j))$是由 $\mathscr{K}^{+}(i)$ 指向 $\mathscr{K}^{+}(j)$ 的边,边$(\mathscr{K}^{+}(i),\mathscr{K}^{+}(j))$的标记为 N;

(14)　　　end if

(15)　　end for

(16) end for

(17) 根据∂找出学习路径,画出学习路径图 G。

算法 4 的时间复杂度 $O(|\mathscr{F}(S)|+|\mathscr{K}^{+}|^{2})$。

例 9　在例 1 中,获得模糊近似空间(Q,S,T)关于上逆模型的学习路径图,如图 2 所示。

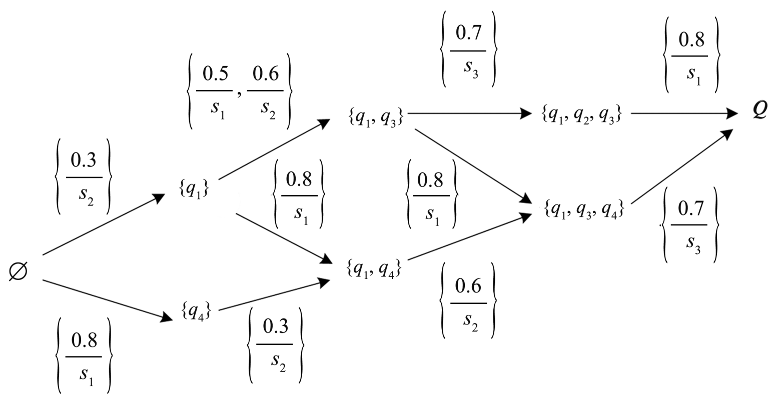

图 2　例 1 中关于上逆模型的学习路径图

Fig.2　Learning paths diagram for the upper inverse model in example 1

由学习路径图 2 可知,有 4 条学习路径,分别为:(1) $\left\{\frac{0.3}{s_2}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.5}{s_1},\frac{0.6}{s_2}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.7}{s_3}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.8}{s_1}\right\}$;(2) $\left\{\frac{0.3}{s_2}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.5}{s_1},\frac{0.6}{s_2}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.8}{s_1}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.7}{s_3}\right\}$;(3) $\left\{\frac{0.3}{s_2}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.8}{s_1}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.6}{s_2}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.7}{s_3}\right\}$;(4) $\left\{\frac{0.8}{s_1}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.3}{s_2}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.6}{s_2}\right\}\rightarrow\left\{\frac{0.7}{s_3}\right\}$。这可供不同的学习者有效地学习技能。对于知识状态为$\{q_1\}$的学习者,通过进一步地学习后,若其知识状态变为$\{q_1,q_3\}$,此时学习者至少掌握技能 s_1 的熟练度为 0.5,且掌握技能 s_2 的熟练度为 0.6。同样地,若学习者的知识状态变为$\{q_1,q_4\}$,此时学习者至少掌握技能 s_1 的熟练度为 0.8。由此可知,通过上逆模型的学习路径图可评估学习者是否掌握了相应的技能。

4　案例分析

第 2、3 章提出的理论和方法不仅可以在实践中构建知识结构,还可以进行能力评估,并指导进一步的技能学习。在实际教学中,当问题的解决方法只有一种,并且该方法要掌握多个相关的技能时,可选用 FT-粗糙集的上逆模型来指导学习;而当问题有多种解决方法,并且每种方法只要掌握一个独立的技能时,可选用 FT-粗糙集的下逆模型来指导学习。本文以“分数的加减法”为例,讨论应用上逆模型来指导学习的可行性,并验证算法的有效性。

实验的硬件环境为 Inter(R)Core(TM)i5-8400 CPU @ 2.80 GHZ,内存为 8GB,操作系统为 Windows10,软件平台为 Python。

例 10　设(Q,S,T)为模糊近似空间,问题集 $Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4,q_5\}$,技能集 $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$,T 如表 5 所示,Q 中的具体问题如表 6 所示,S 中的具体问题及将技能通过阈值划分为不同的层次,如表 7[27] 所示。

表 5　例 10 中模糊集值映射 T

Table 5　Fuzzy set-valued mapping T in example 10

T	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1	1.0	1.0	1.0	0
q_2	1.0	0	0	1.0
q_3	0	1.0	0.8	0
q_4	1.0	1.0	1.0	1.0
q_5	1.0	0	0.6	0.6

表 6　分数加减法相关问题

Table 6　Problems related to adding and subtracting fractions

问题	表达式
q_1	$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}$
q_2	$\frac{1}{8}+\frac{5}{8}$
q_3	$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$
q_4	$\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{15}\right)$
q_5	$\frac{2}{7}+\frac{3}{14}$

表 7　分数加减法相关技能

Table 7　Skills related to adding and subtracting fractions

技能	技能运算	技能熟练度
s_1	同分母分数相加	1.0
s_2	同分母分数相减	1.0
s_3	进行分母通分	
	当各分数的分母的最小公倍数为其中一个分数的分母时;	0.6
	当各分数的分母的最小公倍数为各个分母的乘积;	0.8
	当各分数的分母的最小公倍数为各个分母的严格倍数时;	1.0
s_4	将分数化为最简分数	
	当分子分母的最大公因数为其中一个时;	0.6
	当分子分母的最大公因数小于每一个时;	1.0

运用算法 4 获得模糊近似空间(Q,S,T)关于上逆模型的学习路径图如图 3 所示。

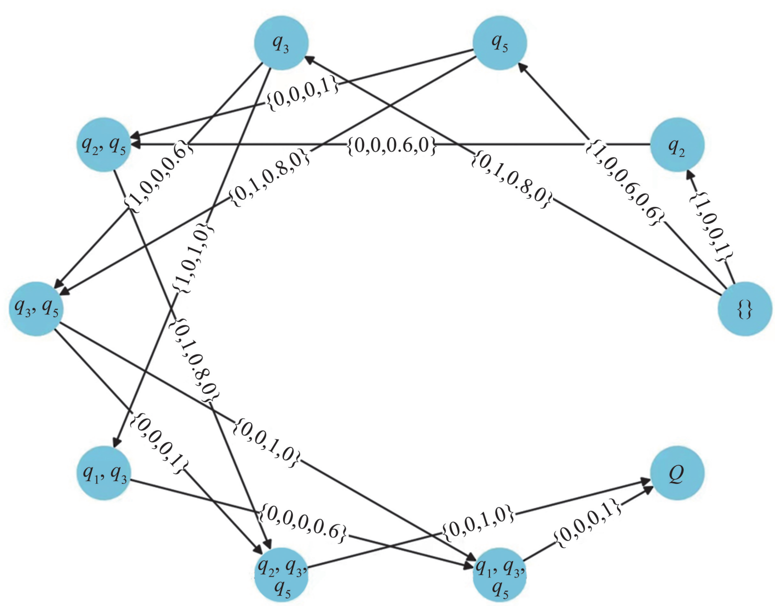

图 3　例 10 中关于上逆模型的学习路径图

Fig.3　Learning paths diagram for the upper inverse model in example 10

从学习路径图 3 可知,学习者可选取学习路径:$\left\{\frac{1}{s_1},\frac{0.6}{s_3},\frac{0.6}{s_4}\right\}\to\left\{\frac{1}{s_2},\frac{0.8}{s_3}\right\}\to\left\{\frac{1}{s_4}\right\}\to\left\{\frac{1}{s_3}\right\}$,即对于初始状态为$\varnothing$的学习者学习技能 s_1“同分母的加法”、技能 s_3“进行分母通分”、技能 s_4“将分数化为最简分数”,当技能 s_1、技能 s_3、技能 s_4 的熟练度分别达到 1、0.6、0.6 时,学习者可达到知识状态$\{q_5\}$;学习者进一步学习技能 s_2“同分母的减法”、技能 s_3“进行分母通分”,当技能 s_2、技能 s_3 的熟练度分别达到 1、0.8 时,学习者可达到

知识状态$\{q_3,q_5\}$;接下来,学习者学习技能 s_4“将分数化为最简分数”,当技能的熟练度为 1,学习者可达到知识状态$\{q_2,q_3,q_5\}$;最后,学习者学习技能 s_3“进行分母通分”,当技能 s_3 的熟练度为 1 时,能够解决 Q 的所有问题,此时学习者可以较为熟练的解决有关分数的加减法的问题。

5 结语

本文丰富了从粗糙集角度构建知识结构的理论方法,提出寻找学习路径的新方法,该学习路径不仅可以评估学习者对技能的掌握程度,还可有效地指导下一步的学习,这有助于以学定教、因材施教。将 FT-粗糙集和知识空间理论相结合,得到由 FT-粗糙集的上逆和下逆模型构建知识结构的方法,证明知识空间和简单闭包空间可以分别用 FT-粗糙集的下逆模型和上逆模型进行刻画,并研究 FT-粗糙集上逆和下逆模型生成的知识结构是学习空间和良级简单闭包空间的充要条件。基于模糊近似空间,分别在下逆和上逆两种模型中对学习者的能力进行评估。在下逆模型中,根据学习者对问题的回答情况可得到其自身的最大能力状态,在上逆模型中,由学习者对问题的回答情况可得到其自身的最小能力状态。最后,给出上(下)逆模型的学习路径图及其算法以指导技能练习。

在实际教学中,不同学习者可能有不同的适宜学习路径,后续研究工作将考虑技能的难易程度对学习路径选择的影响,并进一步探究如何选择最佳学习路径。

参考文献:

[1] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Spaces for the assessment of knowledge[J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1985, 23(2):175-196.

[2] ANSELMI P, STEFANUTTI L, DECHIUSOLE D, et al. The assessment of knowledge and learning in competence spaces: the gain−loss model for dependent skills[J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 2017, 70(3):457-479.

[3] KAMBOURI M, KOPPEN M, VILLANO M, et al. Knowledge assessment: tapping human expertise by the query routine[J]. International Journal of Human-Computer Studies, 1994, 40(1):119-151.

[4] FALMAGNE J C, DOIGNON J P. Learningspaces: interdisciplinary applied mathematics[J]. Berlin: Springer, 2011:22-112.

[5] STEFANUTTI L. On the assessment of procedural knowledge: from problem spaces to knowledge spaces[J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 2019, 72(2):185-218.

[6] HOCKEMEYER C, ALBERT D. The adaptive tutoring system rath-a prototype [C]// ICL99 Workshop Interactive Computer Aided Learning Tools and Applications. Villach: Carinthia Tech Institute, 1999:54-78.

[7] COSYN E, DOBLE C, FALMAGNE J C, et al. Assessing mathematical knowledge in a learning space[M]// FALMAGNE J C, ALBERT D, DOBLE C, et al. Knowledge Spaces. Berlin: Springer, 2013:27-50.

[8] 张治,刘小龙,余明华,等. 研究型课程自适应学习系统:理念、策略与实践[J]. 中国电化教育,2018(4):119-130.
ZHANG Zhi, LIU Xiaolong, YU Minghua, et al. Adaptive learning systems for research-based programs: concepts, strategies, and practices[J]. China Educational Technology, 2018(4):119-130.

[9] FALMAGNE J C, KOPPEN M, VILLANO M, et al. Introduction to knowledge spaces: how to build, test, and search them [J]. Psychological Review, 1990, 97(2):201-224.

[10] SCHREPP M. A method for the analysis of hierarchical dependencies between items of a questionnaire[J]. Methods of Psychological Research Online, 2003, 8(1):43-79.

[11] DOIGNON J P. Knowledge spaces and skill assignments[M]//FISCHER G H, LAMING D. Contributions to Mathematical Psychology, Psychometrics, and Methodology. Berlin: Springer, 1994:111-121.

[12] SUN Wen, LI Jinjin, GE Xun, et al. Knowledge structures delineated by fuzzy skill maps[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 407:50-66.

[13] HELLER J, ANSELMI P, STEFANUTTI L, et al. A necessary and sufficient condition for unique skill assessment[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2017, 79:23-28.

[14] 何秋红,孙文,郑文彬,等. 学习空间理论的 ACM 竞赛关键学习路径算法[J]. 山西大学学报(自然科学版),2020,43(4):828-837.
HE Qiuhong, SUN Wen, ZHENG Wenbin, et al. An algorithm for critical learning path of ACM contest based on learning space theory[J]. Journal of Shanxi University (Natural Science Edition), 2020, 43(4):828-837.

[15] 陈东晓, 李进金. 基于知识空间理论的微积分关键学习路径描述[J]. 黑龙江教育(高教研究与评估),2023(4):28-31.
CHEN Dongxiao, LI Jinjin. Description of calculus key learning path based on knowledge space theory[J]. Heilongjiang

Education(Research and Evaluation of Higher Education), 2023(4):28-31.
[16] RUSCH A, WILLE R. Knowledge spaces and formal concept analysis[C]//BOCK H H, POLASEK W. Data Analysis and Information Systems. Berlin: Springer, 1996:427-436.
[17] NICOTRA E F, SPOTO A. Connections and dissimilarities among formal concept analysis, knowledge space theory and cognitive diagnostic models in a systemic perspective[M]//MINATI G, ABRAM M R, PESSA E. Systemics of Incompleteness and Quasi-systems, Belin: Springer, 2019:235-241.
[18] XIE Xiaoxian, XU Weihua, LI Jinjin. A novel concept-cognitive learning method: a perspective from competences[J]. Knowledge-Based Systems, 2023, 265:110382.
[19] HELLER J, STEFANUTTI L, ANSELMI P, et al. On the link between cognitive diagnostic models and knowledge space theory[J]. Psychometrika, 2015, 80(4):995-1019.
[20] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer Information Science, 1982, 11(5):341-356.
[21] DÜNTSCH I, GEDIGA G. Skills and knowledge structures[J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 1995, 48(1):9-27.
[22] YAO Yiyu, MIAO Duoqian, XU Feifei. Granular structures and approximations in rough sets and knowledge spaces[M]//ABRAHAM A, FALCÓN R, BELLO R. Rough Set Theory: A True Landmark in Data Analysis. Berlin: Springer, 2009:71-84.
[23] 王国胤,姚一豫,于洪. 粗糙集理论与应用研究综述[J]. 计算机学报,2009,32(7):1229-1246.
WANG Guoyin, YAO Yiyu, YU Hong. A survey on rough set theory and applications[J]. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(7):1229-1246.
[24] LIU Guilong. Rough set approaches in knowledge structures[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2021, 138: 78-88.
[25] 高纯,王睿智. 知识空间理论析取模型下最小技能集的生成[J]. 计算机科学与探索,2010,4(12):1109-1114.
GAO Chun, WANG Ruizhi. The formation of minimal skill set in disjunctive model of knowledge space theory[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2010, 4(12):1109-1114.
[26] 杨桃丽,李进金,李招文,等. 基于技能构建知识结构的两种变精度模型与技能子集约简[J]. 模式识别与人工智能, 2022,35(8):671-687.
YANG Taoli, LI Jinjin, LI Zhaowen, et al. Two kinds of variable precision models based on skill for constructing knowledge structures and skill subset reduction[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2022, 35(8):671-687.
[27] XU Bochi, LI Jinjin, SUN Wen, et al. Ondelineating forward-and backward-graded knowledge structures from fuzzy skill maps[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2023, 117:102819.
[28] DAVVAZ B. A short note on algebraic T-rough sets[J]. Information Sciences, 2008, 178(16):3247-3252.
[29] 张纪平,周缪娟,李进金. FT-粗糙集模型的一些性质[J]. 泉州师范学院学报,2024,42(2): 1-9.
ZHANG Jiping, ZHOU Miaojuan, LI Jinjin. Some properties of the FT-rough set model[J]. Journal of Quanzhou Normal College, 2024, 42(2):1-9.
[30] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3):338-353.
[31] 杨海龙. 双论域粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2016:33-33.
YANG Hailong. Roughset theory and methods for bi-theoretical domains[M]. Beijing: Science Press, 2016:33-33.
[32] EPPSTEIN D, FALMAGNE J C, UZUN H B. On verifying and engineering the well gradedness of a union-closed family[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2009, 53(1):34-39.
[33] 周银凤,李进金,冯丹露,等. 形式背景下的学习路径与技能评估[J]. 模式识别与人工智能,2021,34(12):1069-1084.
ZHOU Yinfeng, LI Jinjing, FENG Danlu, et al. Learning paths and skills assessment in formal context[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2021, 34(12):1069-1084.
[34] 赵青,韩光明,梁娟. 技能映射下学习空间判别定理[J]. 闽南师范大学学报(自然科学版),2021,34(1):20-25.
ZHAO Qing, HAN Guangming, LIANG Juan. Learning spatial discrimination theorems under skill mapping[J]. Journal of Minnan Normal University (Natural Science Edition), 2021, 34(1):20-25.
[35] FALMAGNE J C, DOIGNON J P. A class of stochastic procedures for the assessment of knowledge[J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 1988, 41(1):1-23.

(编辑:陈丽萍)