山东大学学报(理学版)2025 年 8 月 第 60 卷 第 8 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.8, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)08-0078-08 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.445

涉及微分多项式及例外函数的正规定则

杨祺,陈鹏斌,龚翌晖
(新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830054)

摘要:利用 Pang-Zalcman 引理,研究关于例外函数和微分多项式的全纯函数正规定则。通过反证法,推广前人的结果,得到一个新的正规定则。

关键词:全纯函数;正规族;微分多项式
中图分类号:O174.5 **文献标志码**:A
引用格式:杨祺,陈鹏斌,龚翌晖.涉及微分多项式及例外函数的正规定则[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(8):78-85.

Normal criterion concerning differential polynomials and omitted functions

YANG Qi, CHEN Pengbin, GONG Yihui
(School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830054, Xinjiang, China)

Abstract: This paper studies the normal criterion of holomorphic functions involving exceptional functions and differential polynomials by using Pang-Zalcman lemma. A new normal criterion is obtained by extending the previous results through the method of proof by contradiction.

Key words: holomorphic functions; normal family; differential polynomials

1 引言与主要结果

首先引进一些记号。文中的区域 $D\subset \mathbf{C}$。对于 $\forall\delta>0$, $\Delta_\delta=\{z:|z|<\delta\}$, $\Delta'_\delta=\{z:0<|z|<1\}$, Δ 表示单位圆盘。在区域 D 内,$f_n(z)\xrightarrow{\chi} f(z)$ 表示函数列 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内的任意紧子集上,按球面距离内闭一致收敛于 $f(z)$;而 $f_n(z)\to f(z)$ 表示函数列 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内的任意紧子集上,按欧氏距离内闭一致收敛于 $f(z)$。若 $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 是区域 D 内的全纯函数,则 $L(f)(z)=f^{(k)}(z)+a_1(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_k(z)f(z)$ 表示 f 的微分多项式。$\rho(f)$ 表示 f 的级。

2011 年,刘晓俊和叶亚盛在文献[1]中证明定理 1.1。

定理 1.1[1] 设 F 为区域 D 内的一族全纯函数,$k\geqslant 2$ 是整数,$h(z)$ 是区域 D 内不恒为 0 的全纯函数。若对每个 $f\in F$,f 的零点重级均至少为 k,且满足

(i) $f(z)=0\Rightarrow|f^{(k)}(z)|<|h(z)|$;

(ii) $f^{(k)}(z)\neq h(z)$。

则 F 在区域 D 内正规。

2012 年,陈巧玉等在文献[2]中将定理 1.1 中的例外函数由全纯函数推广为亚纯函数,证明定理 1.2。

定理 1.2[2] 设 F 为区域 D 内的一族全纯函数,$k\geqslant 2$ 是整数,$h(z)$ 是区域 D 内不恒为 0 和∞ 的亚纯函数。若对每个 $f\in F$,f 的零点重级均至少为 k,且满足

收稿日期:2023-10-19; **网络出版日期**:2024-09-14 08:26:11
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11961068);新疆维吾尔自治区自然科学基金资助项目(2024D01A91)
第一作者:杨祺(1979—),女,教授,博士,研究方向为复分析. E-mail:yangqi_8138@126.com

(ⅰ) $f(z)=0\Rightarrow|f^{(k)}(z)|<|h(z)|$;

(ⅱ) $f^{(k)}(z)\neq h(z)$。

则 F 在区域 D 内正规。

2012 年,王雪等在文献[3]中将定理 1.1 中的 $f^{(k)}(z)$ 推广为关于 $f(z)$ 的微分多项式 $L(f(z))$,证明定理 1.3。

定理 1.3[3]　设 F 为区域 D 内的一族全纯函数,$k\geqslant 2$ 是整数,$h(z)$ 是区域 D 内不恒为 0 的全纯函数。若对每个 $f\in F$,f 的零点重级均至少为 k,且满足

(ⅰ) $f(z)=0\Rightarrow|L(f)(z)|<|h(z)|$;

(ⅱ) $L(f)(z)\neq h(z)$。

则 F 在区域 D 内正规。

随后许多学者对与例外函数相关的正规定则问题进行了深入研究,并取得许多有意义的结果(参见文献[4-6])。本文主要利用定理 1.3 的思路对定理 1.2 的结果进一步推广,将定理 1.2 中的 $f^{(k)}(z)$ 推广为关于 $f(z)$ 的微分多项式 $L(f(z))$,得到定理 1.4。

定理 1.4　设 F 为区域 D 内的一族全纯函数,$k\geqslant 2$ 是整数,$h(z)$ 是区域 D 内不恒为 0 和∞ 的亚纯函数。若对每个 $f\in F$,f 的零点重级均至少为 k,且满足

(ⅰ) $f(z)=0\Rightarrow|L(f)(z)|<|h(z)|$;

(ⅱ) $L(f)(z)\neq h(z)$。

则 F 在区域 D 内正规。

例 1　$D=\Delta$,k 是一个正整数,$f_n(z)=nz^k$, $h(z)=\dfrac{1}{z}$。易知 $f_n(z)$ 在 Δ 内全纯且零点重级为 k。通过计算可得

$$f_n'(z)=knz^{k-1},\ f_n''(z)=k(k-1)nz^{k-2},\ \cdots,\ f_n^{(k)}(z)=k!\,n,$$

取 $a_1(z)=\dfrac{1}{z}$, $a_2(z)=\dfrac{1}{z^2}$, $\cdots$, $a_{k-1}(z)=\dfrac{1}{z^{k-1}}$, $a_k(z)=\dfrac{c}{z^k}$,其中 $c=-(k+k(k-1)+\cdots+2k!)$。通过简单计算可得

$$\begin{aligned}L(f_n)(z)&=f_n^{(k)}(z)+a_1(z)f_n^{(k-1)}(z)+\cdots+a_{k-1}(z)f_n'(z)+a_k(z)f_n(z)\\&=k!\,n+k!\,nz\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\cdot\frac{k!}{2!}\cdot nz^2+\cdots+\frac{c}{z^k}\cdot nz^k=0\neq\frac{1}{z},\end{aligned}$$

因此,$f_n(z)=0\Rightarrow z=0\Rightarrow|L(f_n)(0)|<|h(0)|$,并且 $L(f_n)(z)\neq h(z)$,故 $f_n(z)$ 满足定理 1.4 中的条件,但是 $F=\{f_n(z)\}$ 在 Δ 内不正规。这说明定理 1.4 中的函数 $a_j(z)$, $j=1,2,\cdots,k$ 是全纯函数是有必要的。

例 2　设 $D=\Delta$,k 是一个正整数,$F=\{f_n(z)\}$, $L(f_n)(z)=f_n^{(k)}(z)$,

其中

$$f_n(z)=\frac{z^{k+1}}{k!\left(z+\dfrac{1}{n}\right)},\quad h(z)=1。$$

显然 $f_n(z)$ 的零点重级是 $k+1$,经过计算可得,$f_n(z)=0\Rightarrow z=0\Rightarrow|L(f_n)(0)|<|h(0)|$, $f_n^{(k)}(z)=1-\dfrac{1}{(nz+1)^{k+1}}\neq 1$,所以 $L(f_n)(z)\neq h(z)$。但 $F=\{f_n(z)\}$ 在区域 D 上不正规。这说明当 F 是亚纯函数族时,定理 1.4 的结论是不成立的。

2　主要引理

引理 2.1[7]　设 F 是区域 D 内的亚纯(或全纯)函数族,k 是正整数。F 中每个函数的零点重级至少为 k,且存在 $A\geqslant 1$,使得对 $\forall f\in F$,当 $f(z)=0$ 时,有 $|f^{(k)}(z)|\leqslant A$。如果 F 在 z_0 处不正规,则对任意 α, $0\leqslant\alpha\leqslant k$,存在

(ⅰ) 点列 z_n, $z_n\to z_0$;

(ⅱ) 函数列 $f_n \in F$;

(ⅲ) 正数列 $\rho_n \to 0^+$。

使得 $g_n(\zeta)=\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^{\alpha}}$ 在复平面 **C** 上按球距内闭一致收敛于一个非常数亚纯(或整)函数 $g(\zeta)$,满足 $g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=kA+1$,并且 $g(z)$ 的级至多为 2(或 1)。

引理 2.2[8] 设 F 是单位圆盘 Δ 内的亚纯函数族,a 是一个有穷复数或 ∞,且对每个 $f\in F$, $f(z)\neq a$。若 F 在 Δ' 内正规,在 $z=0$ 处不正规,则存在 F 的子列 $\{f_n(z)\}$,使得在 Δ' 内,$f_n(z)\xrightarrow{\chi} a$。

引理 2.3[2] 设 f 是复平面 **C** 上的有穷级整函数,$k\geqslant 2$ 是整数,其零点重级至少为 k, $a\neq 0$ 是常数。假设 $\rho(f)\leqslant 1$,且 $f(z)$ 满足

(ⅰ) $f(z)=0\Rightarrow |f^{(k)}(z)|\leqslant |a|$;

(ⅱ) $f^{(k)}(z)\neq a$。

则 $f(z)=\dfrac{b(z-z_0)^k}{k!}$,其中 $b\neq a$, z_0 是常数。

引理 2.4 设 $F=\{f_n(z)\}$ 是单位圆盘 Δ 内的全纯函数族,k,l 是 2 个正整数,$b_n(z)$ 是单位圆盘 Δ 内的一列全纯函数,且在 Δ 内一致收敛于 1。若对 $\forall f_n\in F$,在 Δ 内满足

(ⅰ) $f_n(z)\neq 0$;

(ⅱ) $P(f_n)(z)\neq \dfrac{b_n(z)}{z^l}$。

则 F 在 Δ 内正规,其中 $P(f_n)(z)=f_n^{(k)}(z)+\alpha_n a_1(\alpha_n z)f_n^{(k-1)}(z)+\cdots+\alpha_n^k a_k(\alpha_n z)f_n(z)$, $\{\alpha_n\}$ 为有界量,$a_1(z)$, $a_2(z)$,$\cdots$,$a_k(z)$ 为 Δ 内的全纯函数。

证明 首先,证明 F 在 Δ' 内正规。假设 $\exists z_0\in\Delta'$,使得 F 在 z_0 处不正规。由引理 2.1 知,取 $\alpha=k$,存在函数列 $f_n\in F$,点列 $z_n\to z_0$,正数列 $\rho_n\to 0^+$,使得 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在复平面 **C** 上按球距内闭一致收敛于一个非常数整函数 $g(\zeta)$。显然 $g(\zeta)\neq 0$, $\zeta\in$ **C**。

因为 $f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\zeta)=\rho_n^{k-i}g_n^{(i)}(\zeta)$,所以

$$\begin{aligned}P(f_n)(z_n+\rho_n\zeta)&=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)+\alpha_n a_1(\alpha_n(z_n+\rho_n\zeta))f_n^{(k-1)}(z_n+\rho_n\zeta)\\&\quad+\cdots+\alpha_n^k a_k(\alpha_n(z_n+\rho_n\zeta))f_n(z_n+\rho_n\zeta)\\&=g_n^{(k)}(\zeta)+\alpha_n a_1(\alpha_n(z_n+\rho_n\zeta))\rho_n g_n^{(k-1)}(\zeta)\\&\quad+\cdots+\alpha_n^k a_k(\alpha_n(z_n+\rho_n\zeta))\rho_n^k g_n(\zeta)。\end{aligned}$$

注意到 $P(f_n)(z)\neq\dfrac{b_n(z)}{z^l}$,而 $P(f_n)(z_n+\rho_n\zeta)-\dfrac{b_n(z_n+\rho_n\zeta)}{(z_n+\rho_n\zeta)^l}\xrightarrow{\chi} g^{(k)}(\zeta)-\dfrac{1}{z_0^l}$,由 Hurwitz 定理可知,$g^{(k)}(\zeta)\equiv\dfrac{1}{z_0^l}$,或 $g^{(k)}(\zeta)\neq\dfrac{1}{z_0^l}$。当 $g^{(k)}(\zeta)\equiv\dfrac{1}{z_0^l}$ 时,则 $g(\zeta)$ 是 k 次多项式,与 $g(\zeta)\neq 0$ 矛盾;当 $g^{(k)}(\zeta)\neq\dfrac{1}{z_0^l}$ 时,因为 $g(\zeta)\neq 0$,所以由 Hayman 不等式可知,$g(\zeta)$ 为常数,从而与 $g(\zeta)$ 是一个非常数整函数矛盾,故 F 在 Δ' 内正规。

其次,证明 F 在 $z=0$ 处正规。假设 F 在 $z=0$ 处不正规。因为 F 在 Δ' 内正规,而在 Δ 内,$f_n(z)\neq 0$,所以由引理 2.2 可知,在 Δ' 内 $f_n(z)\xrightarrow{\chi} 0$。注意到 $f_n(z)$ 是 Δ 内的全纯函数,所以 $f_n(z)\neq\infty$,因此由引理 2.2 可知,在 Δ' 内 $f_n(z)\xrightarrow{\chi}\infty$,矛盾。故 F 在 $z=0$ 处正规。

引理 2.5 设 $F=\{f_n(z)\}$ 是区域 D 内的全纯函数族,$k\geqslant 2$ 是整数,$\{h_n(z)\}$ 是区域 D 内的解析函数,且在 D 内一致收敛于 $h(z)(\neq 0)$。若对 $\forall f_n\in F$, f_n 的零点重级均至少为 k,且在 D 内满足

(ⅰ) $f_n(z)=0\Rightarrow |P(f_n)(z)|<|h_n(z)|$;

(ⅱ) $P(f_n)(z)\neq h_n(z)$。

则 F 在 D 内正规,其中 $P(f_n)(z)=f_n^{(k)}(z)+\alpha_n a_1(\alpha_n z)f_n^{(k-1)}(z)+\cdots+\alpha_n^k a_k(\alpha_n z)f_n(z)$, $\{\alpha_n\}$ 为有界量,$a_1(z)$, $a_2(z)$,$\cdots$,$a_k(z)$ 为 D 内的全纯函数。

证明 利用反证法,假设存在 $z_0\in D$,使得 F 在 z_0 处不正规。由 $h_n(z)$ 一致收敛于 $h(z)$ 可知,在 z_0 的某

个邻域内，当 n 充分大以后，有 $f_n(z)=0\Rightarrow|P(f_n)(z)|<|h(z_0)|+1$。注意到 $f_n(z)$ 的零点重级至少为 k，从而有 $f_n(z)=0\Rightarrow|P(f_n)(z)|=|f_n^{(k)}(z)|<|h(z_0)|+1$。由引理 2.1 可知，存在函数列 $f_n\in F$，点列 $z_n\to z_0$，正数列 $\rho_n\to 0^+$，使得 $g_n(\zeta)=\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数整函数 $g(\zeta)$，且 $g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=k(|h(z_0)|+1)+1$。

断言　(1) $g(\zeta)=0\Rightarrow|g^{(k)}(\zeta)|\leqslant|h(z_0)|$；(2) $g^{(k)}(\zeta)\neq h(z_0)$。

先证断言(1)。假设存在 $\zeta_0\in\mathbf{C}$，使得 $g(\zeta_0)=0$。由于 $g(\zeta)$ 不恒等于 0，故存在 $\zeta_n\to\zeta_0$，当 n 充分大以后，有 $g_n(\zeta_n)=\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)}{\rho_n^k}=0$，因此 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$。从而 $|P(f_n)(z_n+\rho_n\zeta_n)|<|h_n(z_n+\rho_n\zeta_n)|$，经简单计算可得 $|g_n^{(k)}(\zeta_n)|<|h_n(z_n+\rho_n\zeta_n)|$，所以 $|g^{(k)}(\zeta_0)|=\lim\limits_{n\to\infty}|g_n^{(k)}(\zeta_n)|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}|h_n(z_n+\rho_n\zeta_n)|=h(z_0)$。

再证断言(2)。假设存在 $\zeta_0\in\mathbf{C}$，使得 $g^{(k)}(\zeta_0)=h(z_0)$。若 $g^{(k)}(\zeta)\equiv h(z_0)$，则 $g^{\#}(0)\leqslant k(|h(z_0)|+1)$ 与 $g^{\#}(0)=k(|h(z_0)|+1)+1$ 矛盾。又因为复平面 $\mathbf{C}$ 上有

$$P(f_n)(z_n+\rho_n\zeta)=g_n^{(k)}(\zeta)+\alpha_n a_1(\alpha_n(z_n+\rho_n\zeta))\rho_n g_n^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+\alpha_n^k a_k(\alpha_n(z_n+\rho_n\zeta))\rho_n^k g_n(\zeta)。$$

注意到 $\{\alpha_n\}$ 为有界量，$a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 为区域 D 内的全纯函数，所以 $P(f_n)(z_n+\rho_n\zeta)-h_n(z_n+\rho_n\zeta)\to g^{(k)}(\zeta)-h(z_0)$。于是由 Hurwitz 定理可知，当 n 充分大以后，存在 $\zeta_n\to\zeta_0$，使得 $P(f_n)(z_n+\rho_n\zeta_n)-h_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$，从而与已知条件矛盾，故 $g^{(k)}(\zeta)\neq h(z_0)$。

由引理 2.3 可得，$g(\zeta)=\dfrac{b(\zeta-\zeta_0)^k}{k!}$，其中 $\zeta_0\in\mathbf{C}$，$b\neq h(z_0)$。结合断言(1)可知，$|b|\leqslant|h(z_0)|$，所以 $g^{\#}(0)\leqslant k(|b|+1)\leqslant k(|h(z_0)|+1)$ 与 $g^{\#}(0)=k(|h(z_0)|+1)+1$ 矛盾。

3　定理的证明

定理 1.4 的证明　由定理 1.3 及正规的局部性可知，只需证 F 在 h 的极点处正规即可。不失一般性，设 $D=\Delta$，且

$$h(z)=\frac{b(z)}{z^l},\quad z\in\Delta, \tag{3.1}$$

其中 l 为正整数，$b(0)=1$，并且在 $0<|z|<1$ 内 $b(z)\neq 0,\infty$。因此只要证明 F 在 $z=0$ 处正规。

假设 F 在 $z=0$ 处不正规。因为 F 在 Δ' 内正规，所以由引理 2.2 可知，在 Δ' 内

$$f_n(z)\xrightarrow{\chi}\infty。\tag{3.2}$$

分 2 种情形讨论。

情形 1　$l\geqslant k+1$。令 $F_1=\{\phi_n=z^l f_n(z):f_n(z)\in F\}$，下面证明 F_1 在 Δ 上正规。

如果 F_1 在 Δ 上正规。若在 Δ 内 $z^l f_n(z)\xrightarrow{\chi}H(z)$。因为在 Δ' 内 $z^l\neq 0$，则由式(3.2)可知，在 Δ' 内 $H(z)\equiv\infty$，由唯一性可知，在 Δ 内 $H(z)\equiv\infty$，特别地，当 n 充分大以后，在 Δ 内的任一紧子集中 $z^l f_n(z)\neq 0$，所以在 Δ 内的任一紧子集中 $f_n(z)\neq 0$，由引理 2.2 可知，在 Δ' 内 $f_n(z)\xrightarrow{\chi}0$，与式(3.2)矛盾，故 F 在 Δ 内正规。

假设 F_1 在 $z=0$ 处不正规。由引理 2.1 可知，存在点列 $z_n\to 0$，函数列 $\phi_n\in F_1$，正数列 $\rho_n\to 0^+$，使得 $g_n(\zeta)=\dfrac{\phi_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数整函数 $g(\zeta)$，满足 $g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=kA+1$，其中 $A\geqslant 1$ 是常数，并且 $g(\zeta)$ 的级至多为 1。

情形 1.1　$\dfrac{z_n}{\rho_n}\to\infty$。由于

$$\phi_n^{(k)}(z)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(z^l)^{(k-j)}f_n^{(j)}(z)=z^l f_n^{(k)}(z)+\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}l(l-1)\cdots(l-k+j+1)z^{l-k+j}f_n^{(j)}(z),$$

断言　(3) $g(\zeta)=0\Rightarrow|g^{(k)}(\zeta)|\leqslant 1$；(4) $g^{(k)}(\zeta)\neq 1$。

先证断言(3)。若存在$\zeta_0\in\mathbf{C}$,使得$g(\zeta_0)=0$。由于$g(\zeta)$不恒等于0,故存在$\zeta_n\to\zeta_0$,当n充分大以后,有$g_n(\zeta_n)=\dfrac{\phi_n(z_n+\rho_n\zeta_n)}{\rho_n^k}=\dfrac{(z_n+\rho_n\zeta_n)^l f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)}{\rho_n^k}=0$, 因此$f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$,从而$|L(f_n)(z_n+\rho_n\zeta_n)|<|h(z_n+\rho_n\zeta_n)|$。经简单计算可得,$|g_n^{(k)}(\zeta_n)|<|b(z_n+\rho_n\zeta_n)|$,故$|g^{(k)}(\zeta_0)|=\lim\limits_{n\to\infty}|g_n^{(k)}(\zeta_n)|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}|b(z_n+\rho_n\zeta_n)|=1$。

再证断言(4)。假设存在$\zeta_0\in\mathbf{C}$,使得$g^{(k)}(\zeta_0)=1$。由于$g^{(k)}(\zeta)$不恒等于1,否则$g^{\#}(0)<kA+1$,与$g^{\#}(0)=kA+1$矛盾。注意到

$$g_n^{(k)}(\zeta)=\phi_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)=(z_n+\rho_n\zeta)^l f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)+\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}l(l-1)\cdots(l-k+j+1)(z_n+\rho_n\zeta)^{l-k+j}f_n^{(j)}(z_n+\rho_n\zeta),$$

而

$$f_n^{(j)}(z)=\left(\frac{\phi_n(z)}{z^l}\right)^{(j)}=\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}\phi_n^{(j-s)}(z)\left(\frac{1}{z^l}\right)^{(s)}=\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}\rho_n^{k-j+s}g_n^{(j-s)}\left(\frac{z-z_n}{\rho_n}\right)\left(\frac{1}{z^l}\right)^{(s)},$$

$$\left(\frac{1}{z^l}\right)^{(s)}=\frac{(-1)^s l(l+1)\cdots(l+s-1)}{z^{l+s}}。$$

又由于在复平面$\mathbf{C}$上$\dfrac{\rho_n}{z_n+\rho_n\zeta}\to0$,则

$$(z_n+\rho_n\zeta)^{l-k+j}f_n^{(j)}(z_n+\rho_n\zeta)=\sum_{s=0}^{j}C_s\rho_n^{k-j+s}(z_n+\rho_n\zeta)^{j-k-s}g_n^{(j-s)}(\zeta)\xrightarrow{\chi}0,$$

其中$j=0,1,2,\cdots,k-1$且C_s是常数。因此在复平面$\mathbf{C}$上有

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)}{h(z_n+\rho_n\zeta)}=\frac{(z_n+\rho_n\zeta)^l f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)}{b(z_n+\rho_n\zeta)}\to g^{(k)}(\zeta)。$$

通过简单计算可得

$$\frac{f_n^{(k-i)}(z_n+\rho_n\zeta)}{h(z_n+\rho_n\zeta)}=\frac{(z_n+\rho_n\zeta)^l f_n^{(k-i)}(z_n+\rho_n\zeta)}{b(z_n+\rho_n\zeta)}\to0,\quad i=1,2,\cdots,k,$$

从而有$\dfrac{L(f_n)(z_n+\rho_n\zeta)}{h(z_n+\rho_n\zeta)}\to g^{(k)}(\zeta)$。故存在$\zeta_n\to\zeta_0$,使得$\dfrac{L(f_n)(z_n+\rho_n\zeta_n)}{h(z_n+\rho_n\zeta_n)}=1$,这与已知条件$L(f_n)(z_n+\rho_n\zeta_n)\neq h(z_n+\rho_n\zeta_n)$矛盾,因此$g^{(k)}(\zeta)\neq1$。

由引理2.3可得,$g(\zeta)=\dfrac{b(\zeta-\zeta_0)^k}{k!}$,其中$\zeta_0\in\mathbf{C}$, $b\neq1$是常数。结合断言(3)可知,$|b|\leqslant1$,则$g^{\#}(0)\leqslant k(|b|+1)$。令$A=|b|+1$,所以$g^{\#}(0)<kA+1$,从而与$g^{\#}(0)=kA+1$矛盾。

情形 1.2 $\dfrac{z_n}{\rho_n}\to\alpha$, $\alpha\in\mathbf{C}$。在复平面$\mathbf{C}$上

$$\frac{\phi_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}=\frac{\phi_n\left(z_n+\rho_n\left(\zeta-\dfrac{z_n}{\rho_n}\right)\right)}{\rho_n^k}$$

内闭一致收敛于一个非常数整函数$g(\zeta-\alpha)$,且$\zeta=0$为$g(\zeta-\alpha)$的至少l重零点。

令

$$G_n(\zeta)=\frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k-l}}=\frac{(\rho_n\zeta)^l f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}\cdot\frac{1}{\zeta^l}=\frac{\phi_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}\cdot\frac{1}{\zeta^l},\tag{3.3}$$

则$G_n(\zeta)$在复平面$\mathbf{C}$上内闭一致收敛于$\dfrac{1}{\zeta^l}\cdot g(\zeta-\alpha)=G(\zeta)$。注意到$\zeta=0$为$g(\zeta-\alpha)$的至少$l$重零点,从而$G(0)\neq\infty$,故$G(\zeta)$是一个级至多为1的整函数。根据式(3.3)可得,$f_n^{(i)}(\rho_n\zeta)=\rho_n^{k-l-i}G_n^{(i)}(\zeta)$,则

$$L(f_n)(\rho_n\zeta)=\rho_n^{-l}G_n^{(k)}(\zeta)+a_1(\rho_n\zeta)\rho_n^{1-l}G_n^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+a_k(\rho_n\zeta)\rho_n^{k-l}G_n(\zeta),$$

因此

$$\rho_n^l L(f_n)(\rho_n\zeta)=G_n^{(k)}(\zeta)+a_1(\rho_n\zeta)\rho_n G_n^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+a_k(\rho_n\zeta)\rho_n^k G_n(\zeta)。$$

注意到 $L(f_n)(\rho_n\zeta)\neq h(\rho_n\zeta)$,所以 $\rho_n^l(L(f_n)(\rho_n\zeta)-h(\rho_n\zeta))\neq 0$。又由$\frac{z_n}{\rho_n}\to\alpha$,从而在复平面 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 上有

$$\rho_n^l L(f_n)(\rho_n\zeta)-\rho_n^l h(\rho_n\zeta)\to G^{(k)}(\zeta)-\frac{1}{\zeta^l}。$$

进一步断言:对任意 $\zeta\in\mathbf{C}$, $G^{(k)}(\zeta)\neq\frac{1}{\zeta^l}$。

事实上,若存在 $\zeta_0\neq 0$,使得 $G^{(k)}(\zeta_0)=\frac{1}{\zeta_0^l}$,因为 $L(f)(z)\neq h(z)$,所以 $\rho_n^l L(f_n)(\rho_n\zeta)-\rho_n^l h(\rho_n\zeta)=\rho_n^l(L(f_n)(\rho_n\zeta)-h(\rho_n\zeta))\neq 0$,由 Hurwitz 定理可知,$G^{(k)}(\zeta)\equiv\frac{1}{\zeta^l}$。因为 $G(\zeta)$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 上是全纯函数,所以 $G^{(k)}(\zeta)\equiv\frac{1}{\zeta^l}$是不可能的,故 $G^{(k)}(\zeta)\neq\frac{1}{\zeta^l}$。

注意到 $G(\zeta)$ 是一个级至多为 1 的整函数,从而 $G^{(k)}(\zeta)$ 也是一个级至多为 1 的整函数。

如果 $G(\zeta)$ 是一个超越整函数,那么 $G^{(k)}(\zeta)=\frac{1}{\zeta^l}-\frac{\exp(p(\zeta))}{\zeta^l}$,其中 $p(\zeta)=A\zeta+B$, $A\neq 0$, B 是 2 个常数。因为 $G(0)\neq\infty$,所以 $G^{(k)}(0)\neq\infty$,故 $B=0$。因此 $G^{(k)}(\zeta)=\frac{1}{\zeta^l}-\frac{\exp(A\zeta)}{\zeta^l}$。又由 $l\geqslant k+1$ 可知,$\zeta=0$ 是 $G^{(k)}(\zeta)$ 的极点,故 $\zeta=0$ 是 $G(\zeta)$ 的极点,矛盾。

如果 $G(\zeta)$ 是一个多项式,那么 $G^{(k)}(\zeta)$ 也是多项式,则 $G^{(k)}(\zeta)=\frac{1}{\zeta^l}+\frac{A}{P(\zeta)}$,其中 $A\neq 0$ 是常数,$P(\zeta)$ 是多项式。由于 $G(\zeta)$ 没有极点,从而 $G^{(k)}(\zeta)\equiv 0$,即 $G(\zeta)$ 至多是 $k-1$ 次多项式,与 $G(\zeta)$ 的零点重级至少是 k 矛盾,故 $G(\zeta)$ 是常数。假设 $G(\zeta)\equiv b$,其中 b 是常数。下证这是不可能的。

若 $b=0$,则 $G(\zeta)\equiv 0$,即 $g(\zeta)\equiv 0$,这与 g 是非常数整函数矛盾。

若 $b\neq 0$,由 $f_n(0)=\frac{G_n(0)}{\rho_n^{l-k}}$且 $G_n(\zeta)$ 内闭一致收敛于 $G(\zeta)\equiv b\neq 0$,得 $f_n(0)\to\infty$, $n\to\infty$。又由于$\{f_n(z)\}$在 $z=0$ 处不正规,则存在点列 $z_n^*\to 0$,使得 $f_n(z_n^*)=0$。否则,若存在 $\delta(0<\delta<1)$,使得在 Δ_δ 内 $f_n(z)\neq 0$。由引理 2.2 可知,在 Δ_δ'内 $f_n(z)\xrightarrow{\chi}0$,这与式(3.2)矛盾。

不失一般性,假设 z_n^* 是 f_n 模最小的零点。因为 $G_n(\zeta)=\rho_n^{l-k}f_n(\rho_n\zeta)\to b(\neq 0)$,所以有$\frac{z_n^*}{\rho_n}\to\infty$。设

$$G_n^*(\zeta)=(z_n^*)^{l-k}f_n(z_n^*\zeta),\tag{3.4}$$

则 $G_n^*(\zeta)$ 的零点重级至少是 k。根据式(3.4)可得 $f_n^{(i)}(z_n^*\zeta)=(z_n^*)^{k-l-i}G_n^{*(i)}(\zeta)$, $i=1,2,\cdots,k$。于是

$$L(f_n)(z_n^*\zeta)=(z_n^*)^{-l}G_n^{*(k)}(\zeta)+a_1(z_n^*\zeta)(z_n^*)^{1-l}G_n^{*(k-1)}(\zeta)+\cdots+a_k(z_n^*\zeta)(z_n^*)^{k-l}G_n^*(\zeta),$$

从而

$$(z_n^*)^l L(f_n)(z_n^*\zeta)=G_n^{*(k)}(\zeta)+a_1(z_n^*\zeta)z_n^*G_n^{*(k-1)}(\zeta)+\cdots+a_k(z_n^*\zeta)(z_n^*)^k G_n^*(\zeta)。$$

又由定理条件可知,$L(f_n)(z_n^*\zeta)\neq h(z_n^*\zeta)$,所以$(z_n^*)^l L(f_n)(z_n^*\zeta)\neq\frac{b(z_n^*\zeta)}{\zeta^l}$,即 $P(G_n^*)(\zeta)\neq\frac{b(z_n^*\zeta)}{\zeta^l}$。因为在 Δ 内 $G_n^*(\zeta)\neq 0$,由引理 2.4 可知,$\{G_n^*(\zeta)\}$在 Δ 内正规;又由引理 2.5 可知,$\{G_n^*(\zeta)\}$在 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 内正规,从而$\{G_n^*(\zeta)\}$在复平面 $\mathbf{C}$ 上正规。取$\{G_n^*(\zeta)\}$的子列,不妨仍记为$\{G_n^*(\zeta)\}$,假设$\{G_n^*(\zeta)\}$在复平面 $\mathbf{C}$ 上按球距内闭一致收敛于 $G^*(\zeta)$,因为 $G_n^*(1)=0$,所以 $G^*(\zeta)$ 是全纯函数。但 $G_n^*(0)=\left(\frac{z_n^*}{\rho_n}\right)^{l-k}G_n(0)\to\infty$,矛盾。

情形 2　$1\leqslant l\leqslant k$。假设 F 在 $z=0$ 处不正规。由引理 2.1 可知,存在点列 $z_n\to 0$,函数列 $f_n(z)\in F$,正数列 $\rho_n\to 0^+$,使得 $g_n(\zeta)=\frac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k-l}}$在复平面 $\mathbf{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数整函数 $g(\zeta)$,且 $g(\zeta)$

的级至多为1。显然 $g(\zeta)$ 的零点重级至少为 k。

情形 2.1 $\dfrac{z_n}{\rho_n}\to\infty$。考虑

$$\varphi_n(\zeta)=\frac{f_n(z_n(1+\zeta))}{z_n^{k-l}},$$

则 $\varphi_n^{(i)}(\zeta)=(z_n)^{l-k+i}f_n^{(i)}(z_n(1+\zeta))$，$i=0,1,2,\cdots,k$。得到

$$\begin{aligned}L(f_n)(z_n(1+\zeta))&=f_n^{(k)}(z_n(1+\zeta))+a_1(z_n(1+\zeta))f_n^{(k-1)}(z_n(1+\zeta))+\cdots+a_k(z_n(1+\zeta))f_n(z_n(1+\zeta))\\&=z_n^{-l}\varphi_n^{(k)}(\zeta)+a_1(z_n(1+\zeta))z_n^{1-l}\varphi_n^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+a_k(z_n(1+\zeta))z_n^{k-l}\varphi_n(\zeta),\end{aligned}$$

因此

$$\varphi_n^{(k)}(\zeta)+a_1(z_n(1+\zeta))z_n\varphi_n^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+a_k(z_n(1+\zeta))z_n^k\varphi_n(\zeta)\neq z_n^l h(z_n(1+\zeta))。$$

由条件可得，$\varphi_n(\zeta)=0\Rightarrow|P(\varphi_n)(\zeta)|<\left|\dfrac{b(z_n(1+\zeta))}{(1+\zeta)^l}\right|$，根据引理2.5，$\{\varphi_n(\zeta)\}$ 在 Δ 内正规。故存在 $\{\varphi_n(\zeta)\}$ 的子列 $\{\varphi_{n_j}(\zeta)\}$ 在 Δ 内按球距内闭一致收敛于全纯函数 $\varphi(\zeta)$ 或 ∞。

若 $\varphi_{n_j}(\zeta)=\dfrac{f_{n_j}(z_{n_j}(1+\zeta))}{z_{n_j}^{k-l}}\to\varphi(\zeta)$，则 $\varphi(0)\neq\infty$，并且

$$g^{(k-l)}(\zeta)=\lim_{j\to\infty}f_{n_j}^{(k-l)}(z_{n_j}+\rho_{n_j}\zeta)=\lim_{j\to\infty}f_{n_j}^{(k-l)}\left(z_{n_j}+z_{n_j}\frac{\rho_{n_j}}{z_{n_j}}\zeta\right)=\lim_{j\to\infty}\varphi_{n_j}^{(k-l)}\left(\frac{\rho_{n_j}}{z_{n_j}}\zeta\right)=\varphi^{(k-l)}(0),$$

故 $g^{(k-l)}(\zeta)$ 是常数。因此 $g(\zeta)$ 至多是 $k-1$ 次多项式，这与 $g(\zeta)$ 的零点重级至少为 k 矛盾。

若 $\varphi_{n_j}(\zeta)=\dfrac{f_{n_j}(z_{n_j}(1+\zeta))}{z_{n_j}^{k-l}}\to\infty$，则 $\varphi(0)=\infty$，并且

$$\begin{aligned}g(\zeta)&=\lim_{j\to\infty}\frac{f_{n_j}(z_{n_j}+\rho_{n_j}\zeta)}{\rho_{n_j}^{k-l}}=\lim_{j\to\infty}\left(\frac{z_{n_j}}{\rho_{n_j}}\right)^{k-l}(z_{n_j})^{l-k}f_{n_j}\left(z_{n_j}+z_{n_j}\frac{\rho_{n_j}}{z_{n_j}}\zeta\right)\\&=\lim_{j\to\infty}\left(\frac{z_{n_j}}{\rho_{n_j}}\right)^{k-l}\varphi_{n_j}\left(\frac{\rho_{n_j}}{z_{n_j}}\zeta\right)=\infty,\end{aligned}$$

这与 $g(\zeta)$ 是非常数整函数矛盾。

情形 2.2 $\dfrac{z_n}{\rho_n}\to\alpha$，$\alpha\in\mathbf{C}$。

由于

$$g_n^{(i)}(\zeta)=\rho_n^{l-k+i}f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\zeta),$$

因此

$$L(f_n)(z_n+\rho_n\zeta)=\rho_n^{-l}g_n^{(k)}(\zeta)+a_1(z_n+\rho_n\zeta)\rho_n^{1-l}g_n^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+a_k(z_n+\rho_n\zeta)\rho_n^{k-l}g_n(\zeta),$$

从而

$$\rho_n^lL(f_n)(z_n+\rho_n\zeta)=g_n^{(k)}(\zeta)+a_1(z_n+\rho_n\zeta)\rho_ng_n^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+a_k(z_n+\rho_n\zeta)\rho_n^kg_n(\zeta)。$$

注意到 $L(f_n)(z_n+\rho_n\zeta)\neq\dfrac{b(z_n+\rho_n\zeta)}{(z_n+\rho_n\zeta)^l}$，所以 $\rho_n^l\left(L(f_n)(z_n+\rho_n\zeta)-\dfrac{b(z_n+\rho_n\zeta)}{(z_n+\rho_n\zeta)^l}\right)\neq0$。又由 $\dfrac{z_n}{\rho_n}\to\alpha$，故在复平面 $\mathbf{C}\backslash\{-\alpha\}$ 上，

$$\begin{aligned}\rho_n^l\left(L(f_n)(z_n+\rho_n\zeta)-\frac{b(z_n+\rho_n\zeta)}{(z_n+\rho_n\zeta)^l}\right)&=g_n^{(k)}(\zeta)+a_1(z_n+\rho_n\zeta)\rho_ng_n^{(k-1)}(\zeta)\\&\quad+\cdots+a_k(z_n+\rho_n\zeta)\rho_n^kg_n(\zeta)-\rho_n^l\frac{b(z_n+\rho_n\zeta)}{(z_n+\rho_n\zeta)^l}\to g^{(k)}(\zeta)-\frac{1}{(\alpha+\zeta)^l}。\end{aligned}$$

根据 Hurwitz 定理知，在 $\mathbf{C}\backslash\{-\alpha\}$ 上，$g^{(k)}(\zeta)-\dfrac{1}{(\alpha+\zeta)^l}\equiv0$，或 $g^{(k)}(\zeta)-\dfrac{1}{(\alpha+\zeta)^l}\neq0$。若 $g^{(k)}(\zeta)-\dfrac{1}{(\alpha+\zeta)^l}\equiv0$，这与 g 是一个整函数矛盾。因此 $g^{(k)}(\zeta)-\dfrac{1}{(\alpha+\zeta)^l}\neq0$。

注意到 g 是一个级至多为 1 的整函数,从而 $g^{(k)}$ 也是一个级至多为 1 的整函数。如果 g 是超越整函数,可设 $g^{(k)}(\zeta)=\dfrac{1}{(\alpha+\zeta)^{l}}-\dfrac{\exp[A_1(\alpha+\zeta)+B_1]}{(\alpha+\zeta)^{l}}$,其中 $A_1\neq 0$, B_1 是 2 个常数。因为 g 是整函数,所以 $B_1=0$, $l=1$,即 $(\alpha+\zeta)g^{(k)}(\zeta)=1-e^{A_1(\alpha+\zeta)}$。积分得

$$(\alpha+\zeta)g^{(k-1)}(\zeta)-g^{(k-2)}(\zeta)=\zeta-\frac{1}{A_1}e^{A_1(\alpha+\zeta)}+C,$$

其中 C 是常数。设 $\{\zeta_n^*\}$ 是 $g(\zeta)$ 的零点,注意到 $g(\zeta)$ 的零点重级至少为 k 以及 $k\geqslant 2$,有

$$0=(\alpha+\zeta_n^*)g^{(k-1)}(\zeta_n^*)-g^{(k-2)}(\zeta_n^*)=\zeta_n^*-\frac{1}{A_1}e^{A_1(\alpha+\zeta_n^*)}+C,$$

故得 $e^{A_1(\alpha+\zeta_n^*)}=A_1(\zeta_n^*+C)$。注意到通过简单计算可得,$g(\zeta)=0\Rightarrow|g^{(k)}(\zeta)|\leqslant\left|\dfrac{1}{\alpha+\zeta}\right|$。从而得到,$|(\alpha+\zeta_n^*)g^{(k)}(\zeta_n^*)|\leqslant 1$,而 $(\alpha+\zeta_n^*)g^{(k)}(\zeta_n^*)=1-e^{A_1(\alpha+\zeta_n^*)}$,故 $|e^{A_1(\alpha+\zeta_n^*)}|\leqslant 2$。这与 $e^{A_1(\alpha+\zeta_n^*)}=A_1(\zeta_n^*+C)$ 矛盾,所以 g 有有限个零点,再结合庄圻泰不等式,得到 g 是多项式,这与 g 是超越整函数矛盾。

如果 g 是多项式,通过简单计算可知 g 是常数,这与 g 是非常数整函数矛盾。从而 F 在 $z=0$ 处正规。

参考文献:

[1] LIU X J, YE Y S. A criterion of normality concerning holomorphic functions whose derivative omits a function[J]. Chinese Annals of Mathematics, 2011, 32(5):699-710.

[2] CHEN Q Y, LIU X J. A criterion of normality concerning holomorphic functions whose derivative omit a function II[J]. Chinese Annals of Mathematics, 2012, 33(6):815-822.

[3] 王雪,刘晓俊,陈巧玉. 涉及微分多项式及例外函数的正规定则[J]. 华东师范大学学报(自然科学版),2012,3:61-70.
WANG Xue, LIU Xiaojun, CHEN Qiaoyu. Normal criterion concerning differential polynomials and omitted functions[J]. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2012, 3:61-70.

[4] NIU P Y, XU Y. A normal criterion of families of holomorphic functions[J]. Analysis and Mathematical Physics, 2021, 11(3):1-10.

[5] XU Y. Normal families and fixed-points of meromorphic functions[J]. Monatshefte Für Mathematik, 2016, 179(3):471-485.

[6] 陈玮,王琼,袁文俊. 涉及 Picard 例外值的亚纯函数正规族[J]. 数学年刊 A 辑,2021,42(1):47-58.
CHEN Wei, WANG Qiong, YUAN Wenjun. Normal families of meromorphic functions concerning Picard values and shared values[J]. Chinese Annals of Mathematics, Series A, 2021, 42(1):47-58.

[7] PANG X C, YANG D G, ZALCMAN L. Normal families of meromorphic functions whose derivatives omit a function[J]. Computational Methods and Function Theory, 2003, 2(1):257-265.

[8] FANG C Y, XU Y. Normal family of meromorphic functions concerning fixed-points[J]. Analysis and Mathematical Physics, 2019, 9(1):197-207.

(编辑:胡春燕)