文章编号:1671-9352(2025)09-0133-04 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.166

一类四阶反应扩散方程解的爆破时刻下界

沈旭辉
(山西财经大学应用数学学院, 山西 太原 030006)

摘要:研究一类四阶反应扩散方程解的爆破现象,通过推导适用于高维空间的 Sobolev 不等式,构造合适的辅助函数和利用微分不等式技巧,给出方程解的爆破时刻下界。

关键词:四阶反应扩散方程;爆破;爆破时刻下界
中图分类号:O175 **文献标志码**:A
引用格式:沈旭辉. 一类四阶反应扩散方程解的爆破时刻下界[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(9):133-136,142.

Lower bound for the blow-up time of solutions to a class of fourth-order reaction-diffusion equations

SHEN Xuhui
(School of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan 030006, Shanxi, China)

Abstract: The blow-up phenomenon of solutions to a class of fourth-order reaction-diffusion equations are considered. By deriving a Sobolev inequality suitable for high-dimensional spaces, constructing appropriate auxiliary functions, and employing differential inequality techniques, a lower bound for the blow-up time of solutions is provided.

Key words: fourth-order reaction-diffusion equation; blow-up; lower bound for the blow-up time

0 引言

非线性反应扩散方程解的爆破问题一直备受学者们关注,这方面的研究涉及广泛,包括燃烧、人口动力学、不可压缩流体以及二元合金中的相位分离等应用领域。

众所周知,解的有限时刻爆破对于评估系统的非稳态行为至关重要。确定解的爆破时刻对于系统的非稳态预测和控制具有重要意义,特别是在核能发电和环境治理等实际问题中尤为突出。因此,本文着重关注解在有限时间内发生爆破时的爆破时刻估计。虽然关于解的爆破时刻上界有很多研究方法[1],但在实际应用中,爆破时刻的下界更为重要,因为它对于爆破现象的控制和预测更具实际意义。

Payne 等[2]对某类二阶反应扩散方程解的爆破进行了研究,利用微分不等式技巧推导出解的爆破时刻下界。在他们工作的影响下,学者们开始探讨解的爆破时刻下界,并取得一系列成果[3-4]。目前,许多关于解的爆破时刻下界的研究集中在三维空间 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 上。相对于这些研究,对 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 2)$ 以及四阶反应扩散方程解的爆破时刻下界的探讨则相对较少。因此,本文重点考虑下列四阶反应扩散问题解的爆破现象:

$$\begin{cases} u_t+\Delta^2 u=k(t)f(u), & (x,t)\in\Omega\times(0,t^*), \\ u=\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0 \text{ 或}(u=\Delta u=0), & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,t^*), \\ u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0, & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2024-05-14; **网络出版时间**:2025-04-09 11:32:39
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61473180); 山西省青年科技研究基金资助项目(20210302124533)
作者简介:沈旭辉(1990—),男,副教授,博士,研究方向为偏微分方程. E-mail:xhuishen@ sxufe.edu.cn

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 2)$ 表示具有光滑边界的有界区域,Δ 是拉普拉斯算子,$\frac{\partial u}{\partial\nu}$表示解 $u(x,t)$ 在边界上的外法向导数,$k(t)$ 和 f 是非负函数,$u_0(x)$ 是初始条件,并且满足相容性条件,t^* 表示解 $u(x,t)$ 可能的爆破时刻。问题(1)作为一类四阶反应扩散方程,被广泛用于描述相变、薄膜理论、润滑理论等物理现象[5]。此外,其他关于四阶非线性反应扩散问题解的爆破结果还可以参考文献[6]。

Zhao 等[7]考虑问题(1)解的爆破现象,通过构造适当的辅助函数,当 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 2)$ 时,给出解在有限时刻爆破充分条件,推导出解的爆破时刻上界;当 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N=2,3)$ 时,使用微分不等式技巧,给出解的爆破时刻下界。然而,当 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 3)$ 时,解的爆破时刻下界尚未解决。基于此,本文通过推导一个关键的 Sobolev 不等式,构造完全不同的辅助函数,并利用微分不等式技巧,给出当 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 2)$ 时解的爆破时刻下界。

1 预备知识

为了得到当 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 2)$ 时,问题(1)解的爆破时刻下界,本节先给出证明中需要的一些重要引理和结论。

引理 1[8] 令 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 2)$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域,假设 $u(x)$ 为非负的 C^2-函数且 $u(x)=0$, $x\in\partial\Omega$,则有

$$\left(\int_\Omega u^{\frac{Np}{N-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-1}{N}}\leqslant\frac{p}{2}\prod_{k=1}^{N}\left(\int_\Omega u^{p-1}|u_{x_k}|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{N}},\quad p>1。\tag{2}$$

引理 2 令 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 2)$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域,假设 $u(x)$ 为非负的 C^2-函数且 $u(x)=0$, $x\in\partial\Omega$,则有

$$\int_\Omega u^{2p}\mathrm{d}x\leqslant C\left(\int_\Omega(\Delta u)^2\mathrm{d}x\right)^p,\tag{3}$$

其中

$$C=\left(\frac{p(N-1)}{N\sqrt{N(p-1)}}\right)^{4p}|\Omega|^{1-\frac{N-4}{N}p},\quad |\Omega|=\int_\Omega\mathrm{d}x,\tag{4}$$

且满足 $N=2$ 时 $p>1$ 以及当 $N\geqslant 3$ 时 $1<p<\frac{N}{N-2}$。

证明 对式(2)使用 Hölder 不等式和算术-几何均值不等式,得

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{N}\left(\int_\Omega u^{p-1}|u_{x_k}|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{N}}&\leqslant\left(\int_\Omega u^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left[\prod_{k=1}^{N}\left(\int_\Omega u^{p-2}|u_{x_k}|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{N}}\right]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(\int_\Omega u^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{N}\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\int_\Omega u^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}。\end{aligned}\tag{5}$$

再次使用 Hölder 不等式推出

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x&=-\frac{1}{p-1}\int_\Omega u^{p-1}\Delta u\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{p-1}\left(\int_\Omega u^{2(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega(\Delta u)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}}。\end{aligned}\tag{6}$$

将式(6)代入式(5),有

$$\begin{aligned}&\prod_{k=1}^{N}\left(\int_\Omega u^{p-1}|u_{x_k}|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{N}}\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{N(p-1)}}\left(\int_\Omega u^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u^{2(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_\Omega(\Delta u)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}}。\end{aligned}\tag{7}$$

进一步地,由 Hölder 不等式知

$$\int_{\Omega} u^{p}\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{\Omega} u^{\frac{Np}{N-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-1}{N}} |\Omega|^{\frac{1}{N}}, \tag{8}$$

$$\int_{\Omega} u^{2(p-1)}\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{\Omega} u^{\frac{Np}{N-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2(N-1)(p-1)}{Np}} |\Omega|^{\frac{2(N-1)-p(N-2)}{Np}}, \tag{9}$$

其中当 $N=2$ 时 $p>1$ 以及当 $N\geqslant 3$ 时,$1<p<\dfrac{2(N-1)}{N-2}$。将式(8)和式(9)代入式(7)推出

$$\prod_{k=1}^{N}\left(\int_{\Omega} u^{p-1}|u_{x_k}|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{N}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N(p-1)}}|\Omega|^{\frac{2(N-1)-p(N-4)}{4Np}}\left(\int_{\Omega} u^{\frac{Np}{N-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(N-1)(2p-1)}{2Np}}\left(\int_{\Omega}(\Delta u)^{2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}}。 \tag{10}$$

结合引理 1 得

$$\left(\int_{\Omega} u^{\frac{Np}{N-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-1}{N}} \leqslant \frac{p}{2\sqrt{N(p-1)}}|\Omega|^{\frac{2(N-1)-p(N-4)}{4Np}}\left(\int_{\Omega} u^{\frac{Np}{N-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(N-1)(2p-1)}{2Np}}\left(\int_{\Omega}(\Delta u)^{2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}},$$

即

$$\int_{\Omega} u^{\frac{Np}{N-1}}\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{2\sqrt{N(p-1)}}\right)^{\frac{2Np}{N-1}}|\Omega|^{1-\frac{p(N-4)}{2(N-1)}}\left(\int_{\Omega}(\Delta u)^{2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{Np}{2(N-1)}}。 \tag{11}$$

令 $\dfrac{Np}{N-1}=2p$ 可推出

$$\int_{\Omega} u^{2p}\mathrm{d}x \leqslant C\left(\int_{\Omega}(\Delta u)^{2}\mathrm{d}x\right)^{p},$$

其中 C 在式(4)中给出。

2　解的爆破时刻下界

接下来,给出问题(1)解的爆破时刻 t^* 下界。事实上,由文献[7]中的定理 2.1 知问题(1)的爆破解存在且依 $L^2(\Omega)$ 范数爆破,此外结合

$$\int_{\Omega} u^{2}\mathrm{d}x \leqslant \lambda_1 \int_{\Omega}(\Delta u)^{2}\mathrm{d}x,$$

其中 λ_1 为下列 Clamped Plate 问题的第一特征值[9]:

$$\begin{cases} \Delta^2 u_1-\lambda_1 u_1=0, & x\in\Omega, \\ u=\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0 \text{ 或}(u=\Delta u=0), & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,t^*)。\end{cases}$$

易知解必然依 $\int_{\Omega}(\Delta u)^{2}\mathrm{d}x$ 发生爆破。假设

$$0<\frac{k'(t)}{k(t)}\leqslant\alpha,\quad t\geqslant 0,\quad f(s)\leqslant\beta s^{p},\quad s\geqslant 0, \tag{12}$$

其中 $\alpha,\beta>0$ 且 $p>1$。辅助函数定义为

$$D(t)=k^{\frac{2}{p-1}}(t)\int_{\Omega}(\Delta u)^{2}\mathrm{d}x。 \tag{13}$$

定理 1　设 $u(x,t)$ 为问题(1)的非负解,若条件(12)成立且解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破,则有解的爆破时刻 t^* 的下界

$$t^* \geqslant \int_{D(0)}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\tau}{C_1\tau+C_2\tau^{p}},$$

其中

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{2\alpha}{p-1}, \\ C_2=\dfrac{C}{2}。\end{cases} \tag{14}$$

证明 利用式(13)、散度定理和式(1)中的边界条件得

$$\begin{aligned} D'(t) &= \frac{2}{p-1}k'(t)k^{\frac{2}{p-1}-1}(t)\int_\Omega(\Delta u)^2\mathrm{d}x+2k^{\frac{2}{p-1}}(t)\int_\Omega\Delta u(\Delta u)_t\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{p-1}\frac{k'(t)}{k(t)}k^{\frac{2}{p-1}}(t)\int_\Omega(\Delta u)^2\mathrm{d}x+2k^{\frac{2}{p-1}}(t)\int_\Omega\Delta^2uu_t\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{2\alpha}{p-1}k^{\frac{2}{p-1}}(t)\int_\Omega(\Delta u)^2\mathrm{d}x+2k^{\frac{2}{p-1}}(t)\int_\Omega\Delta^2u(k(t)f(u)-\Delta^2u)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{2\alpha}{p-1}D(t)+2\beta k^{\frac{p+1}{p-1}}(t)\int_\Omega\Delta^2uu^p\mathrm{d}x-2k^{\frac{2}{p-1}}(t)\int_\Omega(\Delta^2u)^2\mathrm{d}x。\end{aligned} \tag{15}$$

对式(15)右端 $k^{\frac{p+1}{p-1}}(t)\int_\Omega\Delta^2uu^p\mathrm{d}x$ 使用 Hölder 不等式推出

$$\begin{aligned} k^{\frac{p+1}{p-1}}(t)\int_\Omega\Delta^2uu^p\mathrm{d}x &\leqslant \left(\frac{1}{2\beta}k^{\frac{2p}{p-1}}(t)\int_\Omega u^{2p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(2\beta k^{\frac{2}{p-1}}(t)\int_\Omega(\Delta^2u)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{1}{4\beta}k^{\frac{2p}{p-1}}(t)\int_\Omega u^{2p}\mathrm{d}x+\beta k^{\frac{2}{p-1}}(t)\int_\Omega(\Delta^2u)^2\mathrm{d}x。\end{aligned} \tag{16}$$

将式(16)代入式(15),有

$$D'(t)\leqslant\frac{2\alpha}{p-1}D(t)+\frac{1}{2}k^{\frac{2p}{p-1}}(t)\int_\Omega u^{2p}\mathrm{d}x。 \tag{17}$$

使用引理 2 中的 Sobolev 不等式(3),改写式(17)为

$$D'(t)\leqslant C_1D(t)+C_2D^p(t), \tag{18}$$

其中 C_1、C_2 在式(14)中给出。对式(18)从 0 到 t 积分,则有

$$t\geqslant\int_{D(0)}^{D(t)}\frac{\mathrm{d}\tau}{C_1\tau+C_2\tau^p}。$$

由于 $u(x,t)$ 在有限时刻 t^* 爆破,令 $t\to t^{*-}$时,爆破时刻的下界为

$$t^*\geqslant\int_{D(0)}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\tau}{C_1\tau+C_2\tau^p}。$$

3 结论

本文研究一类四阶反应扩散方程解的爆破现象。引理 2 中给出关键不等式,克服了在 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant2)$ 上给出解的爆破时刻下界的难点,同时运用微分不等式技巧,给出当区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant2)$ 时问题(1)解的爆破时刻下界。本文的方法为此类问题的研究提供一定的借鉴。除此之外,本文回答以及补充了 Zhao 等[7]提出的一个公开问题。

参考文献:

[1] LEVINE H A. Nonexistence of global weak solutions to some properly and improperly posed problems of mathematical physics: the method of unbounded fourier coefficients[J]. Mathematische Annalen, 1975, 214(3):205-220.

[2] PAYNE L E, SCHAEFER P W. Lower bounds for blow-up time in parabolic problems under Neumann conditions[J]. Applicable Analysis, 2006, 85(10):1301-1311.

[3] 欧阳柏平,肖胜中. 非线性边界条件下非局部多孔介质抛物方程解的爆破现象[J]. 应用数学学报,2023,46(3):478-492.
OUYANG Baiping, XIAO Shengzhong. blow-up phenomena of solutions to a nonlocal porous medium parabolic equation with space-dependent coefficients and inner absorption terms under nonlinear boundary conditions[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2023, 46(3):478-492.

(下转第 142 页)