山东大学学报(理学版)2025 年 8 月 第 60 卷 第 8 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.8, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)08-0052-05 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.301

图的全局罗马控制数与罗马控制数的关系

郝国亮[1,2],吴愉琪[2,3],姜海宁[1]

(1.菏泽学院数学与统计学院, 山东 菏泽 274015; 2.东华理工大学理学院, 江西 南昌 330013; 3.南昌理工学院计算机信息工程学院, 江西 南昌 330044)

摘要:利用图的阶、边数以及度等参数得到了全局罗马控制数与罗马控制数间一些新的不等式关系。

关键词:罗马控制;全局罗马控制;控制数

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

引用格式:郝国亮,吴愉琪,姜海宁. 图的全局罗马控制数与罗马控制数的关系[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(8):52-56.

The relationship between global Roman domination number and Roman domination number of graphs

HAO Guoliang[1,2], WU Yuqi[2,3], JIANG Haining[1]

(1. School of Mathematics and Statistics, Heze University, Heze 274015, Shandong, China; 2. College of Science, East China University of Technology, Nanchang 330013, Jiangxi, China; 3. School of Computer Information Engineering, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330044, Jiangxi, China)

Abstract: The new inequality relationships between global Roman domination number and Roman domination number are obtained by using the graph parameters such as the order, the number of edges and degree.

Key words: Roman domination; global Roman domination; domination number

0 引言

基于不同的应用背景与实际背景,控制参数的种类不断增加,如双控制数[1]、全控制数[2]、意大利控制数[3]、彩虹控制数[4]、配对控制数[5]等。罗马控制作为控制问题中较为活跃的研究课题,引起了众多学者的探讨。Cockayne 等[6]正式给出了罗马控制的定义;Martinez 等[7]刻画了罗马控制数等于完美罗马控制数的字典积图;Chin 等[8]刻画了罗马控制数最多为 4 的所有单位凯莱图;Atapour 等[9]给出了罗马控制数的一个衍生变量,即全局罗马控制数,并刻画了全局罗马控制数与罗马控制数的差为 1 和 2 的树;Ahangar[10]证明了直径不小于 7 的连通图的全局罗马控制数等于罗马控制数;Pushpam 等[11]刻画了全局罗马控制数等于顶点数的所有图。本文主要对图的全局罗马控制数与罗马控制数间的关系进行更深一步的研究。

1 预备知识

记 $G=(V(G),E(G))$ 表示一个无向简单图,其中 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集,称 $N(v)=N_G(v)=\{u\in V(G) \mid uv\in E(G)\}$ 和 $N[v]=N_G[v]=N(v)\cup\{v\}$ 分别为 G 中顶点 v 的开邻域和闭邻域。G 的非空顶点子集 D 的开邻域 $N(D)=N_G(D)=\bigcup_{v\in D}N(v)$,闭邻域 $N[D]=N_G[D]=N(D)\cup D$。称

收稿日期:2023-07-07; **网络出版时间**:2024-11-26 10:10:21

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12061007); 菏泽学院博士基金资助项目(XY23BS12,XY23BS48)

第一作者:郝国亮(1980—),男,教授, 博士,研究方向为组合图论. E-mail:guoliang-hao@163.com

$d(v)=d_G(v)=|N(v)|$为 G 中顶点 v 的度, 记 Δ 表示 G 中顶点的最大度。G 的补图 $\overline{G}$ 是指 $V(G)=V(\overline{G})$ 且 $uv\in E(\overline{G})$ 当且仅当 $uv\notin E(G)$ 的图。独立集是指任意不相邻的顶点构成的集合。无三角形图是指不含长度为 3 的圈的图。

对于 $v\in V(G)$,若非空顶点子集 $D\subseteq N[v]$,则称 v 控制 D。若集合 $A\subseteq N[D]$,则称 D 控制 A。若 $N[D]=V(G)$,则称 D 为 G 的控制集;若 $N(D)=V(G)$,则称 D 为 G 的全控制集。图 G 的控制数 $\gamma(G)$ 和全控制数 $\gamma_t(G)$ 分别指最小控制集和最小全控制集所含的顶点个数。

称函数 $f:V(G)\to\{0,1,2\}$ 为 G 的罗马控制函数,若赋值为 0 的顶点至少邻接一个赋值为 2 的顶点。罗马控制函数 f 的权 $\omega(f)=\sum_{u\in V(G)}f(u)$。$G$ 的罗马控制数 $\gamma_R(G)$ 指 G 的罗马控制函数的最小权。权为$\gamma_R(G)$ 的罗马控制函数称为 G 的 $\gamma_R(G)$-函数。若 f 是 G 和 $\overline{G}$ 的罗马控制函数,则称 f 为 G 的全局罗马控制函数。G 的全局罗马控制数 $\gamma_{gR}(G)$ 是指 G 的全局罗马控制函数的最小权。设 $V_i=\{v\in V(G)\mid f(v)=i\}$ $(i\in\{0,1,2\})$,则记 $f=(V_0,V_1,V_2)$。若 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是 G 的罗马控制函数且 $V_1\cup V_2$ 的导出子图中没有孤立点,则称 f 为 G 的全罗马控制函数。G 的全罗马控制数 $\gamma_{tR}(G)$ 是指 G 的全罗马控制函数的最小权。

引理 1[6]　设 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是图 G 的一个 $\gamma_R(G)$-函数,则 $V_1\cap N[V_2]=\varnothing$,且对任意顶点 $v\in V_0$, $|V_1\cap N(v)|\leqslant 2$。

引理 2[12]　对任意图 G,$\gamma_R(G)\leqslant 2\gamma(G)$。

引理 3[13]　对任意不含孤立点的图 G, $\gamma_R(G)\leqslant\gamma_{tR}(G)\leqslant 2\gamma_t(G)$。

2　主要结果

若 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是 G 的一个 $\gamma_R(G)$-函数,则令集合 $U=\{u\in V_0\mid V_2\subseteq N(u)\}$。

命题 1　设 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是图 G 的一个 $\gamma_R(G)$-函数,若 $\gamma_{gR}(G)\neq\gamma_R(G)$,则 $U\neq\varnothing$。

证明　若 f 是 $\overline{G}$ 的罗马控制函数,则 f 是 G 的全局罗马控制函数,故 $\gamma_R(G)\leqslant\gamma_{gR}(G)\leqslant\omega(f)=\gamma_R(G)$, $\gamma_{gR}(G)=\gamma_R(G)$ 与 $\gamma_{gR}(G)\neq\gamma_R(G)$ 矛盾,于是 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 不是图 $\overline{G}$ 的罗马控制函数,故 $V_2\subseteq N_G(u)$,即 $U\neq\varnothing$。

命题 2　若 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是至少含有两个顶点的连通图 G 的一个 $\gamma_R(G)$-函数使得 $|V_2|$ 最大,则 $|V_1|\leqslant 2|V_0|$。

证明　若 V_1 中存在 u_1、u_2 使得$u_1u_2\in E(G)$,则 $g=(V_0^g,V_1^g,V_2^g)$ 是 G 的罗马控制函数,其中 $V_0^g=V_0\cup\{u_1\}$, $V_1^g=V_1-\{u_1,u_2\}$ 且 $V_2^g=V_2\cup\{u_2\}$,于是 $\omega(g)=|V_1^g|+2|V_2^g|=|V_1-\{u_1,u_2\}|+2|V_2\cup\{u_2\}|=|V_1|+2|V_2|=\omega(f)=\gamma_R(G)$,即 g 也是一个 $\gamma_R(G)$-函数且 $|V_2^g|=|V_2\cup\{u_2\}|=|V_2|+1$,与 f 的选取矛盾,因此 V_1 是独立集。又因为 G 是连通图且由引理 1(1)知,$V_1\cap N[V_2]=\varnothing$,所以 $V_1\subseteq N(V_0)$,故 $V_1=V_1\cap N(V_0)$。此外,由引理 1(2)知,对任意 $v\in V_0$, $|V_1\cap N(v)|\leqslant 2$,因此 $|V_1|=|V_1\cap N(V_0)|=\left|V_1\cap\bigcup_{v\in V_0}N(v)\right|=\left|\bigcup_{v\in V_0}(V_1\cap N(v))\right|\leqslant\sum_{v\in V_0}|V_1\cap N(v)|\leqslant 2|V_0|$。

命题 3　设 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是非空图 G 的一个 $\gamma_R(G)$-函数使得$|V_2|$最大,则 $V_2\neq\varnothing$。

证明　假设 $V_2=\varnothing$,由 $\gamma_R(G)$-函数的定义知,$V_0=\varnothing$ 且 $V_1=V(G)$,则 $\gamma_R(G)=\omega(f)=|V_1|+2|V_2|=|V(G)|$。因为 G 是非空图,所以 G 中至少存在两个相邻顶点 v_1、v_2,易见 $g=(V_0^g,V_1^g,V_2^g)$ 是 G 的罗马控制函数,其中 $V_0^g=\{v_1\}$, $V_1^g=V(G)-\{v_1,v_2\}$ 且 $V_2^g=\{v_2\}$。于是 $\omega(g)=|V_1^g|+2|V_2^g|=|V(G)-\{v_1,v_2\}|+2|\{v_2\}|=|V(G)|=\gamma_R(G)$,故 g 也是一个 $\gamma_R(G)$-函数且 $|V_2^g|=|\{v_2\}|=1=|V_2|+1$,与 f 的选取矛盾,因此 $V_2\neq\varnothing$。

定理 1　设 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是图 G 的一个 $\gamma_R(G)$-函数,若 $\gamma_{gR}(G)=\gamma_R(G)+k$,其中 $k\geqslant 4$,则

(1) 在 $\overline{G}$ 中至少需要$\lceil k/2\rceil$个顶点才能控制 U 且 U 是 G 的一个控制集;(2) $\gamma_R(G)\leqslant 2|U|$。

证明　因为 $\gamma_{gR}(G)=\gamma_R(G)+k\geqslant\gamma_R(G)+4$,所以由命题 1 知,$U\neq\varnothing$。在图 $\overline{G}$ 中,令 G 的顶点子集 D 控制 U,则 g 使得当 $x\in D$ 时,$g(x)=2$ 且当 $x\notin D$ 时,$g(x)=f(x)$ 是图 G 的全局罗马控制函数,故

$$\gamma_R(G)+k=\gamma_{gR}(G)\leqslant\omega(g)=\left(\omega(f)-\sum_{x\in D}f(x)\right)+\sum_{x\in D}g(x)\leqslant\omega(f)+2|D|=\gamma_R(G)+2|D|,$$

因此 $2|D|\geqslant k$,即整数 $|D|\geqslant\lceil k/2\rceil$。在 $\overline{G}$ 中,至少需要 $\lceil k/2\rceil$ 个顶点才能控制 U。又因为 $\lceil k/2\rceil\geqslant 2$,所以在 $\overline{G}$ 中,$V(G)-U$ 中的每个顶点都不能控制 U,即 $V(G)-U$ 中的每个顶点至少与 U 中的一个顶点不相邻,于是在 G 中,$V(G)-U$ 中的每个顶点至少与 U 中的一个顶点相邻,故 U 是图 G 的一个控制集,即定理 1(1)成立,由引理 2 知,$\gamma_R(G)\leqslant 2\gamma(G)\leqslant 2|U|$,即定理 1(2)成立。

定理 2 设 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是无三角形图 G 的一个 $\gamma_R(G)$-函数,若 $\gamma_{gR}(G)\neq\gamma_R(G)$,则 V_2 是独立集。

证明 因为 $\gamma_{gR}(G)\neq\gamma_R(G)$,所以由命题 1 知,$U\neq\varnothing$。令 u 是 U 中的一个顶点,则 $V_2\subseteq N(u)$。若 V_2 不是独立集,则 V_2 中一定存在两个顶点 v_1、v_2 使得 $v_1v_2\in E(G)$。因为 $\{v_1,v_2\}\subseteq V_2\subseteq N(u)$,所以 $v_1u\in E(G)$、$v_2u\in E(G)$,因此 $v_1v_2uv_1$ 是 G 中长为 3 的圈,与 G 是无三角形图矛盾,故 V_2 是独立集。

定理 3 设 G 是 n 阶连通图且 $\gamma_{gR}(G)\geqslant\gamma_R(G)+5$,则 $3\gamma_R(G)+2\gamma_{tR}(G)\leqslant 4\Delta+2n$。

证明 设 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是 $\gamma_R(G)$-函数使得 $|V_2|$ 最大。因为 $\gamma_{gR}(G)\geqslant\gamma_R(G)+5$,所以由命题 1 知,$U\neq\varnothing$。令 u 是 U 的一个顶点,则 $V_2\subseteq N(u)$。令 $X=N(u)\cap U$。若 X 不是 G 的全控制集,则 G 中存在顶点 v 使得 $X\cap N(v)=\varnothing$,使得 $g(u)=g(v)=2$ 且当 $x\in V(G)-\{u,v\}$ 时,$g(x)=f(x)$ 是 G 的全局罗马控制函数,因此

$$\gamma_{gR}(G)\leqslant\omega(g)=(\omega(f)-f(u)-f(v))+(g(u)+g(v))\leqslant\omega(f)+4=\gamma_R(G)+4,$$

与 $\gamma_{gR}(G)\geqslant\gamma_R(G)+5$ 矛盾,故 X 是图 G 的一个全控制集。又因为 $X=N(u)\cap U$, $U\subseteq V_0$ 且 $V_2\subseteq N(u)$,所以

$$\begin{aligned}\gamma_t(G)&\leqslant|X|=|N(u)\cap U|\leqslant|N(u)\cap V_0|=|N(u)\cap(V(G)-V_2-V_1)|\\&=|N(u)-(N(u)\cap V_2)-(N(u)\cap V_1)|\leqslant|N(u)-(N(u)\cap V_2)|\\&=|N(u)|-|N(u)\cap V_2|=|N(u)|-|V_2|\leqslant\Delta-|V_2|。\end{aligned}$$

又由引理 3 和命题 2 知,$\gamma_{tR}(G)\leqslant 2\gamma_t(G)$ 且 $|V_1|\leqslant 2|V_0|$,故

$$\begin{aligned}&3\gamma_R(G)+2\gamma_{tR}(G)\leqslant 3\gamma_R(G)+4\gamma_t(G)\\&\leqslant 3\omega(f)+4(\Delta-|V_2|)=3(2|V_2|+|V_1|)+4\Delta-4|V_2|\\&=4\Delta+2|V_2|+3|V_1|\leqslant 4\Delta+2|V_2|+3|V_1|+(2|V_0|-|V_1|)\\&=4\Delta+2(|V_2|+|V_1|+|V_0|)=4\Delta+2n。\end{aligned}$$

定理 4 设 G 是一个非空图且 $\gamma_R(G)\geqslant 3$,则 $\gamma_{gR}(G)\leqslant\gamma_R(G)+2+2\left\lceil\dfrac{2\Delta-2}{\gamma_R(G)-2}\right\rceil$。

证明 因为 $\gamma_R(G)\geqslant 3$,所以 $\lceil(2\Delta-2)/(\gamma_R(G)-2)\rceil\geqslant 0$。若 $\gamma_{gR}(G)=\gamma_R(G)$,则结论成立。设 $\gamma_{gR}(G)\neq\gamma_R(G)$,令 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是一个 $\gamma_R(G)$-函数使得 $|V_2|$ 最大。由命题 1 知,$U\neq\varnothing$。令 u 是 U 中的一个顶点且 $X=U\cap N_G(u)$。若 $|X|=0$,则 $g(u)=2$ 且当 $x\in V(G)-\{u\}$ 时,$g(x)=f(x)$ 是 G 的一个全局罗马控制函数,于是

$$\gamma_{gR}(G)\leqslant\omega(g)=(\omega(f)-f(u))+g(u)=(\omega(f)-0)+2=\gamma_R(G)+2\leqslant\gamma_R(G)+2+2\lceil(2\Delta-2)/(\gamma_R(G)-2)\rceil。$$

设 $|X|>0$。因为 $u\in U$,所以 $U\subseteq V_0$ 且 $V_2\subseteq N_G(u)$。此外,$f=(V_0,V_1,V_2)$ 是一个 $\gamma_R(G)$-函数使得 $|V_2|$ 最大,所以由命题 3 知,$|V_2|\geqslant 1$,于是

$$\begin{aligned}|X|&=|U\cap N_G(u)|\leqslant|V_0\cap N_G(u)|=|(V(G)-V_2-V_1)\cap N_G(u)|\\&=|N_G(u)|-|V_2\cap N_G(u)|-|V_1\cap N_G(u)|\\&=|N_G(u)|-|V_2|-|V_1\cap N_G(u)|\\&\leqslant|N_G(u)|-|V_2|\leqslant\Delta-1。\end{aligned}\tag{1}$$

$\gamma_R(G)\geqslant 3$,由引理 2 知,$\gamma(G)\geqslant\lceil\gamma_R(G)/2\rceil\geqslant\lceil 3/2\rceil=2$。首先按照下面的方法得到非空子集 $X_1,X_2,\cdots,X_t$:

(a) 若 $|X|\leqslant\gamma(G)-1$,则令 $t=1$ 且 $X_t=X$,若 $|X|>\gamma(G)-1$,则令 $A_1=X$;

(b) 若 $|A_i|>\gamma(G)-1$,则设 X_i 是 A_i 的子集使得 $|X_i|=\gamma(G)-1$ 且令 $A_{i+1}=A_i-X_i$;

(c) 若 $|A_{i+1}|\leqslant\gamma(G)-1$,则置 $t=i+1$ 且令 $X_t=A_{i+1}$,否则,用 $i+1$ 代替 i,并转入方法(b)。

因为对任意 $1\leqslant j\leqslant t$,有 $|X_j|\leqslant\gamma(G)-1$ 成立,所以 X_j 不是图 G 的控制集,因此 $V(G)-X_j$ 中一定存在某个 x_j 使得 $|X_j\cap N_G(x_j)|=0$,于是 $X_j\subseteq N_{\overline{G}}(x_j)$。令 $B=\bigcup_{j=1}^{t}\{x_j\}$,则 $|B|\leqslant t=\lceil|X|/(\gamma(G)-1)\rceil$。当 $x\in B\cup\{u\}$ 时,$g(x)=2$ 且当 $x\notin B\cup\{u\}$ 时,$g(x)=f(x)$ 是 G 的全局罗马控制函数,故由式(1)及引理 2 知

$$\begin{aligned}\gamma_{gR}(G) &\leqslant \Big(\omega(f)-\sum_{x\in B\cup\{u\}}f(x)\Big)+\sum_{x\in B\cup\{u\}}g(x)\\ &\leqslant \omega(f)+2|B\cup\{u\}|=\omega(f)+2+2|B|\\ &\leqslant \gamma_R(G)+2+2\lceil |X|/(\gamma(G)-1)\rceil\\ &\leqslant \gamma_R(G)+2+2\lceil (\Delta-1)/(\gamma_R(G)/2-1)\rceil\\ &=\gamma_R(G)+2+2\lceil (2\Delta-2)/(\gamma_R(G)-2)\rceil。\end{aligned}$$

定理 5　对任意图 G,$\gamma_{gR}(G)\leqslant\gamma_R(G)+\gamma_R(\overline{G})$。

证明　设 $f=(V_0^f,V_1^f,V_2^f)$ 和 $g=(V_0^g,V_1^g,V_2^g)$ 分别是 $\gamma_R(G)$-函数和 $\gamma_R(\overline{G})$-函数,当 $x\in V_0^f\cap V_0^g$ 时,$h(x)=0$;当 $x\in(V_0^f\cap V_1^g)\cup(V_1^f\cap V_0^g)\cup(V_1^f\cap V_1^g)$时,$h(x)=1$ 且当 $x\in V_2^f\cup V_2^g$ 时,$h(x)=2$ 是 G 的全局罗马控制函数,于是

$$\begin{aligned}\gamma_{gR}(G) &\leqslant |(V_0^f\cap V_1^g)\cup(V_1^f\cap V_0^g)\cup(V_1^f\cap V_1^g)|+2|V_2^f\cup V_2^g|\\ &\leqslant |V_0^f\cap V_1^g|+(|V_1^f\cap V_0^g|+|V_1^f\cap V_1^g|)+2(|V_2^f|+|V_2^g|)\\ &\leqslant |V_1^g|+(|V_1^f\cap V_0^g|+|V_1^f\cap V_1^g|+|V_1^f\cap V_2^g|)+2(|V_2^f|+|V_2^g|)\\ &=|V_1^g|+|V_1^f\cap(V_0^g\cup V_1^g\cup V_2^g)|+2(|V_2^f|+|V_2^g|)\\ &=|V_1^g|+|V_1^f|+2(|V_2^f|+|V_2^g|)\\ &=(|V_1^f|+2|V_2^f|)+(|V_1^g|+2|V_2^g|)\\ &=\omega(f)+\omega(g)=\gamma_R(G)+\gamma_R(\overline{G})。\end{aligned}$$

定理 6　设 $f=(V_0,V_1,V_2)$是图 G 的一个 $\gamma_R(G)$-函数使得 $3\leqslant\gamma_R(G)\leqslant\gamma_R(\overline{G})$且设 v 是 V_2 中的一个顶点,则

$$\gamma_{gR}(G)\leqslant\gamma_R(\overline{G})+\left\lceil\frac{\sqrt{16d(v)+1}+3}{2}\right\rceil。$$

证明　若 $\gamma_R(G)<\lceil(\sqrt{16d(v)+1}+3)/2\rceil$,则由定理 5 知 $\gamma_{gR}(G)\leqslant\gamma_R(\overline{G})+\gamma_R(G)<\gamma_R(\overline{G})+\lceil(\sqrt{16d(v)+1}+3)/2\rceil$;若 $\gamma_{gR}(G)=\gamma_R(G)$,则 $\gamma_{gR}(G)=\gamma_R(G)\leqslant\gamma_R(\overline{G})<\gamma_R(\overline{G})+\lceil(\sqrt{16d(v)+1}+3)/2\rceil$,故只考虑 $\gamma_R(G)\geqslant\lceil(\sqrt{16d(v)+1}+3)/2\rceil$且 $\gamma_{gR}(G)\neq\gamma_R(G)$ 的情况即可。由命题 1 知,$U\neq\varnothing$。因为$v\in V_2$,所以 $U\subseteq N_G(v)$,于是

$$d(v)=|N_G(v)|\geqslant|U|\geqslant 1。\tag{2}$$

由引理 2 知,整数 $\gamma(G)\geqslant\lceil\gamma_R(G)/2\rceil\geqslant 2$。按照类似于定理 4 中的方法得到 U 的非空子集 $U_1,U_2,\cdots,U_t$:

(ⅰ) 若$|U|\leqslant\gamma(G)-1$,则令 $t=1$ 且 $U_t=U$,若$|U|>\gamma(G)-1$,则令 $A_1=U$;

(ⅱ) 若$|A_i|>\gamma(G)-1$,则设 U_i 是 A_i 的子集使得$|U_i|=\gamma(G)-1$ 且令 $A_{i+1}=A_i-U_i$;

(ⅲ) 若$|A_{i+1}|\leqslant\gamma(G)-1$,则置 $t=i+1$ 且令 $U_t=A_{i+1}$,否则,用 $i+1$ 代替 i,并转入方法(ⅱ)。

由于$|U_j|\leqslant\gamma(G)-1(1\leqslant j\leqslant t)$,则 U_j 不是 G 的控制集,于是 $V(G)-U_j$ 中存在某个 x_j 使得$|U_j\cap N_G(x_j)|=0$,故 $U_j\subseteq N_{\overline{G}}(x_j)$。令 $X=\bigcup_{j=1}^{t}\{x_j\}$,则$|X|\leqslant t=\lceil |U|/(\gamma(G)-1)\rceil$,当 $x\in X$ 时,$g(x)=2$ 且当 $x\notin X$ 时,$g(x)=f(x)$是 G 的全局罗马控制函数。又因为 $\gamma_R(\overline{G})\geqslant\gamma_R(G)\geqslant\lceil(\sqrt{16d(v)+1}+3)/2\rceil$,所以由式(2)及引理 2 知

$$\begin{aligned}\gamma_{gR}(G) &\leqslant \Big(\omega(f)-\sum_{x\in X}f(x)\Big)+\sum_{x\in X}g(x)\leqslant\omega(f)+2|X|\\ &\leqslant\gamma_R(G)+2\lceil |U|/(\gamma(G)-1)\rceil\leqslant\gamma_R(\overline{G})+2\lceil d(v)/(\gamma_R(G)/2-1)\rceil\\ &\leqslant\gamma_R(\overline{G})+\lceil 4d(v)/(\gamma_R(G)-2)\rceil+1\\ &\leqslant\gamma_R(\overline{G})+\lceil 4d(v)/(\lceil(\sqrt{16d(v)+1}+3)/2\rceil-2)\rceil+1\\ &=\gamma_R(\overline{G})+\lceil 8d(v)/(\sqrt{16d(v)+1}-1)\rceil+1\\ &=\gamma_R(\overline{G})+\lceil(\sqrt{16d(v)+1}+3)/2\rceil。\end{aligned}$$

定理 7　设 G 是一个 n 阶连通图,若 $n\geqslant 3\Delta^2+2$,则 $\gamma_{gR}(G)=\gamma_R(G)$。

证明　假设 $\gamma_{gR}(G)\neq\gamma_R(G)$。令 $f=(V_0,V_1,V_2)$是 G 的一个 $\gamma_R(G)$-函数使得$|V_2|$最大。由命题 1 知,$U\neq\varnothing$。令 u 是 U 中的顶点,则 $U\subseteq V_0$ 且 $V_2\subseteq N(u)$,因此$|V_2|\leqslant|N(u)|\leqslant\Delta$ 且 V_2 中的每个顶点至多与V_0-

$N[u]$中的$\Delta-1$个顶点相邻。因为 V_2 控制 V_0，所以$|V_0-N[u]|\leqslant|V_2|(\Delta-1)\leqslant\Delta(\Delta-1)$。注意到 $V_2\subseteq N[u]$，故

$$\begin{aligned} n &= |V(G)-N[u]|+|N[u]| = |(V_2\cup V_1\cup V_0)-N[u]|+|N[u]| \\ &= |V_2-N[u]|+|V_1-N[u]|+|V_0-N[u]|+|N[u]| \\ &= |V_1-N[u]|+|V_0-N[u]|+|N[u]| \\ &\leqslant |V_1|+\Delta(\Delta-1)+(\Delta+1) = |V_1|+\Delta^2+1。\end{aligned} \tag{3}$$

因为 V_2 控制 V_0 且$|V_2|\leqslant\Delta$，所以$|V_0|\leqslant\Delta|V_2|\leqslant\Delta^2$，由命题2知，$|V_1|\leqslant 2|V_0|\leqslant 2\Delta^2$，由式(3)知

$$n\leqslant|V_1|+\Delta^2+1\leqslant 2\Delta^2+\Delta^2+1=3\Delta^2+1,$$

与 $n\geqslant 3\Delta^2+2$ 矛盾，因此 $\gamma_{gR}(G)=\gamma_R(G)$。

定理 8 设 G 是一个连通图且 $\gamma_{gR}(G)\geqslant\gamma_R(G)+4$，则 $\gamma_R(G)\leqslant 2\sqrt{m(\Delta+1)}$，其中 $m=|E(G)|$。

证明 设 $f=(V_0,V_1,V_2)$是 G 的一个 $\gamma_R(G)$-函数使得$|V_2|$最大。因为 V_2 控制 V_0，所以$|V_0|\leqslant\Delta|V_2|$，由命题2知，$|V_1|\leqslant 2|V_0|\leqslant 2\Delta|V_2|$，因此$|V_2|=(2\Delta|V_2|+2|V_2|)/(2\Delta+2)\geqslant\omega(f)/(2\Delta+2)=\gamma_R(G)/(2\Delta+2)$。$\gamma_{gR}(G)\geqslant\gamma_R(G)+4$，由定理1(2)知，$|U|\geqslant\gamma_R(G)/2$，故 $m=|E(G)|\geqslant|U|\cdot|V_2|\geqslant(\gamma_R(G)/2)\cdot(\gamma_R(G)/(2\Delta+2))=\gamma_R^2(G)/(4\Delta+4)$，因此 $\gamma_R(G)\leqslant 2\sqrt{m(\Delta+1)}$。

参考文献：

[1] ABD AZIZ N A, RAD NADER J, KAMARULHAILI H. A note on the double domination number in maximal outerplanar and planar graphs[J]. Rairo-Operations Research, 2022, 56(5):3367-3371.

[2] HUA Xinying, XU Kexiang, HUA Hongbo. Relating the annihilation number and the total domination number for some graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2023, 332:41-46.

[3] HENNING M A, KLOSTERMEYER W F. Italian domination in trees[J]. Discrete Applied Mathematics, 2017, 217:557-564.

[4] 郝国亮,曾淑婷. 全局3-彩虹控制数等于顶点数的图的刻画[J]. 应用数学学报,2024,47(3):417-428.
HAO Guoliang, ZENG Shuting. A characterization of graphs with global 3-rainbow domination number equal to the number of vertices[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2024, 47(3):417-428.

[5] HENNING M A, PILSNIAK M, TUMIDAJEWICZ E. Bounds on the paired domination number of graphs with minimum degree at least three[J]. Applied Mathematics and Computation, 2022, 417:126782.

[6] COCKAYNE E J, DREYER P A, HEDETNIEMI S M, et al. Roman domination in graphs[J]. Discrete Mathematics, 2004, 278:11-22.

[7] MARTINEZ A C, GARCIA-GOMEZ C, RODRIGUEZ-VELAZQUEZ J A. Perfect domination, Roman domination and perfect Roman domination in lexicographic product graphs[J]. Fundamenta Informaticae, 2022, 185(3):201-220.

[8] CHIN A Y M, MAIMANI H R, POURNAKI M R, et al. Unitary Cayley graphs whose Roman domination numbers are at most four[J]. Akce International Journal of Graphs and Combinatorics, 2022, 19(1):36-40.

[9] ATAPOUR M, SHEIKHOLESLAMI S M, VOLKMANN L. Global Roman domination in trees[J]. Graphs and Combinatorics, 2015, 31(4):813-825.

[10] AHANGAR H A. On the global Roman domination number in graphs[J]. Iranian Journal of Science and Technology Transactions A-Science, 2016, 40(3):157-163.

[11] PUSHPAM P R L, PADMAPRIEA S. Global Roman domination in graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 200:176-185.

[12] CHELLALI M, HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, et al. Roman {2}-domination[J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 204:22-28.

[13] AHANGAR H A, HENNING M A, SAMODIVKIN V, et al. Total Roman domination in graphs[J]. Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 2016, 10(2):501-507.

(编辑:陈丽萍)