山东大学学报(理学版)2025 年 8 月 第 60 卷 第 8 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.8, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)08-0095-11 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.427

双线性 θ-型 C-Z 算子在双权变指数 Herz 空间上的估计

吴奇,杨沿奇*,陶双平
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:利用双权估计和函数分解方法,并借助乘积 $L^{p(\cdot)}$ 空间上的加权有界性得到双线性 θ-型 Calderón-Zygmund 算子在双权可变指数 Herz 空间上的有界性。
关键词:θ-型 Calderón-Zygmund 算子;权函数;变指数 Herz 空间;有界性
中图分类号:O174.2 **文献标志码**:A
引用格式:吴奇,杨沿奇,陶双平. 双线性 θ-型 C-Z 算子在双权变指数 Herz 空间上的估计[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(8):95-105.

Estimate of the bilinear θ-type C-Z operator on two weight Herz spaces with variable exponents

WU Qi, YANG Yanqi*, TAO Shuangping
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: The boundedness of the bilinear θ-type Calderón-Zygmund operator on the double-weight variable exponent Herz space is obtained by using the double-weight estimation and the function decomposition method, as well as the weighted boundedness on the product $L^{p(\cdot)}$ space.
Key words: θ-type Calderón-Zygmund operator; weight function; Herz spaces with variable exponents; boundedness

1 引言及主要结果

在奇异积分算子的相关研究中,1985 年 Yabuta 提出 θ-型 Calderón-Zygmund 算子的概念[1],同时 Coifman 阐明了基于 Coifman-Meyer 意义下的拟微分算子和这类算子等价的充要条件[2]。2002 年,刘宗光和陆善镇[3]分析了这类算子在 Lebesgue 空间上的加权端点估计。2005 年,为进一步阐明与经典多线性奇异积分的区别,张璞和徐罕[4]研究了多线性 θ-型 Calderón-Zygmund 算子在 Lebesgue 空间上的最优极大估计及端点估计结果。此后出现了许多关于多线性 θ-型 Calderón-Zygmund 算子的研究结果[5-7]。首先回顾双线性 θ-型 Calderón-Zygmund 算子的定义。设 θ 是 $\mathbf{R}^+=(0,\infty)$ 上的非负递增函数,满足

$$\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t}\mathrm{d}t<\infty 。$$

本文称定义在 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\setminus\{(x,y_1,y_2): x=y_1=y_2\}$ 的核函数 $K(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是双线性 θ-型 Calderón-Zygmund 核,若其满足

(1) 当 $x\neq y_i$, $i=1,2$ 时,有

$$|K(x,y_1,y_2)|\leqslant C\left(\sum_{i=1}^{2}|x-y_i|\right)^{-2n};$$

(2) 当 $2|x-z|<\max\{|x-y_1|,|x-y_2|\}$ 时,存在一个常数 C,使得

收稿时间:2023-10-09; **网络出版时间**:2024-12-02 17:17:59
基金项目:西北师范大学博士科研启动金资助项目(202003101203); 2022 年应用数学湖北省重点实验室(湖北大学)开放基金项目(HBAM202205)
第一作者:吴奇(1998—),男,硕士研究生,研究方向为调和分析. E-mail:wuqi12090310@126.com
* **通信作者**:杨沿奇(1991—),女,讲师,硕士研究生导师,博士,研究方向为调和分析及其应用. E-mail:yangyq@nwnu.edu.cn

$$|K(x,y_1,y_2)-K(z,y_1,y_2)|\leqslant C\theta\left(\frac{|x-z|}{\sum_{i=1}^{2}|x-y_i|}\right)\left[\sum_{i=1}^{2}|x-y_i|\right]^{-2n}。$$

现在本文给出 $\mathbf{R}^n$ 上的双线性 θ-型 Calderón-Zygmund 算子的表述形式：

$$T_\theta(f_1,f_2)(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}K(x,y_1,y_2)f_1(y_1)f_2(y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2。$$

其中 $f_1, f_2\in L_c^\infty$ 且 $x\notin \operatorname{supp} f_1\cap\operatorname{supp} f_2$。容易看出，当 $\theta(t)=t^\delta,\ 0<\delta\leqslant 1$ 时，算子 T_θ 就是具有标准核的经典双线性 Calderón-Zygmund 算子。

后来，许多学者开始关注这类算子在不同函数空间上的有界性质。郑涛涛等[8]证明了 T_θ 在非齐次度量空间上的有界性。杨沿奇和陶双平[9-10]分别证明了在可变指数 Herz 空间和 Morrey-Herz 型 Hardy 空间中 θ-型 Calderón-Zygmund 算子的有界性。此后，Guliyev 进一步证明了 θ-型 Calderón-Zygmund 算子在广义加权变指数 Morrey 空间上有界[11]。

变指数函数空间在数学、物理学、工程学等领域起着至关重要的作用，因此受到了研究者的广泛关注[12-14]。变指数 Herz 空间的概念是由 Izuki 定义的[15]，这类空间的性质以及许多算子在其上的有界性得到了深入的研究[16-18]。最近，Izuki 和 Noi[19]引入了双权变指数 Herz 空间定义及其上的分解办法。

受以上研究结果的启发，本文将研究双线性 θ-型 Calderón-Zygmund 算子在双权变指数 Herz 空间上的有界性。为此，需要回顾一些概念和记号。

记 $p(\cdot):\mathbf{R}^n\to(0,\infty)$，则 $p^-:=\operatorname{ess}\inf_{x\in\mathbf{R}^n}p(x),\ p^+:=\operatorname{ess}\sup_{x\in\mathbf{R}^n}p(x)$。集合 $\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$ 包含所有满足 $p^->1$ 和 $p^+<\infty$ 的 $p(\cdot)$；$\mathscr{P}_0(\mathbf{R}^n)$ 包含所有满足 $p^->0$ 和 $p^+<\infty$ 的 $p(\cdot)$。记 $p'(\cdot)$ 为 $p(\cdot)$ 的共轭指数，即 $1/p(\cdot)+1/p'(\cdot)=1$。

设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$，则变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 的定义为

$$L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n):=\left\{f\text{ 是 }\mathbf{R}^n\text{ 上的可测函数：}\int_{\mathbf{R}^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

显然 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 是一个带有范数的 Banach 函数空间，其中

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}}:=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbf{R}^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant 1\right\}。$$

空间 $L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 的定义为 $L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n):=\{f$：对任意的紧集 $K\subset\mathbf{R}^n,\ f\chi_K\in L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)\}$，其中 χ_S 表示可测集 $S\subset\mathbf{R}^n$ 的特征函数。

定义 1 设 $p\in(1,\infty)$，若存在正常数 C，对于 $\mathbf{R}^n$ 中所有球 B，w 都满足

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{1-p'}\mathrm{d}x\right)^{p-1}\leqslant C,$$

则称 w 属于 A_p 权，若 w 对于 a.e. $x\in\mathbf{R}^n$ 满足 $Mw(x)\leqslant Cw(x)$，则称 $w\in A_1$。

定义 2[19] 设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$，$\omega$ 为正可测函数且 $w\in A_p(\cdot)$，如果存在一个正常数 C，使得对于 $\mathbf{R}^n$ 中所有的球 B 都满足

$$\frac{1}{|B|}\|w\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}}\|w^{-1}\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}}<C。$$

定义 3 设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$，$w$ 为 $A_{p(\cdot)}$ 权函数，则加权变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(w)$ 的定义为

$$L^{p(\cdot)}(w):=\left\{f\text{ 是 }\mathbf{R}^n\text{ 上的可测函数：}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(w)}:=\|fw\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}<\infty\right\}。$$

显然 $L^{p(\cdot)}(w)$ 是 Banach 空间，并且 $w\in A_{p(\cdot)}$ 时，文献[20]中证明了 Hardy-Littlewood 极大算子 M 在 $L^{p(\cdot)}(w)$ 中是有界的，这里 M 定义为

$$Mf(x):=\sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y。$$

定义 4 给定 $\mathbf{R}^n$ 上的实值可测函数 $\alpha(\cdot)$，若存在常数 $C>0$，使得对任意的 $x,\ y\in\mathbf{R}^n$，有

$$|\alpha(x)-\alpha(y)|\leqslant\frac{C}{\log(e+1/|x-y|)}$$

成立,则称 $\alpha(\cdot)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是局部 log-Hölder 连续的。若存在常数 $C>0$,使得对所有的 $x\in\mathbf{R}^n$,有

$$|\alpha(x)-\alpha(0)|\leqslant\frac{C}{\log(e+1/|x|)},$$

成立,则称 $\alpha(\cdot)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是原点 log-Hölder 连续的,并记作 $\mathscr{P}_0^{\log}(\mathbf{R}^n)$。若存在常数 $C>0$ 和$\alpha_\infty\in\mathbf{R}$,使得对所有的$x\in\mathbf{R}^n$有

$$|\alpha(x)-\alpha_\infty|\leqslant\frac{C}{\log(e+|x|)},$$

成立,则称 $\alpha(\cdot)$ 在无穷远处是 log-Hölder 连续的,并记作 $\mathscr{P}_\infty^{\log}(\mathbf{R}^n)$。当 $\alpha(\cdot)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上局部和无穷远处 log-Hölder连续时,称 $\alpha(\cdot)$ 是全局 log-Hölder 连续的,记作 $\mathscr{P}^{\log}(\mathbf{R}^n)$。

下面本文将给出双权变指数 Herz 空间的定义,为此引入以下符号。对于每个 $k\in\mathbf{Z}$,定义 $B_k:=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|\leqslant 2^k\}$, $D_k:=B_k\backslash B_{k-1}=\{x\in\mathbf{R}^n:2^{k-1}<|x|\leqslant 2^k\}$, $\chi_k:=\chi_{D_k}$, $\tilde{\chi}_m=\chi_m$, $m\geqslant 1$, $\tilde{\chi}_0=\chi_{B_0}$。此外,可变混合序列空间 $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))$ 定义如下。

设 w 是非负可测函数,给定函数序列$\{f_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$,定义模量:

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}(\{f_j\}_j):=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\inf\left\{\lambda_j:\int_{\mathbf{R}^n}\left(\frac{|f_j(x)w(x)|}{\lambda_j^{\frac{1}{q(x)}}}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant 1\right\},$$

其中 $\lambda^{1/\infty}=1$,如果 $q^+<\infty$, $q(\cdot)\leqslant p(\cdot)$,上述式子可以写成

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}(\{f_j\}_j)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left\||f_jw|^{q(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}}。$$

其范数为

$$\|\{f_j\}_j\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}:=\inf\{\mu>0:\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))}(\{f_j/\mu\}_j)\leqslant 1\}。$$

定义 5[19]　设$w_1\in A_p$权函数,$w_2\in A_{p(\cdot)}$, $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$, $q(\cdot)\in\mathscr{P}_0(\mathbf{R}^n)$, $\alpha(\cdot)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$。

(1) 非齐次双权变指数 Herz 空间 $K_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w_1,w_2)$是由满足以下值有限的$f\in L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$构成,

$$\|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w_1,w_2)}:=\|f\chi_{B_0}\|_{L^{p(\cdot)}(w_2)}+\|\{[w_1(B_k)]^{\alpha(\cdot)/n}f\tilde{\chi}_k\}_{k=1}^{\infty}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w_2))}。$$

(2) 齐次双权变指数 Herz 空间 $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w_1,w_2)$是由满足以下值有限的$f\in L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$构成,

$$\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w_1,w_2)}:=\|\{[w_1(B_k)]^{\alpha(\cdot)/n}f\chi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w_2))}。$$

本文主要结果如下:

定理 1　设 T_θ 是双线性 θ-型 Calderón-Zygmund 算子,令 $v\in A_r$,其中 $r\in[1,\infty)$, w, $w_i\in A_{p_i(\cdot)}$满足 $w=w_1w_2$, $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$, $p_i(\cdot)\in\mathscr{P}^{\log}(\mathbf{R}^n)\cap\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$,满足 $1/p(x)=1/p_1(x)+1/p_2(x)\,(x\in\mathbf{R}^n)$, $\alpha(\cdot)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, $q(\cdot)\in\mathscr{P}_0(\mathbf{R}^n)$, $\alpha_i(\cdot)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)\cap\mathscr{P}_0^{\log}(\mathbf{R}^n)\cap\mathscr{P}_\infty^{\log}(\mathbf{R}^n)$, $q_i(\cdot)\in\mathscr{P}_0(\mathbf{R}^n)\cap\mathscr{P}_0^{\log}(\mathbf{R}^n)\cap\mathscr{P}_\infty^{\log}(\mathbf{R}^n)$, $i=1,2$,分别满足 $\alpha(x)=\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$, $1/q(x)=1/q_1(x)+1/q_2(x)$,对于常数 $\delta_{i2}\in(0,1)$, $\delta\in(0,1)$,设

$$w_i^-=\begin{cases}\delta, & \alpha_i^-\geqslant 0,\\ r, & \alpha_i^-<0,\end{cases}\qquad w_i^+=\begin{cases}r, & \alpha_i^+\geqslant 0,\\ \delta, & \alpha_i^+<0,\end{cases}$$

如果满足$-n\delta_{i1}<w_i^-\alpha_i^-$ 和 $w_i^+\alpha_i^+<n\delta_{i2}$, $i=1,2$,则存在常数 C 对每个$f_i\in\dot{K}_{p_i(\cdot)}^{\alpha_i(\cdot),q_i(\cdot)}(v,w_i)$, $i=1,2$,有

$$\|T_\theta(f_1,f_2)\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(v,w)}\leqslant C\|f_1\|_{\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(v,w_1)}\|f_2\|_{\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(v,w_2)}。$$

2　相关引理

在证明主要结果之前,需要以下引理。

引理 1[19]　设 $\alpha(\cdot)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$, $q(\cdot)\in\mathscr{P}_0(\mathbf{R}^n)$, $w_1\in A_r$其中 $r\in[1,\infty)$, $w_2\in A_{p(\cdot)}$,如果 $\alpha(\cdot)$和 $q(\cdot)$在无穷远处是 log-Hölder 连续的,则

$$K_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w_1,w_2)=K_{p(\cdot)}^{\alpha_\infty,q_\infty}(w_1,w_2)。$$

此外,如果 $\alpha(\cdot)$ 和 $q(\cdot)$ 在原点是 log-Hölder 连续的,则有

$$\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(w_1,w_2)}\approx\left(\sum_{k\leqslant 0}w_1(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\|f\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w_2)}^{q(0)}\right)^{\frac{1}{q(0)}}+\left(\sum_{k>0}w_1(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n}\|f\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w_2)}^{q_\infty}\right)^{\frac{1}{q_\infty}}。$$

引理 2[19] 若 $\alpha(\cdot)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$,且在原点和无穷远处都是 log-Hölder 连续的,则对任意的 $k\in\mathbf{Z}$ 和 $x\in D_k$ 有

$$w(D_k)^{\alpha(x)}\approx w(D_k)^{\alpha_\infty},\quad k\geqslant 0;$$
$$w(D_k)^{\alpha(x)}\approx w(D_k)^{\alpha(0)},\quad k\leqslant -1。$$

引理 3[21] 设 $r\in[1,\infty)$ 且 $w\in A_r$,那么存在常数 $\delta\in(0,1)$ 和 $C>0$ 对于所有 $\mathbf{R}^n$ 中的球 B 和所有可测子集 $S\subset B$,有以下不等式成立:

$$\frac{w(B)}{w(S)}\leqslant C\left(\frac{B}{S}\right)^r,$$
$$\frac{w(S)}{w(B)}\leqslant C\left(\frac{S}{B}\right)^\delta。$$

引理 4[19] 设 $k,\ l\in\mathbf{Z},\ w\in A_q$,其中 $q\in[1,\infty),\ \delta\in(0,1)$ 是引理 2.3 中出现的常数,$\alpha(\cdot)\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 且在原点和无穷远处都是对数 log-Hölder 连续的,则对于任意的 $x\in C_k$ 和 $y\in C_l$,有

$$[w(B_k)]^{\alpha(x)}\lesssim[w(B_l)]^{\alpha(y)}\times\begin{cases}2^{(k-l)nw^+\alpha^+}, & 0<2^l\leqslant 2^{k-1};\\ 1, & 2^{k-1}<2^l\leqslant 2^{k+1};\\ 2^{(k-l)mw^-\alpha^-}, & 2^l>2^{k+1},\end{cases}$$

其中隐含常数与 x、y、k 和 l 无关。

引理 5[18] 设 $p(\cdot),p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in\mathscr{P}_0(\mathbf{R}^n)$,使得对于 $x\in\mathbf{R}^n$,有 $1/p(x)=1/p_1(x)+1/p_2(x)$,则存在一个与函数 f 和 g 无关的常数 C_{p,p_1},使得对任意 $f\in L^{p_1(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 和 $g\in L^{p_2(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$,都有

$$\|fg\|_{L^{p(\cdot)}}\leqslant C_{p,p_1}\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}}\|g\|_{L^{p_2(\cdot)}},$$

对于 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n),\ w\in A_{p(\cdot)}$ 其中 $w=w_1w_2$,由 Hölder 不等式,有

$$\|fg\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\leqslant C_{p,p_1}\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\|g\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}。$$

引理 6[18] 设 $0<p<\infty$, $\delta>0$ 则存在一个正常数 C, 使得对于非负数列 $\{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$,有

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{-|k-j|\delta a_k}\right)^p\right)^{1/p}\leqslant C\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j^p\right)^{1/p}。$$

引理 7[22] 设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n),\ p_i(\cdot)\in\mathscr{P}^{\log}(\mathbf{R}^n)\cap\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$,使得对于 $x\in\mathbf{R}^n$ 有 $1/p(x)=1/p_1(x)+1/p_2(x),\ i=1,2,\ w,\ w_i\in A_{p_i(\cdot)}$ 满足 $w=w_1w_2$,若 T_θ 是一个双线性 θ-型 Calderón−Zygmund 算子,则有

$$\|T_\theta(f_1,f_2)\|_{L^{p(\cdot)}(w)}\lesssim\|f_1\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\|f_2\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}。$$

引理 8[23] 如果 $p(\cdot)\in\mathscr{P}^{\log}(\mathbf{R}^n)\cap\mathscr{P}(\mathbf{R}^n),\ w\in A_{p(\cdot)}$,那么存在常数 $\delta_1,\ \delta_2\in(0,1)$ 和 $C>0$,对所有 $\mathbf{R}^n$ 中的球 B 和所有可测子集 $S\subset B$ 有以下不等式成立:

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(w)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(w)}}\leqslant C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_1},$$
$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p'(\cdot)}(w^{-1})}}{\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(w^{-1})}}\leqslant C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_2}。$$

3 定理 1 的证明

令 f_1 和 f_2 为具有紧支集的有界函数,本文将它们写成

$$f_i=\sum_{l=-\infty}^{\infty}f_i\chi_l:=\sum_{l=-\infty}^{\infty}f_{il},\quad i=1,2。$$

由引理 1,有

$$\begin{aligned}\|T_\theta(f_1,f_2)\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(v,w)}&\approx\Big(\sum_{k=-\infty}^{-1}\|v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}T_\theta(f_1,f_2)\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\Big)^{\frac{1}{q(0)}}\\&\quad+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\|v(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n}T_\theta(f_1,f_2)\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\Big)^{\frac{1}{q_\infty}}\\&:=E+F。\end{aligned}$$

利用引理 4,将 f_i 分解成 3 部分:

$$f_i=\sum_{l=-\infty}^{k-2}f_{il}+\sum_{l=k-1}^{k+1}f_{il}+\sum_{l=k+2}^{\infty}f_{il}。$$

因此 $T_\theta(f_1,f_2)$ 可以分解成如下 9 部分:

$$E_1:=\Big(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\Big\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}\sum_{j=-\infty}^{k-2}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\Big)^{\frac{1}{q(0)}},$$

$$E_2:=\Big(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\Big\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}\sum_{j=k-1}^{k+1}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\Big)^{\frac{1}{q(0)}},$$

$$E_3:=\Big(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\Big\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}\sum_{j=k+2}^{\infty}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\Big)^{\frac{1}{q(0)}},$$

$$E_4:=\Big(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\Big\|\sum_{l=k-1}^{k+1}\sum_{j=-\infty}^{k-2}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\Big)^{\frac{1}{q(0)}},$$

$$E_5:=\Big(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\Big\|\sum_{l=k-1}^{k+1}\sum_{j=k-1}^{k+1}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\Big)^{\frac{1}{q(0)}},$$

$$E_6:=\Big(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\Big\|\sum_{l=k-1}^{k+1}\sum_{j=k+2}^{\infty}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\Big)^{\frac{1}{q(0)}},$$

$$E_7:=\Big(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\Big\|\sum_{l=k+2}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-2}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\Big)^{\frac{1}{q(0)}},$$

$$E_8:=\Big(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\Big\|\sum_{l=k+2}^{\infty}\sum_{j=k-1}^{k+1}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\Big)^{\frac{1}{q(0)}},$$

$$E_9:=\Big(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\Big\|\sum_{l=k+2}^{\infty}\sum_{j=k+2}^{\infty}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\Big)^{\frac{1}{q(0)}},$$

$$F_1:=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}v(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n}\Big\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}\sum_{j=-\infty}^{k-2}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\Big)^{\frac{1}{q_\infty}},$$

$$F_2:=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}v(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n}\Big\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}\sum_{j=k-1}^{k+1}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\Big)^{\frac{1}{q_\infty}},$$

$$F_3:=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}v(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n}\Big\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}\sum_{j=k+2}^{\infty}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\Big)^{\frac{1}{q_\infty}},$$

$$F_4:=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}v(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n}\Big\|\sum_{l=k-1}^{k+1}\sum_{j=-\infty}^{k-2}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\Big)^{\frac{1}{q_\infty}},$$

$$F_5:=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}v(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n}\Big\|\sum_{l=k-1}^{k+1}\sum_{j=k-1}^{k+1}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\Big)^{\frac{1}{q_\infty}},$$

$$F_6:=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}v(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n}\Big\|\sum_{l=k-1}^{k+1}\sum_{j=k+2}^{\infty}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\Big)^{\frac{1}{q_\infty}},$$

$$F_7:=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}v(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n}\Big\|\sum_{l=k+2}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-2}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\Big)^{\frac{1}{q_\infty}},$$

$$F_8:=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}v(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n}\Big\|\sum_{l=k+2}^{\infty}\sum_{j=k-1}^{k+1}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\Big)^{\frac{1}{q_\infty}},$$

$$F_9:=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}v(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n}\Big\|\sum_{l=k+2}^{\infty}\sum_{j=k+2}^{\infty}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\Big\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q_\infty}\Big)^{\frac{1}{q_\infty}}。$$

显然

$$E \leqslant C\sum_{i=1}^{9} E_i, \quad F \leqslant C\sum_{i=1}^{9} F_i。$$

利用引理 8、定义 5 及 Hölder 不等式可以得到以下结果,当 $l \leqslant k-1$ 时,有

$$\begin{aligned}\left\|2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n} f_{il}\mathrm{d}y_i\chi_k\right\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} &\lesssim 2^{-kn}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)}\|f_iw_i\chi_l\|_{L^{p_i(\cdot)}}\|\chi_l w_i^{-1}\|_{L^{p_i'(\cdot)}} \\ &\lesssim 2^{-kn}|B_k|\,\|\chi_{B_k}\|^{-1}_{L^{p_i'(\cdot)}(w_i^{-1})}\|\chi_{B_l}\|_{L^{p_i'(\cdot)}(w_i^{-1})}\|f_i\chi_l\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} \\ &\lesssim 2^{(l-k)n\delta_{i2}}\|f_{il}\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)};\end{aligned} \tag{1}$$

当 $l=k$ 时,有

$$\begin{aligned}\left\|2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n} f_{il}\mathrm{d}y_i\chi_k\right\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} &\lesssim 2^{-kn}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)}\|f_{il}w_i\chi_l\|_{L^{p_i(\cdot)}}\|\chi_l w_i^{-1}\|_{L^{p_i'(\cdot)}} \\ &\lesssim 2^{-kn}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)}\|\chi_{B_l}\|_{L^{p_i'(\cdot)}(w_i^{-1})}\|f_i\chi_l\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} \\ &\lesssim \|f_{il}\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)};\end{aligned} \tag{2}$$

当 $l \geqslant k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}\left\|2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n} f_{il}\mathrm{d}y_i\chi_k\right\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} &\lesssim 2^{-kn}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)}\|f_iw_i\chi_l\|_{L^{p_i(\cdot)}}\|\chi_l w_i^{-1}\|_{L^{p_i'(\cdot)}} \\ &\lesssim 2^{-kn}\|\chi_{B_k}\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)}\|\chi_{B_l}\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)}\|\chi_{B_l}\|^{-1}_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} \\ &\quad\times\|\chi_{B_l}\|_{L^{p_i'(\cdot)}(w_i^{-1})}\|f_i\chi_l\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} \\ &\lesssim 2^{(l-k)n(1-\delta_{i1})}\|f_{il}\|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)}。\end{aligned} \tag{3}$$

现在开始估计 E,因为 f_1 和 f_2 可以互换,看到 E_2、E_3 和 E_6 的估计值与 E_4、E_7 和 E_8 的估计值类似,所以,只需要估计 E_1、E_2、E_3、E_5、E_6 和 E_9 即可。

估计 E_1,当 $l,\ j\leqslant k-2$ 时,对于 $i=1,2$,可以推出

$$|x-y_i|\geqslant|x|-|y_i|>2^{k-1}-2^{\min\{l,j\}}\geqslant 2^{k-2}, \quad x\in D_k,\ y_1\in D_l,\ y_2\in D_j,$$

因此,

$$\begin{aligned}|T_\theta(f_{1l},f_{2j})(x)| &\lesssim \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|f_{1l}(y_1)||f_{2j}(y_2)|}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \\ &\lesssim 2^{-2kn}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{1l}(y_1)||f_{2j}(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2。\end{aligned}$$

因为 $1/p(\cdot)=1/p_1(\cdot)+1/p_2(\cdot)$,且 $w=w_1w_2$,利用 Hölder 不等式,所以

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}\sum_{j=-\infty}^{k-2}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\right\|_{L^{p(\cdot)}(w)} &\lesssim 2^{-2kn}\left\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}\sum_{j=-\infty}^{k-2}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{1l}(y_1)|\mathrm{d}y_1\int_{\mathbf{R}^n}|f_{2j}(y_2)|\mathrm{d}y_2\chi_k\right\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \\ &\lesssim \left\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{1l}(y_1)|\mathrm{d}y_1\chi_k\right\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)} \\ &\quad\times\left\|\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{2j}(y_2)|\mathrm{d}y_2\chi_k\right\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}。\end{aligned} \tag{4}$$

因为 $\alpha(0)=\alpha_1(0)+\alpha_2(0)$,且 $1/q(0)=1/q_1(0)+1/q_2(0)$,利用 Hölder 不等式,所以

$$\begin{aligned}E_1 &\lesssim \Bigg(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\left\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{1l}(y_1)|\mathrm{d}y_1\chi_k\right\|^{q(0)}_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)} \\ &\quad\times\left\|\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{2j}(y_2)|\mathrm{d}y_2\chi_k\right\|^{q(0)}_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\Bigg)^{\frac{1}{q(0)}} \\ &\lesssim \left(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha_1(0)q_1(0)/n}\left\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{1l}(y_1)|\mathrm{d}y_1\chi_k\right\|^{q_1(0)}_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\right)^{\frac{1}{q_1(0)}} \\ &\quad\times\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha_2(0)q_2(0)/n}\left\|\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{2j}(y_2)|\mathrm{d}y_2\chi_k\right\|^{q_2(0)}_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\right)^{\frac{1}{q_2(0)}} \\ &:=E_{1,1}\times E_{1,2}。\end{aligned}$$

因为 $n\delta_{i2}-w_i^+\alpha_i^+>0$,利用式(1),以及引理 2、4、6,有

$$
\begin{aligned}
E_{1,1} &\lesssim \Big\{\sum_{k=-\infty}^{-1} v(B_k)^{\alpha_1(0)q_1(0)/n}\Big(\sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{(l-k)n\delta_{12}}\|f_{1l}\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\Big)^{q_1(0)}\Big\}^{\frac{1}{q_1(0)}}\\
&\lesssim \Big\{\sum_{k=-\infty}^{-1}\Big(\sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{(l-k)(n\delta_{12}-w_1^+\alpha_1^+)}\|v(B_l)^{\alpha_1(\cdot)/n}f_{1l}\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\Big)^{q_1(0)}\Big\}^{\frac{1}{q_1(0)}}\\
&\lesssim \Big\{\sum_{l=-\infty}^{-3}\|v(B_l)^{\alpha_1(\cdot)/n}f_{1l}\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q_1(0)}\Big\}^{\frac{1}{q_1(0)}}\\
&\lesssim \|f_1\|_{\dot K_{p_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(v,w_1)},\\
E_{1,2} &\lesssim \Big\{\sum_{k=-\infty}^{-1} v(B_k)^{\alpha_2(0)q_2(0)/n}\Big(\sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{(l-k)n\delta_{22}}\|f_{2l}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\Big)^{q_2(0)}\Big\}^{\frac{1}{q_2(0)}}\\
&\lesssim \Big\{\sum_{k=-\infty}^{-1}\Big(\sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{(l-k)(n\delta_{22}-w_2^+\alpha_2^+)}\|v(B_l)^{\alpha_2(\cdot)/n}f_{2l}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\Big)^{q_2(0)}\Big\}^{\frac{1}{q_2(0)}}\\
&\lesssim \Big\{\sum_{l=-\infty}^{-3}\|v(B_l)^{\alpha_2(\cdot)/n}f_{2l}\|_{L^{p_2(\cdot)}}^{q_2(0)}(w_2)\Big\}^{\frac{1}{q_2(0)}}\\
&\lesssim \|f_2\|_{\dot K_{p_2(\cdot)}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(v,w_2)},
\end{aligned}
$$

所以

$$
E_1\lesssim \|f_1\|_{\dot K_{p_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(v,w_1)}\|f_2\|_{\dot K_{p_2(\cdot)}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(v,w_2)}。
$$

估计 E_2,当 $l\leqslant k-2$, $k-1\leqslant j\leqslant k+1$ 时,对于 $i=1,2$,可以推出

$$
|x-y_i|\geqslant|x|-|y_i|\geqslant 2^{k-2},\quad x\in D_k,\quad y_1\in D_l,
$$

因此

$$
\begin{aligned}
|T_\theta(f_{1l},f_{2j})(x)| &\lesssim \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|f_{1l}(y_1)||f_{2j}(y_2)|}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\\
&\lesssim 2^{-2kn}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{1l}(y_1)||f_{2j}(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2。
\end{aligned}
$$

由 $\alpha(0)=\alpha_1(0)+\alpha_2(0)$,且 $1/q(0)=1/q_1(0)+1/q_2(0)$,利用 Hölder 不等式,有

$$
\begin{aligned}
E_2 &\lesssim \Big(\sum_{k=-\infty}^{-1} v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\Big\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{1l}(y_1)|\mathrm{d}y_1\chi_k\Big\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q(0)}\\
&\quad\times\Big\|\sum_{j=k-1}^{k+1}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{2j}(y_2)|\mathrm{d}y_2\chi_k\Big\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}^{q(0)}\Big)^{\frac{1}{q(0)}}\\
&\lesssim \Big(\sum_{k=-\infty}^{-1} v(B_k)^{\alpha_1(0)q_1(0)/n}\Big\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{1l}(y_1)|\mathrm{d}y_1\chi_k\Big\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q_1(0)}\Big)^{\frac{1}{q_1(0)}}\\
&\quad\times\Big(\sum_{k=-\infty}^{-1} v(B_k)^{\alpha_2(0)q_2(0)/n}\Big\|\sum_{j=k-1}^{k+1}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{2j}(y_2)|\mathrm{d}y_2\chi_k\Big\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}^{q_2(0)}\Big)^{\frac{1}{q_2(0)}}\\
&:=E_{2,1}\times E_{2,2},
\end{aligned}
$$

显然

$$
E_{2,1}=E_{1,1}\lesssim \|f_1\|_{\dot K_{p_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(v,w_1)}。
$$

由于 $n\delta_{i2}-w_i^+\alpha_i^+>0$,利用式(1)、(2)、(3),以及引理 2、4,有

$$
\begin{aligned}
& v(B_k)^{\alpha_2(0)/n}\Big\|\sum_{j=k-1}^{k+1}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{2j}(y_2)|\mathrm{d}y_2\chi_k\Big\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\\
&\lesssim v(B_k)^{\alpha_2(0)/n}2^{-(n\delta_{22}-w_2^+\alpha_2^+)}\|f_2\chi_{k-1}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}+v(B_k)^{\alpha_2(0)/n}\|f_2\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\\
&\quad+v(B_k)^{\alpha_2(0)/n}2^{n(1-\delta_{21})}\|f_2\chi_{k+1}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\\
&\lesssim 2^{-(n\delta_{22}-w_2^+\alpha_2^+)}\|v(B_{k-1})^{\alpha_2(\cdot)/n}f_2\chi_{k-1}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}+\|v(B_k)^{\alpha_2(\cdot)/n}f_2\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\\
&\quad+2^{n(1-\delta_{21})}\|v(B_{k+1})^{\alpha_2(\cdot)/n}f_2\chi_{k+1}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\\
&\lesssim \sum_{j=k-1}^{k+1}2^{(j-k)n}\|v(B_j)^{\alpha_2(\cdot)/n}f_{2j}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}。
\end{aligned}
$$

现在估计 $E_{2,2}$，通过上式有

$$\begin{aligned}E_{2,2} &\lesssim \left\{\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\sum_{j=k-1}^{k+1}2^{(j-k)n}\|v(B_j)^{\alpha_2(\cdot)/n}f_{2j}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\right)^{q_2(0)}\right\}^{\frac{1}{q_2(0)}}\\ &\lesssim \left\{\sum_{k=-\infty}^{-1}\|v(B_k)^{\alpha_2(\cdot)/n}f_2\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}^{q_2(0)}\right\}^{\frac{1}{q_2(0)}}\\ &\lesssim \|f_2\|_{\dot K_{p_2}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(v,w_2)},\end{aligned}$$

因此

$$E_2 \lesssim \|f_1\|_{\dot K_{p_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(v,w_1)}\|f_2\|_{\dot K_{p_2(\cdot)}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(v,w_2)}。$$

估计 E_3，当 $l\leqslant k-2,\ j\geqslant k+2$ 时，有

$$|x-y_1|\geqslant|x|-|y_1|\geqslant 2^{k-2},\quad |x-y_2|\geqslant|y_2|-|x|>2^{j-2},\quad x\in D_k,\ y_1\in D_l,\ y_2\in D_j,$$

因此

$$\begin{aligned}|T_\theta(f_{1l},f_{2j})(x)| &\lesssim \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|f_{1l}(y_1)||f_{2j}(y_2)|}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\\ &\lesssim 2^{-kn}2^{-jn}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{1l}(y_1)||f_{2j}(y_2)|\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2。\end{aligned}$$

由 $\alpha(0)=\alpha_1(0)+\alpha_2(0)$，且 $1/q(0)=1/q_1(0)+1/q_2(0)$，利用 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}E_3 &\lesssim \Bigg(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\left\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{1l}(y_1)|\,\mathrm{d}y_1\chi_k\right\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q(0)}\\ &\quad\times\left\|\sum_{j=k+2}^{\infty}2^{-jn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{2j}(y_2)|\mathrm{d}y_2\chi_k\right\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}^{q(0)}\Bigg)^{\frac{1}{q(0)}}\\ &\lesssim \left(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha_1(0)q_1(0)/n}\left\|\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{-kn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{1l}(y_1)|\,\mathrm{d}y_1\chi_k\right\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q_1(0)}\right)^{\frac{1}{q_1(0)}}\\ &\quad\times\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha_2(0)q_2(0)/n}\left\|\sum_{j=k+2}^{\infty}2^{-jn}\int_{\mathbf{R}^n}|f_{2j}(y_2)|\,\mathrm{d}y_2\chi_k\right\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}^{q_2(0)}\right)^{\frac{1}{q_2(0)}}\\ &:=E_{3,1}\times E_{3,2},\end{aligned}$$

显然

$$E_{3,1}=E_{1,1}\lesssim\|f_1\|_{\dot K_{p_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(v,w_1)}。$$

现在估计 $E_{3,2}$，由于 $w_2^-\alpha_2^-+n\delta_{21}>0$，利用式(3)，以及引理 2、4、6，有

$$\begin{aligned}E_{3,2} &\lesssim \left\{\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha_2(0)q_2(0)/n}\left(\sum_{j=k+2}^{\infty}2^{(k-j)n\delta_{21}}\|f_{2j}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\right)^{q_2(0)}\right\}^{\frac{1}{q_2(0)}}\\ &\lesssim \left\{\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\sum_{j=k+2}^{\infty}2^{(k-j)(w_2^-\alpha_2^-+n\delta_{21})}\|v(B_j)^{\alpha_2(\cdot)/n}f_{2j}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\right)^{q_2(0)}\right\}^{\frac{1}{q_2(0)}}\\ &\lesssim \left\{\sum_{j=-\infty}^{1}\|v(B_j)^{\alpha_2(\cdot)/n}f_{2j}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}^{q_2(0)}\right\}^{\frac{1}{q_2(0)}}\\ &\lesssim \|f_2\|_{\dot K_{p_2(\cdot)}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(v,w_2)},\end{aligned}$$

因此

$$E_3\lesssim\|f_1\|_{\dot K_{p_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(v,w_1)}\|f_2\|_{\dot K_{p_2(\cdot)}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(v,w_2)}。$$

估计 E_5，由 $1/q(0)=1/q_1(0)+1/q_2(0)$，利用引理 2、4、6、7，有

$$\begin{aligned}E_5 &\lesssim \left(\sum_{k=-\infty}^{-1}v(B_k)^{\alpha(0)q(0)/n}\left\|\sum_{l=k-1}^{k+1}\sum_{j=k-1}^{k+1}T_\theta(f_{1l},f_{2j})\chi_k\right\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)}\right)^{\frac{1}{q(0)}}\\ &\lesssim \left\{\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\sum_{l=k-1}^{k+1}\|v(B_l)^{\alpha_1(\cdot)/n}f_{1l}\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}\right)^{q_1(0)}\right\}^{\frac{1}{q_1(0)}}\\ &\quad\times\left\{\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\sum_{j=k-1}^{k+1}\|v(B_j)^{\alpha_2(\cdot)/n}f_{2j}\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}\right)^{q_2(0)}\right\}^{\frac{1}{q_2(0)}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-1} \| v(B_k)^{\alpha_1(\cdot)/n} f_1 \chi_k \|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q_1(0)} \right\}^{\frac{1}{q_1(0)}} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-1} \| v(B_k)^{\alpha_2(\cdot)/n} f_2 \chi_k \|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}^{q_2(0)} \right\}^{\frac{1}{q_2(0)}} \\
&\lesssim \| f_1 \|_{\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(v,w_1)} \| f_2 \|_{\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(v,w_2)}。
\end{aligned}
$$

通过交换 f_1 和 f_2,可以看出 E_6 的估计与 $E_{2,2}$ 和 $E_{3,2}$ 的估计类似,E_9 的估计与 $E_{3,2}$ 类似。现在将 E_i 的估计值放在一起,可以得到

$$
E \lesssim \| f_1 \|_{\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}(v,w_1)} \| f_2 \|_{\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}(v,w_2)}。
$$

现在估计 F,由于 f_1 和 f_2 可以互换,可以看到 F_2、F_3 和 F_6 的估计值与 F_4、F_7 和 F_8 的估计值类似,因此,只需要估计 F_1、F_2、F_3、F_5、F_6 和 F_9 即可。估计方法类似于 E_1、E_2、E_3、E_5、E_6 和 E_9 的估计。在这里只给出 F_1 的估计。

当 $l, j \leqslant k-2$ 时,$\alpha_\infty = \alpha_{1\infty} + \alpha_{2\infty}$, $1/q_\infty = 1/q_{1\infty} + 1/q_{2\infty}$,利用式(4)和 Hölder 不等式,有

$$
\begin{aligned}
F_1 &\lesssim \left(\sum_{k=0}^{\infty} v(B_k)^{\alpha_\infty q_\infty/n} \left\| \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \int_{\mathbf{R}^n} | f_{1l}(y_1) | \,\mathrm{d}y_1 \chi_k \right\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q_\infty} \right. \\
&\quad \left. \times \left\| \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \int_{\mathbf{R}^n} | f_{2j}(y_2) | \,\mathrm{d}y_2 \chi_k \right\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}^{q_\infty} \right)^{\frac{1}{q_\infty}} \\
&\lesssim \left(\sum_{k=0}^{\infty} v(B_k)^{\alpha_{1\infty} q_{1\infty}/n} \left\| \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \int_{\mathbf{R}^n} | f_{1l}(y_1) | \,\mathrm{d}y_1 \chi_k \right\|_{L^{p_1(\cdot)}(w_1)}^{q_{1\infty}} \right)^{\frac{1}{q_{1\infty}}} \\
&\quad \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} v(B_k)^{\alpha_{2\infty} q_{2\infty}/n} \left\| \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \int_{\mathbf{R}^n} | f_{2j}(y_2) | \,\mathrm{d}y_2 \chi_k \right\|_{L^{p_2(\cdot)}(w_2)}^{q_{2\infty}} \right)^{\frac{1}{q_{2\infty}}} \\
&:= F_{1,1} \times F_{1,2}。
\end{aligned}
$$

利用式(1),以及引理 2、4,有

$$
\begin{aligned}
F_{1,i} &\lesssim \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} \| v(B_l)^{\alpha_i(\cdot)/n} f_{il} \|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} 2^{(k-l)(w_i^+ \alpha_i^+ - n\delta_{i2})} \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sum_{l=0}^{k} \| v(B_l)^{\alpha_i(\cdot)/n} f_{il} \|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} 2^{(k-l)(w_i^+ \alpha_i^+ - n\delta_{i2})} \right)^{q_{i\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{i\infty}}} \\
&\lesssim \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} \| v(B_l)^{\alpha_i(\cdot)/n} f_{il} \|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} 2^{(k-l)(w_i^+ \alpha_i^+ - n\delta_{i2})} \right)^{q_{i\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{i\infty}}} \\
&\quad + \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \| v(B_l)^{\alpha_i(\cdot)/n} f_{il} \|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} 2^{(k-l)(w_i^+ \alpha_i^+ - n\delta_{i2})} \right)^{q_{i\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{i\infty}}} \\
&:= I_1 + I_2。
\end{aligned}
$$

估计 I_1,因为 $w_i^+ \alpha_i^+ - n\delta_{i2} < 0$,所以

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} \| v(B_l)^{\alpha_i(\cdot)/n} f_{il} \|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} 2^{(k-l)(w_i^+ \alpha_i^+ - n\delta_{i2})} \right)^{q_{i\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{i\infty}}} \\
&\lesssim \| f_i \|_{\dot{K}_{p_i(\cdot)}^{\alpha_i(\cdot),q_i(\cdot)}(v,w_i)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{(k-l)(w_i^+ \alpha_i^+ - n\delta_{i2})} \right)^{q_{i\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{i\infty}}} \\
&\lesssim \| f_i \|_{\dot{K}_{p_i(\cdot)}^{\alpha_i(\cdot),q_i(\cdot)}(v,w_i)}。
\end{aligned}
$$

估计 I_2,因为 $w_i^+ \alpha_i^+ - n\delta_{i2} < 0$,利用引理 6,有

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \| v(B_l)^{\alpha_i(\cdot)/n} f_{il} \|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)} 2^{(k-l)(w_i^+ \alpha_i^+ - n\delta_{i2})} \right)^{q_{i\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{i\infty}}} \\
&\lesssim \left\{ \sum_{l=0}^{k} \| v(B_l)^{\alpha_i(\cdot)/n} f_{il} \|_{L^{p_i(\cdot)}(w_i)}^{q_{i\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{i\infty}}} \\
&\lesssim \| f_i \|_{\dot{K}_{p_i(\cdot)}^{\alpha_i(\cdot),q_i(\cdot)}(v,w_i)},
\end{aligned}
$$

所以

$$F_1 \lesssim \|f_1\|_{\dot{K}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}_{p_1(\cdot)}(v,w_1)} \|f_2\|_{\dot{K}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}_{p_2(\cdot)}(v,w_2)},$$

同理可证

$$F_i \lesssim \|f_1\|_{\dot{K}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}_{p_1(\cdot)}(v,w_1)} \|f_2\|_{\dot{K}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}_{p_2(\cdot)}(v,w_2)}。$$

现在将 F_i 估计值放在一起,可以得到

$$F \lesssim \|f_1\|_{\dot{K}^{\alpha_1(\cdot),q_1(\cdot)}_{p_1(\cdot)}(v,w_1)} \|f_2\|_{\dot{K}^{\alpha_2(\cdot),q_2(\cdot)}_{p_2(\cdot)}(v,w_2)}。$$

定理 1 证毕。

参考文献:

[1] YABUTA K. Generalizations of Calderón-Zygmund operators[J]. Studia Mathematica, 1985, 82(1):17-31.

[2] COIFMAN R R, MEYER Y. Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels[M]. Paris: Société mathématique de France, 1978: 76-116.

[3] LIU Z G, LU S Z. Endpoint estimates for commutators of Calderón-Zygmund type operators[J]. Kodai Mathematical Journal, 2002, 25(1):79-88.

[4] ZHANG P, XU H. Sharp weighted estimates for commutators of Calderón-Zygmund type operators[J]. Acta Mathematica Sinica, 2005, 48(4):625-636.

[5] DIENING L, RUICKA M. Calderón-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics[J]. Journal FürDie Reine und Angewandte Mathematik, 2003(563):197-220.

[6] LIU W Q, LU S Z. Calderón-Zygmundoperaors on the Hardy spaces of weighted Herz type[J]. Approximation Theory and Its Applications, 1997, 13(2):1-10.

[7] SHEN C H, XU J S. A vector-valued estimate of multilinear Calderón-Zygmund operators in Herz-Morrey spaces with variable exponents[J]. Hokkaido Mathematical Journal, 2017, 46(3):351-380.

[8] ZHENG T T, TAO X X, WU X M. Bilinear Calderón-Zygmund operators of type $\omega(t)$ on non-homogeneous space[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2014(1):1-18.

[9] YANG Y Q, TAO S P. θ-type Calderón-Zygmund operators and commutators in variable exponents Herz space[J]. Open Mathematics, 2018, 16(1):1607-1620.

[10] YANG Y Q, TAO S P. θ-type Calderón-Zygmund operators on Morrey and Morrey-Herz-type Hardy spaces with variable exponents[J]. Politehn Univ Bucharest Sci Bull Ser A Appl Math Phys, 2020, 82(1):35-44.

[11] GULIYEV V S. Calderón-Zygmund operators with kernels of Dini's type on generalized weighted variable exponent Morrey spaces[J]. Positivity, 2021, 25(5):1771-1788.

[12] ACERBI E, MINGIONE G. Regularity results for stationary electro-rheological fluids[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2002, 164(3):213-259.

[13] MINGIONE G, ACERBI E. Gradient estimates for a class of parabolic systems[J]. Duke Mathematical Journal, 2007, 136(1):285-320.

[14] CRUZ-URIBE D, FIORENZA A, MARTELL J M, et al. The boundedness of classical operators on variable *L-p* spaces[J]. Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, 2006, 31(1):239-264.

[15] IZUKI M. Herz and amalgam spaces with variable exponent, the Haar wavelets and greediness of the wavelet system[J]. East journal on approximations, 2009, 15(1):87-110.

[16] IZUKI M. Vector-valued inequalities on Herz spaces and characterizations of Herz-Sobolev spaces with variable exponent[J]. Glasnik Matematicki, 2010, 45(2):475-503.

[17] IZUKI M. Boundedness of commutators on Herz spaces with variable exponent[J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2010, 59(2):199-213.

[18] IZUKI M, NOI T. Boundedness of fractional integrals on weighted Herz spaces with variable exponent[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2016, 2016(1):1-11.

[19] IZUKI M, NOI T. Two weighted herz spaces with variable exponents[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2020, 43(1):169-200.

[20] PÉREZ C. On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted *L-p*

spaces with different weights[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1995, 71(1):135-157.
[21] ZUZAO J D. Fourier analysis[M]. Providence: American Mathematical Soc, 2001:133-156.
[22] LU G Z, ZHANG P. Multilinear Calderón−Zygmund operators with kernels of Dini's type and applications[J]. Nonlinear Analysis, 2014, 107:92-117.
[23] IZUKI M, NOI T. An intrinsic square function on weighted Herz spaces with variable exponent[J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2017, 11(3):799-816.

(编辑:胡春燕)

(上接第 77 页)

[3] DEHGARDI N, AZARI M. More on Mostar index[J]. Appl Math E−Notes, 2020, 20:316-322.
[4] HAYAT F, ZHOU Bo. On cacti with large Mostar index[J]. Filomat, 2019, 33(15):4865-4873.
[5] TEPEH A. Extremal bicyclic graphs with respect to Mostar index[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 355:319-324.
[6] TRATNIK N. Computing the Mostar index in networks with applications to molecular graphs[J]. Iranian Journal of Mathematical Chemistry, 2021, 12(1):1-18.
[7] GHANBARI N, ALIKHANI S. Mostar index and edge Mostar index of polymers[J]. Computational and Applied Mathematics, 2021, 40:1-21.
[8] HAVARE O C. Mostar index (Mo) and edge Mo index for some cycle related graphs[J]. Rom J Math Comput Sci, 2020, 10:53-66.
[9] GHALAVAND A, ASHRAFI A R, HAKIMI-NEZHAAD M. On Mostar and edge Mostar indices of graphs[J]. Journal of Mathematics, 2021, 2021(1):6651220.
[10] AROCKIARAJ M, CLEMENT J, TRATNIK N. Mostar indices of carbon nanostructures and circumscribed donut benzenoid systems[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2019, 119(24):1-11.
[11] ALI A, DOŠLIĆ T. Mostar index: results and perspectives[J]. Applied mathematics and computation, 2021, 404:1-9.
[12] LI S C, LI X C, ZHU Z X. On tricyclic graphs with minimal energ[J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 2008, 59(2):397-419.
[13] CHEN L L, LI X L, LIU M M. Tricyclic graphs with maximal revised Szeged index[J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 177:71-79.

(编辑:祁业卿)