山东大学学报(理学版)2025年7月 第60卷 第7期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.7, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)07-0131-12 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.187

新型多粒度变精度(∗,·)-模糊粗糙集

李心如,李令强*,贾成昭
(聊城大学数学科学学院, 山东 聊城 252000)

摘要:引入一种新型变精度(∗,·)-模糊粗糙集,结合多粒度思想,提出了包含乐观、悲观和折中3个基本模型的多粒度变精度(∗,·)-模糊粗糙集,研究了模型的代数性质和拓扑性质,证明了模型满足包含性、幂等性、对偶性等性质,并且能诱导模糊拓扑、模糊余拓扑结构。

关键词:模糊粗糙集;变精度;多粒度;三角模
中图分类号:TP181; O159 **文献标志码**:A
引用格式:李心如,李令强,贾成昭. 新型多粒度变精度(∗,·)-模糊粗糙集[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(7):131-142.

Novel multi-granularity variable precision (∗,·)-fuzzy rough set

LI Xinru, LI Lingqiang*, JIA Chengzhao
(Department of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252000, Shandong, China)

Abstract: A novel variable precision (∗,·)-fuzzy rough set is introduced. Combined with the idea of multi-granularity, a multi-granularity variable precision (∗,·)-fuzzy rough set is further proposed, which includes three basic models, optimism, pessimism and compromise. The algebraic and topological properties of the model are investigated, and it is proved that the model satisfies the properties of inclusion, idempotency and duality, and can induce fuzzy topology and fuzzy cotopology structure.

Key words: fuzzy rough set; variable precision; multi-granularity; triangular norm

0 引言

模糊粗糙集作为模糊集[1]和粗糙集[2]理论的结合,能有效处理不确定和不完备的复杂数据,已被广泛应用于数据挖掘[3]、机器学习[4]、特征选择[5-6]、决策分析[7]、医学诊断[8]等各个领域。

模糊粗糙集对数据的准确度和完整度要求很高,数据的微小变化都会影响模型的结果,为了解决这一问题,Ziarko[9]提出变精度粗糙集模型,增强了模型的容错能力和抗干扰能力。Yao等[10]通过绝对误差的思想建立一个基于模糊粒的新模型,简称Yao模型。Wang等[11]将Yao模型扩展到一般关系,Li等[12]将Yao模型拓展到重叠函数和群组函数中。然而这些模型均不满足包含性(下近似含于上近似),而许多理论和应用都依赖于包含性。因此,很多学者研究了满足包含性的变精度模糊粗糙集,例如Zou等[13]提出的满足包含性的模型,能够更有效地处理数据噪声和不确定性问题。

多粒度是粗糙集的另一个重要发展方向,Qian等[14]引入多粒度粗糙集的概念,从多个角度分析问题并获得更加合理的求解,更好地揭示数据内在的结构。与单粒度粗糙集基于一个关系不同,多粒度粗糙集是建立在多个关系之上的。在实际应用中,很多问题都涉及到多个因素(关系),如,群决策问题(每个专家的意见确定一个关系)[15]、多源信息问题(每个信息源确定一个关系)[16]、多属性决策问题(每个属性确定一个关系)[17]。显然,多粒度模型比单粒度粗糙模型更适合处理这些问题。此外,许多研究者将变精度和多粒度

收稿日期:2024-06-03; **网络出版时间**:2025-01-07 13:55:58
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12171220); 山东省自然科学基金资助项目(ZR2023MA079)
第一作者:李心如(2000—),女,硕士研究生,研究方向为模糊粗糙集. E-mail:lixinru2332@126.com
∗**通信作者**:李令强(1980—),男,教授,硕士生导师,博士,研究方向为模糊粗糙集. E-mail:lilingqiang0614@126.com

相结合,例如 Sun 等[18]将多粒度变精度粗糙集与毕达哥拉斯粗糙集结合解决不确定的多属性群决策问题,郑文彬等[19]将多粒度变精度粗糙集与邻域粗糙集结合提出一种近似集更新的矩阵算法。Ye 等[20]建立 4 种变精度多决策多粒度粗糙集模型,并应用于医疗诊断。

Yao 模型利用误差定义了一种变精度模糊粗糙集,但是它不满足包含性质,Zou 等[13]引入了一种改进的模型。但是二者的定义和形式非常复杂,难于计算,这极大阻碍了粒变精度模糊粗糙集理论和应用的进一步发展。另外,多粒度、变精度粗糙集具有高度的兼容性。多粒度思想使得人们能够从多视角、多层次和多维度来考虑问题,因而多粒度变精度模型能处理更复杂的问题。注意到,文献[10,13]提出的模型都没有与多粒度思想融合。因此本文保留文献[10]中绝对误差的思想,给出一种易于计算的新型变精度模糊粗糙集,该模型有更好包含性、幂等性,并且结合多粒度思想,提出多粒度变精度模糊粗糙集。

1 预备知识

设 $I=[0,1]$, $*:I^2\to I$ 是左连续三角模, $\cdot:I^2\to I$ 是右连续三角余模。此外,设 $\neg:I\to I$ 是标准对合否定, $*$ 和 $\cdot$ 关于 $\neg$ 对偶。常见的三角模有:(1) 标准最小算子 $p*_M q=\min\{p,q\}$;(2)代数积 $p*_P q=pq$;(3) Lukasiewicz 三角模 $p*_L q=\max\{0,p+q-1\}$。常见的三角余模有:(1) 标准最大算子 $p\cdot_M q=\max\{p,q\}$;(2)代数积 $p\cdot_P q=p+q-pq$;(3)Lukasiewicz 三角余模 $p\cdot_L q=\min\{1,p+q\}$。

设 U 是非空有限集,记 $I(U)$ 为 U 中的模糊集。对任意 $p\in I$,取 p 的常值模糊集记为 $\hat{p}$。令 $W,V\in I(U)$, $\Delta=\{\wedge,\vee,*,\cdot\}$,对任意 $g\in U$ 有 $(W\Delta V)(g)=W(g)\Delta V(g)$。$W\leqslant V$ 即对任意 $g\in U$,有 $W(g)\leqslant V(g)$。对 $\vartheta\in I$,定义 $U_\vartheta=\{X\subseteq U:|X|\geqslant\vartheta|U|\}$,其中 $|U|$ 代表 U 的基数。

引理 1 对任意 $A,B,C,A_j\in I(U)$, $j\in\Lambda$,其中 Λ 是一个集族,则

(1) $A*B=B*A$, $A\cdot B=B\cdot A$;

(2) 若 $A\leqslant B$,则 $A*C\leqslant B*C$, $A\cdot C\leqslant B\cdot C$;

(3) $A*(B*C)=(A*B)*C$, $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;

(4) $*$ 是左连续的, $\cdot$ 是右连续的,则 $(\bigvee_{j\in\Lambda}A_j)*B=\bigvee_{j\in\Lambda}(A_j*B)$, $(\bigwedge_{j\in\Lambda}A_j)\cdot B=\bigwedge_{j\in\Lambda}(A_j\cdot B)$;

(5) $U*A=A$, $U\cdot A=U$;

(6) $\varnothing*A=\varnothing$, $\varnothing\cdot A=A$。

模糊集 $R\in I(U\times U)$ 为 U 上的模糊关系,称二元对 (U,R) 为模糊近似空间。

设 R 为论域 U 上的模糊关系,任取 g, e, $h\in U$ 有(1) $R(g,g)=1$,则称 R 为反身的;(2)若 $R(g,h)=R(h,g)$,则称 R 为对称的;(3)若 $R(g,e)*R(e,h)\leqslant R(g,h)$,则称 R 为 $*$-传递的。称反身、$*$-传递的关系为 $*$-预序关系。

令 $g\in U$, $r\in I$, $R\in I(U\times U)$,任取 $h\in U$,模糊粒 $[g_r]_R^*$、$[g_r]_R^\cdot$ 定义为

$$[g_r]_R^*(h)=R(g,h)*r,\quad [g_r]_R^\cdot(h)=\neg R(g,h)\cdot r。$$

通过使用模糊粒的概念,文献[10]定义了一种等价关系下的变精度模糊粗糙集,文献[11]将其推广到一般关系。

定义 1[10-11] 设 (U,R) 是一个模糊近似空间, $\vartheta\in I$, $U_\vartheta=\{X\subseteq U:|X|\geqslant\vartheta|U|\}$,对任意 $W\in I(U)$, $g\in U$,定义映射 $\underline{\mathrm{YW}R}^\vartheta$, $\overline{\mathrm{YW}R}^\vartheta:I(U)\to I(U)$ 为

$$\underline{\mathrm{YW}R}^\vartheta(W)=\vee\{[g_r]_R^*:g\in U,\ r\in I,\ \{h\in U:[g_r]_R^*(h)\leqslant W(h)\}\in U_\vartheta\},$$

$$\overline{\mathrm{YW}R}^\vartheta(W)=\wedge\{[g_r]_R^\cdot:g\in U,\ r\in I,\ \{h\in U:W(h)\leqslant[g_r]_R^\cdot(h)\}\in U_\vartheta\},$$

称序对 $(\underline{\mathrm{YW}R}^\vartheta,\overline{\mathrm{YW}R}^\vartheta)$ 为 W 关于 (U,R) 的粒变精度模糊粗糙集,称 $\underline{\mathrm{YW}R}^\vartheta$, $\overline{\mathrm{YW}R}^\vartheta$ 为粒变精度模糊粗糙下/上近似算子。

对 $X\subseteq U$,显然 $X\in U_\vartheta$ 的充要条件是 $\dfrac{|X|}{|U|}\geqslant\vartheta$,称 $1-\vartheta$ 为 X 关于 U 的绝对误差,可以理解为错误或缺失数据所占比例,这是文献[10]的核心思想,即按照一定比例 $1-\vartheta$ 去除论域中的对象,可以有效地减少错误或缺

失数据的影响。

文献[13]基于文献[10]的模型,引入了满足包含性的变精度改进模型如下。

定义 2[13]　定义映射$\underline{MR}^{\vartheta}$, $\overline{MR}^{\vartheta}:I(U)\to I(U)$为

$$\underline{MR}^{\vartheta}(W)(g)=\bigvee\{[g_r]_R^*(e):g\in U,r\in I,e\in\{h\in U:[g_r]_R^*(h)\leqslant W(h)\}\in U_{\vartheta}\},$$

$$\overline{MR}^{\vartheta}(W)(g)=\bigwedge\{[g_r]_R^{\cdot}(e):g\in U,r\in I,e\in\{h\in U:W(h)\leqslant[g_r]_R^{\cdot}(h)\}\in U_{\vartheta}\},$$

称序对($\underline{MR}^{\vartheta}$, $\overline{MR}^{\vartheta}$)为 W 关于(U, R)的 M-粒变精度模糊粗糙集,称$\underline{MR}^{\vartheta}$,$\overline{MR}^{\vartheta}$ 为 M-粒变精度模糊粗糙下/上近似算子。

显然,文献[10,13]的模型形式过于复杂,应用起来不方便。因此,本文保留文献[10]中绝对误差的思想,引入形式更简洁且满足包含性的变精度新模型。

2　新型变精度(∗ ,·)-模糊粗糙集模型

本章给出一个新型变精度(∗ , ·)-模糊粗糙集模型,并讨论它的基本性质(对偶性、包含性、幂等性)。

定义 3　设(U,R)是一个模糊近似空间,$\vartheta\in I$,对任意 $W\in I(U)$, $g\in U$,定义映射 $\underline{R}^{\vartheta}$, $\bar{R}^{\vartheta}:I(U)\to I(U)$为

$$\underline{R}^{\vartheta}(W)(g)=\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot W(h)),\quad \bar{R}^{\vartheta}(W)(g)=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*W(h)),$$

称序对($\underline{R}^{\vartheta}(W)$,$\bar{R}^{\vartheta}(W)$)为 W 关于(U,R)的变精度(∗ ,·)-模糊粗糙集,称 $\underline{R}^{\vartheta}(W)$, $\bar{R}^{\vartheta}(W)$为变精度模糊粗糙·-下近似算子和 ∗ -模糊上近似算子。

注 1　(1) 当 $\vartheta=1$ 时,$\underline{R}^{\vartheta}(W)(g)=\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot W(h))$, $\bar{R}^{\vartheta}(W)(g)=\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*W(h))$,此时定义 2 退化为文献[21]中的模型;

(2) 由下例知本文的变精度(∗ ,·)模糊粗糙集模型与文献[10,13]中模型是不同的。另外,本文的模型和文献[13]的模型满足包含性,而文献[10]中模型则不满足此性质。

例 1　设 $*=*_P$, $\cdot=\cdot_P$, $U=\{o_1,o_2,o_3\}$, $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0.8&1\\0.8&1&0.8\\1&0.8&1\end{pmatrix}$, $W=\frac{0.9}{o_1}+\frac{0}{o_2}+\frac{0.5}{o_3}$,令 $\vartheta=\frac{2}{3}$,则 $U_{\vartheta}=\{\{o_1,o_2,o_3\},\{o_1,o_2\},\{o_1,o_3\},\{o_2,o_3\}\}$。由定义 1、2、3 可得

$$\underline{YWR}^{\vartheta}(W)=\frac{0.5}{o_1}+\frac{0.625}{o_2}+\frac{0.5}{o_3},\quad \overline{YWR}^{\vartheta}(W)=\frac{0.5}{o_1}+\frac{0.375}{o_2}+\frac{0.5}{o_3};$$

$$\underline{MR}^{\vartheta}(W)=\frac{0.5}{o_1}+\frac{0}{o_2}+\frac{0.5}{o_3},\quad \overline{MR}^{\vartheta}(W)=\frac{0.9}{o_1}+\frac{0.375}{o_2}+\frac{0.5}{o_3};$$

$$\underline{R}^{\vartheta}(W)=\frac{0.5}{o_1}+\frac{0}{o_2}+\frac{0.5}{o_3},\quad \bar{R}^{\vartheta}(W)=\frac{0.9}{o_1}+\frac{0.4}{o_2}+\frac{0.5}{o_3}。$$

显然这 3 个模型是不同的。

下面证明变精度(∗ ,·)模糊粗糙集的相关性质。

命题 1　设(U,R)是模糊近似空间,$\vartheta\in I$,则对任意 $W,V,\{W_j\}_{j\in\Lambda}\in I(U)$, $p\in I$,有

(1) $\underline{R}^{\vartheta}(U)=U$, $\bar{R}^{\vartheta}(\varnothing)=\varnothing$;

(2) 若 $W\leqslant V$,则 $\underline{R}^{\vartheta}(W)\leqslant\underline{R}^{\vartheta}(V)$, $\bar{R}^{\vartheta}(W)\leqslant\bar{R}^{\vartheta}(V)$;

(3) $\underline{R}^{\vartheta}(\bigwedge_{j\in\Lambda}W_j)\leqslant\bigwedge_{j\in\Lambda}\underline{R}^{\vartheta}(W_j)$, $\bigvee_{j\in\Lambda}\bar{R}^{\vartheta}(W_j)\leqslant\bar{R}^{\vartheta}(\bigvee_{j\in\Lambda}W_j)$;

(4) $\bigvee_{j\in\Lambda}\underline{R}^{\vartheta}(W_j)\leqslant\underline{R}^{\vartheta}(\bigvee_{j\in\Lambda}W_j)$, $\bar{R}^{\vartheta}(\bigwedge_{j\in\Lambda}W_j)\leqslant\bigwedge_{j\in\Lambda}\bar{R}^{\vartheta}(W_j)$;

(5) $\underline{R}^{\vartheta}(\hat{p}\cdot W)\leqslant\hat{p}\cdot\underline{R}^{\vartheta}(W)$, $\hat{p}*\bar{R}^{\vartheta}(W)\leqslant\bar{R}^{\vartheta}(\hat{p}*W)$;

(6) $\hat{p}\leqslant\underline{R}^{\vartheta}(\hat{p})$, $\bar{R}^{\vartheta}(\hat{p})\leqslant\hat{p}$。

证明　任取 $g\in U$,可得

$$\underline{R}^{\vartheta}(U)(g)=\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot 1)=U(g),\quad \overline{R}^{\vartheta}(\varnothing)(g)=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*0)=\varnothing(g),$$

则命题 1(1)成立。显然命题(2)—(4)成立。

由于·是右连续的,$*$ 是左连续的,任取 $g\in U$,得

$$\underline{R}^{\vartheta}(\hat{p}\cdot W)(g)=\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot p\cdot W(h))=\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}(p\cdot\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot W(h)))$$
$$\leqslant p\cdot\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot W(h))=(\hat{p}\cdot\underline{R}^{\vartheta}(W))(g),$$
$$\overline{R}^{\vartheta}(\hat{p}*W)(g)=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*p*W(h))=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}(p*\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*W(h)))$$
$$\geqslant p*\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*W(h))=(\hat{p}*\overline{R}^{\vartheta}(W))(g),$$

则命题 1(5)成立。

任取 $g\in U$,可得

$$\underline{R}^{\vartheta}(\hat{p})(g)=\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot p)\geqslant 0\cdot p=\hat{p}(g),\quad \overline{R}^{\vartheta}(\hat{p})(g)=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*p)\leqslant 1*p=\hat{p}(g),$$

则命题 1(6)成立。

命题 2 设(U,R)是模糊近似空间,$\vartheta\in I$,则

(1) 对分明集 $V\subseteq U$, $\vartheta=\dfrac{|V|}{|U|}$,则 $V\leqslant\underline{R}^{\vartheta}(V)$, $\overline{R}^{\vartheta}(U-V)\leqslant U-V$;

(2) 设 $W,V\in I(U)$, $\vartheta>0.5$,则

$$\underline{R}^{\vartheta}(W)\vee\underline{R}^{\vartheta}(V)\leqslant\underline{R}^{2\vartheta-1}(W\vee V),\quad \overline{R}^{2\vartheta-1}(W\wedge V)\leqslant\overline{R}^{\vartheta}(W)\wedge\overline{R}^{\vartheta}(V)。$$

证明 (1) 任取 $g\in U$,由 V 是分明集,得

$$\underline{R}^{\vartheta}(V)(g)=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot V(h))\geqslant\bigwedge_{h\in V}(\neg R(g,h)\cdot V(h))=1=V(g)。$$
$$\overline{R}^{\vartheta}(U-V)(g)=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*(U-V)(h))\leqslant\bigvee_{h\in V}(R(g,h)*(U-V)(h))=0=(U-V)(g)。$$

(2) 令 $\vartheta>0.5$,则 $\vartheta\geqslant(2\vartheta-1)$,故 $U_{\vartheta}\subseteq U_{2\vartheta-1}$,从而任取 $g\in U$,得

$$(\underline{R}^{\vartheta}(W)\vee\underline{R}^{\vartheta}(V))(g)=\underline{R}^{\vartheta}(W)(g)\vee\underline{R}^{\vartheta}(V)(g)\leqslant\underline{R}^{\vartheta}(W\vee V)(g)$$
$$=\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot(W\vee V)(h))$$
$$\leqslant\bigvee_{g\in X\in U_{2\vartheta-1}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot(W\vee V)(h))=\underline{R}^{2\vartheta-1}(W\vee V)(g),$$
$$(\overline{R}^{\vartheta}(W)\wedge\overline{R}^{\vartheta}(V))(g)=\overline{R}^{\vartheta}(W)(g)\wedge\overline{R}^{\vartheta}(V)(g)\geqslant\overline{R}^{\vartheta}(W\wedge V)(g)$$
$$=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*(W\wedge V)(h))$$
$$\geqslant\bigwedge_{g\in X\in U_{2\vartheta-1}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*(W\wedge V)(h))=\overline{R}^{2\vartheta-1}(W\wedge V)(g)。$$

下面证明 $\underline{R}^{\vartheta}$、$\overline{R}^{\vartheta}$ 满足对偶性。

定理 1 设(U,R)是模糊近似空间,$*$ 和·是对偶的,$W\in I(U)$,则

$$\neg\underline{R}^{\vartheta}(W)=\overline{R}^{\vartheta}(\neg W),\quad \neg\overline{R}^{\vartheta}(W)=\underline{R}^{\vartheta}(\neg W)。$$

证明 若 $*$ 和·是对偶的,任取 $W\in I(U)$, $g\in U$,有

$$\neg\underline{R}^{\vartheta}(W)(g)=\neg\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot W(h))=\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(R(g,h)*\neg W(h))=\overline{R}^{\vartheta}(\neg W)(g)。$$

即$\neg\underline{R}^{\vartheta}(W)=\overline{R}^{\vartheta}(\neg W)$。同理可得$\neg\overline{R}^{\vartheta}(W)=\underline{R}^{\vartheta}(\neg W)$。

下面证明变精度$(*,\cdot)$-模糊粗糙集满足包含性。

定理 2 设(U,R)是模糊近似空间,R 是自反的,$\vartheta\in I$,则 $\underline{R}^{\vartheta}(W)\leqslant W\leqslant\overline{R}^{\vartheta}(W)$。

证明 任取 $W\in I(U)$, $g\in U$,则

$$\underline{R}^{\vartheta}(W)(g)=\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot W(h))\leqslant\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}(\neg R(g,g)\cdot W(g))=W(g),$$
$$\overline{R}^{\vartheta}(W)(g)=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*W(h))\geqslant\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}(R(g,g)*W(g))=W(g)。$$

因此, $\underline{R}^{\vartheta}(W)\leqslant W\leqslant\overline{R}^{\vartheta}(W)$。

通过定理 2、命题 1(6)、命题 2(1)可得以下推论。

推论 1　设 (U,R) 是模糊近似空间, R 是自反的, $\vartheta\in I$,则

(1) $\hat{p}=\underline{R}^{\vartheta}(\hat{p})$, $\overline{R}^{\vartheta}(\hat{p})=\hat{p}$;

(2) 对分明集 $V\subseteq U$, $\vartheta=\dfrac{|V|}{|U|}$,则 $V=\underline{R}^{\vartheta}(V)$, $\overline{R}^{\vartheta}(U-V)=U-V$。

接下来,讨论幂等性。

定义 4　设 (U,R) 是模糊近似空间,任意 $e,g,h\in U$,若 $\neg R(g,e)\cdot\neg R(e,h)\geqslant\neg R(g,h)$,则称 R 是 ·-传递的;若 R 既是自反的也是·-传递的,则称 R 是 ·-预序的。

定理 3　设 (U,R) 是模糊近似空间, $\vartheta\in I$, $W\in I(U)$,则

(1) 当 R 是·-传递时, $\underline{R}^{\vartheta}(W)\leqslant\underline{R}^{\vartheta}(\underline{R}^{\vartheta}(W))$;

(2) 当 R 是 $*$-传递时, $\overline{R}^{\vartheta}(\overline{R}^{\vartheta}(W))\leqslant\overline{R}^{\vartheta}(W)$。

证明　(1) 当 R 是·-传递时,任取 $g\in U$,

$$\begin{aligned}\underline{R}^{\vartheta}(\underline{R}^{\vartheta}(W)(g))&=\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot\underline{R}^{\vartheta}(W)(h))\\&=\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot\bigvee_{h\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{e\in X}(\neg R(h,e)\cdot W(e)))\\&\geqslant\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R(g,h)\cdot\bigwedge_{e\in X}(\neg R(h,e)\cdot W(e)))\\&=\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}\bigwedge_{e\in X}(\neg R(g,h)\cdot\neg R(h,e)\cdot W(e))\\&\geqslant\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{e\in X}(\neg R(g,e)\cdot W(e))=\underline{R}^{\vartheta}(W)(g)\ ,\end{aligned}$$

即证 $\underline{R}^{\vartheta}(W)\leqslant\underline{R}^{\vartheta}(\underline{R}^{\vartheta}(W))$。

(2) 任取 $g\in U$,当 R 是 $*$-传递时,有

$$\begin{aligned}\overline{R}^{\vartheta}(\overline{R}^{\vartheta}(W))(g)&=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*\overline{R}^{\vartheta}(W)(h))\\&=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*\bigwedge_{h\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{e\in X}(R(h,e)*W(e)))\\&\leqslant\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R(g,h)*\bigvee_{e\in X}(R(h,e)*W(e)))\\&=\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}\bigvee_{e\in X}(R(g,h)*R(h,e)*W(e))\\&\leqslant\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{e\in X}(R(g,e)*W(e))=\overline{R}^{\vartheta}(W)(g)\ ,\end{aligned}$$

即证 $\overline{R}^{\vartheta}(\overline{R}^{\vartheta}(W))\leqslant\overline{R}^{\vartheta}(W)$。

通过定理 2、3 可得幂等性如下。

定理 4　设 (U,R) 是模糊近似空间, $\vartheta\in I$, $W\in I(U)$,则

(1) 当 R 是·-预序时, $\underline{R}^{\vartheta}(\underline{R}^{\vartheta}(W))=\underline{R}^{\vartheta}(W)$;

(2) 当 R 是 $*$-预序时, $\overline{R}^{\vartheta}(\overline{R}^{\vartheta}(W))=\overline{R}^{\vartheta}(W)$。

3　多粒度变精度($*$,·)-模糊粗糙集模型

本章在新型变精度($*$,·)-模糊粗糙集模型的基础上,提出多粒度变精度($*$,·)-模糊粗糙集,同样讨论它的基本性质(对偶性、包含性、幂等性),并探究与模糊拓扑的联系。

3.1　定义和基本性质

定义 5　设 $(U,\mathscr{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_n,\ n\in\mathbf{N}_+\})$ 是一族模糊近似空间, $W\in I(U)$, $g\in U$,

(1) 定义乐观下/上近似算子 $\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}$, $\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}$ 为

$$\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)=\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\underline{R}^{\vartheta}(W)(g),\quad\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)=\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\overline{R}^{\vartheta}(W)(g),$$

称序对$(\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W),\ \overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))$为关于$W$的乐观变精度$(*,\cdot)$-模糊粗糙集。

(2) 定义悲观下/上近似算子$\underline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}$,$\overline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}$为

$$\underline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)=\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\underline{R}^{\vartheta}(W)(g),\quad \overline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)=\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\overline{R}^{\vartheta}(W)(g),$$

称序对$(\underline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W),\ \overline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))$为关于$W$的悲观变精度$(*,\cdot)$-模糊粗糙集。

(3) 取$\lambda\in I$,定义折中下/上近似算子$\underline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}$,$\overline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}$为

$$\underline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\lambda\,\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)+(1-\lambda)\underline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W),\ \overline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\lambda\,\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)+(1-\lambda)\overline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W),$$

称序对$(\underline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}(W),\overline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))$为关于$W$的折中变精度$(*,\cdot)$-模糊粗糙集。

乐观、悲观、折中变精度$(*,\cdot)$-模糊粗糙集统称为多粒度变精度$(*,\cdot)$-模糊粗糙集。为了方便,在下文称变精度$(*,\cdot)$-模糊粗糙集为单粒度模型。

注2 任取$W\in I(U)$,乐观、悲观、折中变精度$(*,\cdot)$-模糊粗糙集的关系为

(1) $\underline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant\underline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)$, $\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant\overline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant\overline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)$;

(2) 若$\lambda=1$,则$\underline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)$, $\overline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)$;

(3) 若$\lambda=0$,则$\underline{CR}^{\vartheta}(W)=\underline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)$, $\overline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\overline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)$。

设$L,H:I(U)\to I(U)$是映射,对任意$W,V,\{W_j\}_{j\in\Lambda}\in I(U)$, $p\in I$,记

(L1) $L(U)=U$, (U1) $H(\varnothing)=\varnothing$;

(L2) $W\leqslant V\Rightarrow L(W)\leqslant L(V)$, (U2) $W\leqslant V\Rightarrow H(W)\leqslant H(V)$;

(L3) $L(\bigwedge_{j\in\Lambda}W_j)\leqslant\bigwedge_{j\in\Lambda}L(W_j)$, (U3) $\bigvee_{j\in\Lambda}H(W_j)\leqslant H(\bigvee_{j\in\Lambda}W_j)$;

(L4) $\bigvee_{j\in\Lambda}L(W_j)\leqslant L(\bigvee_{j\in\Lambda}W_j)$, (U4) $H(\bigwedge_{j\in\Lambda}W_j)\leqslant\bigwedge_{j\in\Lambda}H(W_j)$;

(L5) $L(\hat{p}\cdot W)\leqslant\hat{p}\cdot L(W)$, (U5) $\hat{p}*H(W)\leqslant H(\hat{p}*W)$;

(L6) $\hat{p}\leqslant L(\hat{p})$, (U6) $H(\hat{p})\leqslant\hat{p}$。

命题3 设$(U,\mathscr{R})$是一族模糊近似空间,$W\in I(U)$, $L=\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}$, $H=\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}$ 则L满足(L1)—(L6); H满足(U1)—(U6)。

证明 由命题1 (1)可得

$$\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(U)=\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\underline{R}^{\vartheta}(U)=U,\quad \overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\varnothing)=\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\overline{R}^{\vartheta}(\varnothing)=\varnothing,$$

则(L1)、(U1)成立。

显然(L2)—(L4)、(U2)—(U4)成立。

由命题1(5)可得

$$\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p}\cdot W)=\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\underline{R}^{\vartheta}(\hat{p}\cdot W)\leqslant\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\hat{p}\cdot\underline{R}^{\vartheta}(W)\leqslant\hat{p}\cdot\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\underline{R}^{\vartheta}(W)=\hat{p}\cdot\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W),$$

$$\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p}*W)=\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\overline{R}^{\vartheta}(\hat{p}*W)\geqslant\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\hat{p}*\overline{R}^{\vartheta}(W)\geqslant\hat{p}*\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\overline{R}^{\vartheta}(W)=\hat{p}*\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W),$$

则(L5)、(U5)成立。

由命题1(6)可得

$$\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p})=\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\underline{R}^{\vartheta}(\hat{p})\geqslant\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\hat{p}=\hat{p},\quad \overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p})=\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\overline{R}^{\vartheta}(\hat{p})\leqslant\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\hat{p}=\hat{p},$$

则(L6)、(U6)成立。

命题4 设$(U,\mathscr{R})$是一族模糊近似空间,$W\in I(U)$, $L=\underline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}$, $H=\overline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}$ 则L满足(L1)—(L6); H满足(U1)—(U6)。

证明 与命题3同理可证,略。

命题5 设$(U,\mathscr{R})$是一族模糊近似空间,$W\in I(U)$, $L=\underline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}$, $H=\overline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}$ 则L满足(L1)—(L4)、(L6), H满足(U1)—(U4)、(U6)。

证明 由命题3、4,得

$$\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(U)=\lambda U+(1-\lambda)U=U,\quad \overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\varnothing)=\lambda\varnothing+(1-\lambda)\varnothing=\varnothing,$$

则(L1)、(U1)成立。

(L2)—(L4)、(U2)—(U4)易证。

由命题 3、4,得

$$\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p})=\lambda\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p})+(1-\lambda)\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p})\geqslant\lambda\hat{p}+(1-\lambda)\hat{p}=\hat{p},$$

$$\overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p})=\lambda\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p})+(1-\lambda)\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p})\leqslant\lambda\hat{p}+(1\text{-}\lambda)\hat{p}=\hat{p},$$

则(L6)、(U6)成立。

注 3　当 $H=\overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}$, $*=*P$ 时,(U5)成立。其他情况一般不成立,如例 2。

例 2　设 $\cdot=\cdot_M$, $U=\{o_1,o_2,o_3\}$, $\lambda=0.5$, $\hat{p}=\widehat{0.55}$, $\mathscr{R}=\{R_1,R_2\}$, $\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}1&0.8&1\\0.8&1&0.8\\1&0.8&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}1&0.3&1\\0.3&1&0.3\\1&0.3&1\end{pmatrix}$, $W=\frac{0.9}{o_1}+\frac{0}{o_2}+\frac{0.5}{o_3}$。令 $\vartheta=\frac{2}{3}$,则 $U_{\vartheta}=\{\{o_1,o_2,o_3\},\{o_1,o_2\},\{o_1,o_3\},\{o_2,o_3\}\}$。由定义 3 可得

$$\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p}\cdot W)=\frac{0.625}{o_1}+\frac{0.625}{o_2}+\frac{0.55}{o_3},\quad \hat{p}\cdot\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\frac{0.6}{o_1}+\frac{0.6}{o_2}+\frac{0.55}{o_3}。$$

显然,(L5)不成立。

命题 6　设$(U,\mathscr{R})$是一族模糊近似空间, $\vartheta\in I$,有

(1) 对分明集 $V\subseteq U$, $\vartheta=\frac{|V|}{|U|}$,则

$$V\leqslant\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(V),\quad \overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(U-V)\leqslant U-V;$$

$$V\leqslant\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(V),\quad \overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(U-V)\leqslant U-V;$$

$$V\leqslant\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(V),\quad \overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(U-V)\leqslant U-V。$$

(2) 设 $W,V\in I(U)$, $\vartheta>0.5$,则

$$\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\vee\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)\leqslant\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{2\vartheta-1}(W\vee V),\quad \overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{2\vartheta-1}(W\wedge V)\leqslant\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\wedge\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(V);$$

$$\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\vee\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\mathscr{V})\leqslant\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{2\vartheta-1}(W\vee V),\quad \overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{2\vartheta-1}(W\wedge V)\leqslant\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\wedge\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(V);$$

$$\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\vee\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)\leqslant\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{2\vartheta-1}(W\vee V),\quad \overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{2\vartheta-1}(W\wedge V)\leqslant\overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\wedge\overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)。$$

证明　由命题 2 易得,证明略。

下面讨论多粒度变精度($*$,$\cdot$)-模糊粗糙集关于关系族的序性质。

命题 7　设 $\mathscr{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_n,\ n\in\mathbf{N}_+\}$, $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m,\ m\in\mathbf{N}_+\}$是 U 上的模糊关系族,对任意 $W\in I(U)$, $\vartheta\in I$,

(1) 当 $m=n$, $R_i\geqslant S_i$, $i\in\mathbf{N}_+$时,$\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant\underline{\mathrm{O}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)$, $\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\geqslant\overline{\mathrm{O}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)$;

(2) 当 $S\subseteq R$ 时,$\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\geqslant\underline{\mathrm{O}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)$, $\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant\overline{\mathrm{O}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)$。

证明　任取 $g\in U$,(1) 当 $m=n$, $R_i\geqslant S_i$, $i\in\mathbf{N}_+$时,$\neg R_i\leqslant\neg S_i$, $i\in\mathbf{N}_+$,

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)&=\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\underline{R_i}^{\vartheta}(W)(g)=\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg R_i(g,h)\cdot W(h))\\&\leqslant\bigvee_{S_i\in\mathscr{S}}\bigvee_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigwedge_{h\in X}(\neg S_i(g,h)\cdot W(h))=\bigvee_{S_i\in\mathscr{S}}\underline{S_i}^{\vartheta}(W)(g)=\underline{\mathrm{O}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)(g),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)&=\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\overline{R_i}^{\vartheta}(W)(g)=\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(R_i(g,h)*W(h))\\&\geqslant\bigwedge_{S_i\in\mathscr{S}}\bigwedge_{g\in X\in U_{\vartheta}}\bigvee_{h\in X}(S_i(g,h)*W(h))=\bigwedge_{S_i\in\mathscr{S}}\overline{S_i}^{\vartheta}(W)(g)=\overline{\mathrm{O}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)(g)。\end{aligned}$$

(2) 当 $\mathscr{S}\subseteq\mathscr{R}$ 时,

$$\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)=\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\underline{R_i}^{\vartheta}(W)(g)\geqslant\bigvee_{S_i\in\mathscr{S}}\underline{S_i}^{\vartheta}(W)(g)=\underline{\mathrm{O}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)(g),$$

$$\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)=\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\overline{R_i}^{\vartheta}(W)(g)\leqslant\bigwedge_{S_i\in\mathscr{S}}\overline{S_i}^{\vartheta}(W)(g)=\overline{\mathrm{O}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)(g)。$$

命题 8 设 $\mathscr{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_n,\ n\in\mathbf{N}_+\}$, $\mathscr{S}=\{S_1,S_2,\cdots,S_m,\ m\in\mathbf{N}_+\}$ 是 U 上的模糊关系族,对任意 $W\in I(U)$,$\vartheta\in I$,

(1) 当 $m=n$, $R_i\geqslant S_i$, $i\in\mathbf{N}_+$时,$\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant\underline{\mathrm{P}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)$, $\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\geqslant\overline{\mathrm{P}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)$;

(2) 当 $\mathscr{S}\subseteq\mathscr{R}$ 时,$\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant\underline{\mathrm{P}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)$, $\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\geqslant\overline{\mathrm{P}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)$。

证明 任取 $g\in U$

(1) 当 $m=n$, $R_i\geqslant S_i$, $i\in\mathbf{N}_+$时, $\neg R_i\leqslant\neg S_i$, $i\in\mathbf{N}_+$,

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)&=\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\underline{R_i}^{\vartheta}(W)(g)=\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\bigvee_{g\in X\in U_\vartheta}\bigwedge_{h\in X}(\neg R_i(g,h)\cdot W(h))\\&\leqslant\bigwedge_{S_i\in\mathscr{S}}\bigvee_{g\in X\in U_\vartheta}\bigwedge_{h\in X}(\neg S_i(g,h)\cdot W(h))=\bigwedge_{S_i\in\mathscr{S}}\underline{S_i}^{\vartheta}(W)(g)=\underline{P\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)(g),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)&=\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\overline{R_i}^{\vartheta}(W)(g)=\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\bigwedge_{g\in X\in U_\vartheta}\bigvee_{h\in X}(R_i(g,h)*W(h))\\&\geqslant\bigvee_{S_i\in S}\bigwedge_{g\in X\in U_\vartheta}\bigvee_{h\in X}(S_i(g,h)*W(h))=\bigvee_{S_i\in\mathscr{S}}\overline{S_i}^{\vartheta}(W)(g)=\overline{P\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)(g)。\end{aligned}$$

(2) 当 $\mathscr{S}\subseteq\mathscr{R}$ 时,

$$\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)=\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\underline{R_i}^{\vartheta}(W)(g)\leqslant\bigwedge_{S_i\in\mathscr{S}}\underline{S_i}^{\vartheta}(W)(g)=\underline{\mathrm{P}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)(g),$$

$$\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)=\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\overline{R_i}^{\vartheta}(W)(g)\geqslant\bigvee_{S_i\in\mathscr{S}}\overline{S_i}^{\vartheta}(W)(g)=\overline{\mathrm{P}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)(g)。$$

命题 9 设 $\mathscr{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_n,\ n\in\mathbf{N}_+\}$, $\mathscr{S}=\{S_1,S_2,\cdots,S_m,\ m\in\mathbf{N}_+\}$ 是 U 上的模糊关系族,对任意 $W\in I(U)$, $\vartheta\in I$。当 $m=n$, $R_i\geqslant S_i$, $i\in\mathbf{N}_+$时,$\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant\underline{\mathrm{C}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)$, $\overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\geqslant\overline{\mathrm{C}\mathscr{S}}^{\vartheta}(W)$。

证明 由命题 7 和命题 8 易得。

下面证明多粒度变精度($*$, $\cdot$)-模糊粗糙集也满足对偶性。

定理 5 设$(U,\mathscr{R})$是一族模糊近似空间,当 $*$ 和$\cdot$对偶时,对于任意 $W\in I(U)$,有

$$\neg\,\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W),\quad \neg\,\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)。$$

特别地,当$\neg$是标准对合否定时,$\neg\,\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)$。

证明 当 $*$ 和 $\cdot$ 对偶时,对任意 $W\in I(U)$,由定理 1,得

$$\neg\,\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\neg\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\underline{R}^{\vartheta}(W)=\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\overline{R}^{\vartheta}(\neg W)=\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)。$$

同理,$\neg\,\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)$。当$\neg$是标准对合否定时,因为

$$\lambda\,\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\lambda\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\underline{R}^{\vartheta}(W)=\lambda\bigvee_{R\in\mathscr{R}}(1-\overline{R}^{\vartheta}(\neg W))=\lambda(1-\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\overline{R}^{\vartheta}(\neg W))=\lambda(1-\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)),$$

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)&=(1-\lambda)\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\underline{R}^{\vartheta}(W)=(1-\lambda)\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}(1-\overline{R}^{\vartheta}(\neg W))=(1-\lambda)(1-\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\overline{R}^{\vartheta}(\neg W))\\&=(1-\lambda)(1-\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\lambda\,\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)+(1-\lambda)\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\lambda(1-\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W))+(1-\lambda)(1-\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W))\\&=\lambda-\lambda\,\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)+1-\lambda-(1-\lambda)\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)=1-(\lambda\,\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)+(1\text{-}\lambda)\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W))。\end{aligned}$$

因此$\neg\,\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=1-(\lambda\,\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)+(1-\lambda)\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))=\lambda\,\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)+(1-\lambda)\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)=\overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\neg W)$。

3.2 包含性和幂等性

首先,证明多粒度变精度($*$, $\cdot$)-模糊粗糙集满足包含性。

定义 6 设$(U,\mathscr{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_n,\ n\in\mathbf{N}_+\})$是一族模糊近似空间,

(1) 若任意 R_i 是自反的,则称 $\mathscr{R}$ 是自反的;

(2) 若任意 R_i 是·-预序的,则称 $\mathscr{R}$ 是·-预序的;

(3) 若任意 R_i 是 ∗ -预序的,则称 $\mathscr{R}$ 是 ∗ -预序的。

定理 6　设$(U,\mathscr{R})$是一族模糊近似空间, $\mathscr{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_n,\ n\in\mathbf{N}_+\}$是自反的,$\vartheta,\lambda\in I$,则

$$\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant W\leqslant\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W),\quad \underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant W\leqslant\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W),\quad \underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant W\leqslant\overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)。$$

证明　由定理 2,对任意 $R\in\mathscr{R}$ 有 $\underline{R}^{\vartheta}(W)\leqslant W\leqslant\overline{R}^{\vartheta}(W)$,从而

$$\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\underline{R}^{\vartheta}(W)\leqslant W\leqslant\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\overline{R}^{\vartheta}(W)=\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W),$$

$$\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\bigwedge_{R\in\mathscr{R}}\underline{R}^{\vartheta}(W)\leqslant W\leqslant\bigvee_{R\in\mathscr{R}}\overline{R}^{\vartheta}(W)=\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)。$$

显然$\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\lambda\ \underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)+(1-\lambda)\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant W\leqslant\lambda\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)+(1-\lambda)\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)=\overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)$。

由定理 6、(L6)、(U6)、命题 6 (1)可得以下推论。

推论 2　设$(U,\mathscr{R})$是一族模糊近似空间,若 $\mathscr{R}$ 是自反的,$p\in I$, $L=\{\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta},\underline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta},\underline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}\}$, $H=\{\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta},\overline{\mathrm{P}\mathscr{R}}^{\vartheta},\overline{\mathrm{C}\mathscr{R}}^{\vartheta}\}$则(1) $\hat{p}=L(\hat{p})$, $H(\hat{p})=\hat{p}$;(2) 对分明集 $V\subseteq U$, $\vartheta=\dfrac{|V|}{|U|}$,则 $V=L(V)$, $H(U-V)=U-V$。

其次,讨论多粒度变精度(∗ ,·)-模糊粗糙集的幂等性。

定理 7　设$(U,\mathscr{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_n,\ n\in\mathbf{N}_+\})$是一族模糊近似空间,$\vartheta\in I$,任意 $W\in I(U)$,则

(1) 当 $\mathscr{R}$ 是·-传递时,$\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\leqslant\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))$;

(2) 当 $\mathscr{R}$ 是 ∗ -传递时,$\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))\leqslant\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)$。

证明　(1) 当 $\mathscr{R}$ 是·-传递时,任取 $g\in U$,由引理 1(4)、定义 5,得

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))(g)&=\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\underline{R_i}^{\vartheta}(\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))(g)=\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\underline{R_i}^{\vartheta}(\bigvee_{R_j\in\mathscr{R}}\underline{R_j}^{\vartheta}(W))(g)\\&=\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\bigvee_{g\in X\in U_\vartheta}\bigwedge_{h\in X}(\neg R_i(g,h)\cdot\bigvee_{R_j\in\mathscr{R}}\bigvee_{h\in X\in U_\vartheta}\bigwedge_{e\in X}(\neg R_j(h,e)\cdot W(e)))\\&\geqslant\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\bigvee_{g\in X\in U_\vartheta}\bigwedge_{h\in X}(\neg R_i(g,h)\cdot\bigwedge_{e\in X}(\neg R_i(h,e)\cdot W(e)))\\&=\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\bigvee_{g\in X\in U_\vartheta}\bigwedge_{h\in X}\bigwedge_{e\in X}(\neg R_i(g,h)\cdot\neg R_i(h,e)\cdot W(e))\\&\geqslant\bigvee_{R_i\in\mathscr{R}}\bigvee_{g\in X\in U_\vartheta}\bigwedge_{e\in X}(\neg R_i(g,e)\cdot W(e))=\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)。\end{aligned}$$

(2) 当 $\mathscr{R}$ 是 ∗ -传递时,任取 $g\in U$,由引理 1(4)、定义 5,得

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))(g)&=\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\overline{R_i}^{\vartheta}(\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))(g)=\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\overline{R_i}^{\vartheta}(\bigwedge_{R_j\in\mathscr{R}}\overline{R_j}^{\vartheta}(W))(g)\\&=\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\bigwedge_{g\in X\in U_\vartheta}\bigvee_{h\in X}(R_i(g,h)\ast\bigwedge_{R_j\in R}\bigwedge_{h\in X\in U_\vartheta}\bigvee_{e\in X}(R_j(h,e)\ast W(e)))\\&\leqslant\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\bigwedge_{g\in X\in U_\vartheta}\bigvee_{h\in X}(R_i(g,h)\ast\bigvee_{e\in X}(R_i(h,e)\ast W(e))\\&=\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\bigwedge_{g\in X\in U_\vartheta}\bigvee_{h\in X}\bigvee_{e\in X}(R_i(g,h)\ast R_i(h,e)\ast W(e))\\&\leqslant\bigwedge_{R_i\in\mathscr{R}}\bigwedge_{g\in X\in U_\vartheta}\bigvee_{e\in X}(R_i(g,e)\ast W(e))=\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)(g)。\end{aligned}$$

不难发现,悲观/折中变精度(∗ ,·)-模糊粗糙集不满足类似定理 7 的性质。

通过定理 6、7 可得以下结论。

定理 8　设$(U,\mathscr{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_n,\ n\in\mathbf{N}_+\})$ 是一族模糊近似空间,$\vartheta\in I$,任意 $W\in I(U)$,则

(1) 当 $\mathscr{R}$ 是·-预序时,$\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))=\underline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)$;

(2) 当 $\mathscr{R}$ 是 ∗ -预序时,$\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W))=\overline{\mathrm{O}\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)$。

对悲观/折中变精度(∗ ,·)-模糊粗糙集定理 7 不成立,因此也不满足幂等性。

3.3　诱导的模糊拓扑

粗糙集与拓扑有密切的联系,本节讨论多粒度变精度(∗ ,·)-模糊粗糙集和模糊拓扑之间的关系。

定义 7[22]　称 Γ 是 U 上的一个模糊拓扑,若 U 上的一个子集族 Γ 满足:

(T1) $\varnothing$, $U\in\Gamma$;

(T2) 对任意 $W,V\in\Gamma$,有 $W\wedge V\in\Gamma$;

(T3) 对任意$W_i\in\Gamma$, $i\in\Lambda$(其中 Λ 是任意指标集),有$\bigvee\limits_{i\in\Lambda}W_i\in\Gamma$。

此外,称模糊拓扑 Γ 是弱满层的,若 Γ 满足

(TWS) 若$\forall p\in I$有 $\hat{p}\in\Gamma$。

定义 8[22]　称 Ψ 是 U 上的一个模糊余拓扑, 若 U 上的一个子集族 Ψ 满足:

(CT1) $\varnothing$, $U\in\Psi$; (CT2) 对任意 $W,V\in\Psi$,有 $W\vee V\in\Psi$;

(CT3) 对任意$W_i\in\Psi$, $i\in\Lambda$(其中 Λ 是任意指标集),有$\bigwedge\limits_{i\in\Lambda}W_i\in\Psi$。

此外,称模糊余拓扑 Ψ 是弱余满层的,若 Ψ 满足

(CTWS) 若$\forall p\in I$有 $\hat{p}\in\Psi$。

定义 9　(1) 若 Γ 满足(T1)和(T3),则称 Γ 是模糊半拓扑, (2) 若 Ψ 满足(CT1)和(CT3),则称 Ψ 是模糊半余拓扑。

首先,考虑由下近似(上近似)诱导出的模糊拓扑(模糊余拓扑)。

定理 9　设$(U,\mathscr{R})$是一族模糊近似空间,则集族 $\Gamma^{O}=\{W\in I(U):W\leqslant\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\}$, $\Gamma^{P}=\{W\in I(U):W\leqslant\underline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\}$, $\Gamma^{C}=\{W\in I(U):W\geqslant\underline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\}$为弱满层模糊半拓扑。

证明　以 Γ^{O} 为例证明,Γ^{P}、Γ^{C} 类似。

(T1) 由命题 3(L1) $\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(U)=U$,所以 $U\in\Gamma^{O}$;显然$\varnothing\in\Gamma^{O}$。

(T3) 对任意$W_i\in\Gamma^{O}$, $i\in\Lambda$,有$W_i\leqslant\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W_i)$,又由命题 3(L4),有

$$\bigvee_{i\in\Lambda}W_i\leqslant\bigvee_{i\in\Lambda}\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W_i)\leqslant\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\bigvee_{i\in\Lambda}W_i),$$

因此$\bigvee\limits_{i\in\Lambda}W_i\in\Gamma^{O}$。

(TWS) 任取 $p\in I$,由命题 3(L6) 有 $\hat{p}\leqslant\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p})$,因此 $\hat{p}\in\Gamma^{O}$。

定理 10　设$(U,\mathscr{R})$是一族模糊近似空间,则集族 $\Psi^{O}=\{W\in I(U):W\geqslant\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\}$, $\Psi^{P}=\{W\in I(U):W\geqslant\overline{P\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\}$, $\Psi^{C}=\{W\in I(U):W\geqslant\overline{C\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\}$为弱余满层模糊半余拓扑。

证明　以 Ψ^{O} 为例证明,Ψ^{P}、Ψ^{C} 类似。

(CT1) 由命题 3(L1) $\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\varnothing)=\varnothing$,所以$\varnothing\in\Psi^{O}$,显然 $U\in\Psi^{O}$。

(CT3) 对任意$W_i\in\Psi$, $i\in\Lambda$,有 $W_i\geqslant\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W_i)$,又由命题 3 (L4), 有

$$\bigwedge_{i\in\Lambda}W_i\geqslant\bigwedge_{i\in\Lambda}\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W_i)\geqslant\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\bigwedge_{i\in\Lambda}W_i),$$

因此$\bigwedge\limits_{i\in\Lambda}W_i\in\Psi^{O}$。

(CTWS) 由命题 3(U6) 有 $\hat{p}\geqslant\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\hat{p})$,因此 $\hat{p}\in\Psi^{O}$。

下面讨论 Γ^{O} 构成模糊拓扑的充要条件。

定理 11　设$(U,\mathscr{R})$是一族模糊近似空间,其中 $\mathscr{R}$ 是 · -预序的,则集族 Γ^{O} 是模糊拓扑的充要条件是 $\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}$ 满足条件(OT):任取 $\vartheta\in I$, $W,V\in I(U)$, $\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W\wedge V)=\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\wedge\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)$。

证明　$\Rightarrow$。首先,任取 W, $V\in I(U)$, $W\wedge V\leqslant W$, $W\wedge V\leqslant V$,由命题 3(L2),得

$$\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W\wedge V)\leqslant\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\wedge\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)。$$

其次,又由定理 6 和命题 3(L2),得

$$\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\wedge\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)\leqslant W\wedge V\Rightarrow\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\wedge\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V))\leqslant\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W\wedge V)。$$

由定理 8 知,$\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)$,$\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)\in\Gamma^{O}$,又因为 Γ^{O} 是模糊拓扑,所以$\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\wedge\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)\in\Gamma^{O}$,从而

$$\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\wedge\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)\leqslant\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\wedge\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V))\leqslant\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W\wedge V),$$

故$\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W\wedge V)=\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\wedge\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)$成立。

$\Leftarrow$。由定理 9 只须证明 Γ^{O} 满足(T2)即可。任取 W, $V\in\Gamma^{O}$,则$\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W)\geqslant W$, $\underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)\geqslant V$,由条件(OT)得

$$W \wedge V \leqslant \underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W) \wedge \underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V) = \underline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W \wedge V),$$

故 $W \wedge V \in \Gamma^{O}$,即证 Γ^{O} 是模糊拓扑。

接下来,考虑由上近似诱导的模糊余拓扑,证明过程与定理 11 类似。

定理 12　设$(U,\mathscr{R})$是一族模糊近似空间,其中 $\mathscr{R}$ 是 * -预序的,则集族 Ψ^{O} 是模糊余拓扑的充要条件是$\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}$ 满足条件(OCT):任取 $\vartheta \in I,\ W,\ V \in I(U)$,

$$\overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W \vee V) = \overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(W) \vee \overline{O\mathscr{R}}^{\vartheta}(V)。$$

注 4　(1) 当 $\mathscr{R}$ 是自反的,Γ^{O}、Γ^{P}、Γ^{C}、Ψ^{O}、Ψ^{P}、Ψ^{C}中的不等式可变成等式;

(2) 定理 11 和定理 12 的证明依赖于乐观模型的幂等性,但悲观和折中模型一般不具有幂等性。因此,我们无法探讨它们诱导的模糊(余)拓扑的充要条件。

注 5　定义 5 提出的多粒度模型与定义 3 提出的单粒度模型之间存在着以下关系:

(1) 多粒度模型中,当关系族退化为一个关系时,乐观、悲观、折中模型完全相同,都退化为单粒度模型。因此单粒度模型是多粒度模型的特例;

(2) 单粒度模型和多粒度模型性质不同,单粒度模型与乐观模型满足幂等性,而悲观和折中模型不满足幂等性;

(3) 多粒度模型可以处理群体决策、多源信息、多属性决策等涉及多个关系的问题,应用范围更广、处理复杂问题的能力更强。

本文模型和文献[10,12-13]中的变精度模型都是同源的,即都是基于绝对误差的。不同变精度模型之间的区别与联系可总结如下表 1。由表 1 可以看出,相较于其他模型,本文模型更易于计算,性质也更完善。

表 1　不同变精度模型的比较
Table 1　Comparisons of different variable precision models

模型来源	计算	多粒度	包含性	幂等性	模糊拓扑
文献[10]	复杂	×	×	×	×
文献[13]	复杂	×	✓	×	✓
文献[12]	复杂	×	×	×	×
本文	简单	✓	✓	✓	✓(定义与文献[13]不同)

4　结语

本文基于绝对误差的思想,提出了一种形式简洁、易于计算的变精度(* ,·)-模糊粗糙集,结合多粒度思想引入了包含乐观、悲观和折中 3 个基本模型的多粒度变精度(* ,·)-模糊粗糙集,证明了模型具有良好的性质(包含性、幂等性),并研究了模型诱导的拓扑结构。

本文对新模型的研究仅停留在理论层面,还未应用于实际。因此,未来我们将尝试将新模型应用于属性约简,三支决策和图像处理等领域。此外,借鉴绝对误差思想,我们将探讨基于模糊邻域(系统)和模糊覆盖的变精度模糊粗糙集模型,以进一步拓展粗糙集的理论框架和应用范围。

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3):338-353.

[2] PAWLAK Z. Rough set[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11:341-356.

[3] WANG Changzhong, HU Qinghua, WANG Xizhao, et al. Feature selection based on neighborhood discrimination index[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2017, 29(7):2986-2999.

[4] CAO Junqin, ZHANG Xueying, ZHANG Chunmei, et al. Improved convolutional neural network combined with rough set theory for data aggregation algorithm[J]. Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, 2020, 11:647-654.

[5] 宋苏洋,叶军,曾广财,等. 基于优化可辨识矩阵的多粒度粗糙集属性约简算法[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(5):52-62.
SONG Suyang, YE Jun, ZENG Guangcai, et al. Multi-granularity rough set attribute reduction algorithm based on optimized discernibility matrix[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2024, 59(5):52-62.

[6] 王莉. 随机多属性子空间的 ReliefF 加权邻域粗糙集与属性约简[J]. 计算机工程与应用,2024,60(8):69-77.
WANG Li. ReliefF weighted neighborhood rough sets and attribute reduction based on random multi-attribute subspaces[J]. Journal of Computer Engineering and Applications, 2024, 60(8):69-77.

[7] JIA Fan, LIU Peide. A novel three-way decision model under multiple-criteria environment[J]. Information Sciences, 2019, 471:29-51.

[8] BAI Juncheng, SUN Bingzhen, CHU Xiaoli, et al. Neighborhood rough set-based multiattribute prediction approach and its application of gout patients[J]. Applied Soft Computing, 2022, 114:108127.

[9] ZIARKO W. Variable precision rough set model[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1993, 46(1):39-59.

[10] YAO Yanqing, MI Jusheng, LI Zhoujun. A novel variable precision (θ,σ)-fuzzy rough set model based on fuzzy granules [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 236:58-72.

[11] WANG Chunyong, HU Baoqing. Granular variable precision fuzzy rough sets with general fuzzy relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015, 275:39-57.

[12] LI Wei, YANG Bin, QIAO Junsheng. (O,G)-granular variable precision fuzzy rough sets based on overlap and group functions[J]. Computational and Applied Mathematics, 2023, 42(3):1-30.

[13] ZOU Dandan, XU Yaoliang, LI Lingqiang, et al. Novel variable precision fuzzy rough sets and three-way decision model with three strategies[J]. Information Sciences, 2023, 629:222-248.

[14] QIAN Yuhua, LIANG Jiye, YAO Yiyu, et al. MGRS: a multi-granulation rough set[J]. Information Sciences, 2010, 180(6):949-970.

[15] ZHAN Jianming, ZHANG Kai, LIU Peide, et al. A novel group decision-making approach in multi-scale environments[J]. Applied Intelligence, 2023, 53(12):15127-15146.

[16] JU Hengrong, DING Weiping, SHI Zhenquan, et al. Attribute reduction with personalized information granularity of nearest mutual neighbors[J]. Information Sciences, 2022, 613:114-138.

[17] JIANG Deng, ZHAN Jianming, XU Zeshui, et al. Regret-theoretic multi-attribute decision-making model using three-way framework in multi-scale information systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(6):3988-4001.

[18] SUN Bingzhen, ZHANG Xinrui, QI Chang, et al. Neighborhood relation-based variable precision multigranulation Pythagorean fuzzy rough set approach for multiattribute group decision making[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2022, 151:1-20.

[19] 郑文彬,李进金,张燕兰. 基于矩阵的可变粒度变精度邻域粗糙集近似集更新方法[J]. 模糊系统与数学,2022,36(1):97-109.
ZHENG Wenbin, LI Jinjin, ZHANG Yanlan. Matrix-based approaches for updating approximations in variable granulation variable precision neighborhood multigranulation rough sets while neighborhood classes decreasing[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2022, 36(1):97-109.

[20] YE Jin, SUN Bingzhen, ZHAN Jianming, et al. Variable precision multi-granulation composite rough sets with multidecision and their applications to medical diagnosis[J]. Information Sciences, 2022, 615:293-322.

[21] MI J S, YEE L, ZHAO H Y, et al. Generalized fuzzy rough sets determined by a triangular norm[J]. Information Sciences, 2008, 178(16):3203-3213.

[22] HÖHLE U, RODABAUGH S E. Mathematics of fuzzy sets: logic, topology, and measure theory[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.

(编辑:陈丽萍)