

零乘积确定代数的一些注记

潘绍泽¹, 苏珊珊²

(1.无锡学院理学院, 江苏 无锡 214105; 2.华东理工大学数学学院, 上海 200237)

摘要:主要证明几类代数具有零 Lie 乘积确定性质。首先,给出零乘积确定性质的一些等价刻画并给出一个应用;其次,证明三角 UHF 代数,可数维局部矩阵代数以及由 \mathcal{I} -子空间格中的有限秩算子构成的代数都具有零 Lie 乘积确定性质;此外,还进一步研究在一些映射下代数零乘积确定性质的保持问题,并给出一些反例。

关键词:零乘积确定代数;零 Lie 乘积确定代数;非自伴代数

中图分类号:O177.1 **文献标志码:**A

引用格式:潘绍泽,苏珊珊.零乘积确定代数的一些注记[J].山东大学学报(理学版),2025,60(8):6-12,51.

A note on zero product determined algebras

PAN Shaoze¹, SU Shanshan²

(1. School of Science, Wuxi University, Wuxi 214105, Jiangsu, China; 2. School of Mathematics, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

Abstract: This paper primarily demonstrates that several classes of algebras possess the property of zero Lie product determinacy. Firstly, it provides some equivalent characterizations of zero product determinacy along with an application. Secondly, we prove that the triangular UHF algebras, countable dimensional locally matrix algebra, and algebras consisting of finite rank operators in \mathcal{I} -subspace lattices are all zero Lie product determined. Furthermore, the paper explores the preservation of the zero product determinacy property under certain mappings and presents several counterexamples.

Key words: zero product determined algebra; zero Lie product determined algebra; non-self-adjoint algebra

0 引言

在本文中, \mathcal{H} 表示复的可分的 Hilbert 空间, $B(\mathcal{H})$ 表示作用在 \mathcal{H} 上的所有有界线性算子构成的代数, $F(\mathcal{H})$ 表示 $B(\mathcal{H})$ 中所有有限秩算子构成的代数。

零乘积确定代数的概念主要来自文献[1-2]。在过去几十年中,该性质得到了深入的研究,这一性质被广泛应用于代数和分析问题,特别是用于解决与导子和同态相关的问题。该性质也常被应用于研究保持问题,更多细节参考文献[3]。当代数为 Lie 代数时,同样可以研究其零 Lie 乘积确定性质。本文将证明一些代数是零(Lie)乘积确定的。

令 \mathcal{L} 表示由 \mathcal{H} 中的闭子空间构成的集族并且包含(0)和 \mathcal{H} ,如果对于 \mathcal{L} 中的任意集族 $\{S_i\}$, $\cap S_i$ 和 $\vee S_i$ 都属于 \mathcal{L} ,其中 \vee 表示 $\{S_i\}$ 的闭的线性生成,则称 \mathcal{L} 为 \mathcal{H} 上的子空间格。如果 \mathcal{L} 是子空间格,令 $\text{Alg } \mathcal{L}$ 表示 $B(\mathcal{H})$ 中使 \mathcal{L} 中的每个闭子空间都不变的算子构成的代数。

本文首先得到了 Banach 代数是零乘积确定的一些等价刻画(命题 2)。通过刻画代数的左乘子来研究该代数是否是零乘积确定的,并证明了当代数是零乘积确定时,与该代数上的导子和同态相关的图代数也

具有零乘积确定性质。给出一些关于零乘积确定性质的反例。其次利用统一的方法来证明一些代数是零 Lie 乘积确定的,比如三角一致超有限代数、可数维局部矩阵代数以及 \mathcal{L} -子空间格代数中的有限秩算子构成的代数。

1 零乘积确定的代数

定义 1^[3] 称结合 (Banach) 代数 \mathcal{A} 是零乘积确定的,如果对 \mathcal{A} 上满足对任意 $x, y \in \mathcal{A}$, 当 $xy=0$ 时, $\phi(x, y)=0$ (连续) 的双线性泛函 ϕ 都存在 \mathcal{A} 上 (连续) 的线性泛函 τ , 使得对任意 $x, y \in \mathcal{A}$, 有 $\phi(x, y)=\tau(xy)$ 。下面的结论给出了上述定义的等价描述, 并且在下文的证明中将经常使用该等价定义。

命题 1^[3] 假设 \mathcal{A} 是有单位元的 (Banach) 代数, 则下列结论等价:

(i) \mathcal{A} 是零乘积确定的。

(ii) 对任意向量 (赋范) 空间 \mathcal{X} , 如果 (连续) 双线性映射 $\phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ 满足当 $x, y \in \mathcal{A}$, $xy=0$ 时有 $\phi(x, y)=0$, 则 $\phi(x, yz)=\phi(xy, z)$, 其中 $x, y, z \in \mathcal{A}$ 。

(iii) 如果 (连续) 双线性泛函 $\phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{C}$ 满足当 $x, y \in \mathcal{A}$, $xy=0$ 时有 $\phi(x, y)=0$, 则

$$\phi(x, yz)=\phi(xy, z),$$

其中 $x, y, z \in \mathcal{A}$ 。

定义 2 假设 \mathcal{A} 是 Banach 代数, \mathcal{M} 是 Banach \mathcal{A} -双模, δ 是从 \mathcal{A} 到 \mathcal{M} 的连续的线性映射, 如果对任意 $x, y \in \mathcal{A}$, $\delta(xy)=\delta(x)y+x\delta(y)$, 则称 δ 为导子。如果对任意 $x \in \mathcal{A}$, 存在从 \mathcal{A} 到 \mathcal{M} 的导子 δ_x 使得 $\delta(x)=\delta_x(x)$, 则称 δ 为局部导子。

定义 3 假设 \mathcal{A} 是 Banach 代数, \mathcal{M} 是 Banach \mathcal{A} -双模, V 是从 \mathcal{A} 到 \mathcal{M} 的线性映射, 如果对任意 $a, b \in \mathcal{A}$, $V(ab)=V(a)b(V(ab)=aV(b))$, 则称 V 为左 (右) 乘子。如果对任意 $a \in \mathcal{A}$, 存在从 \mathcal{A} 到 \mathcal{M} 的左 (右) 乘子使得 $V(a)=V_a(a)$, 则称为 V 为局部左 (右) 乘子。

定义 4 假设 \mathcal{A} 是 Banach 代数, \mathcal{M} 是 Banach \mathcal{A} -双模, 如果对任意 $m \in \mathcal{M}$, $\mathcal{A} \cdot m = \{0\} \Rightarrow m=0$ 和 $m \cdot \mathcal{A} = \{0\} \Rightarrow m=0$, 则称 \mathcal{M} 为分离的 Banach \mathcal{A} -双模。

在下面的命题中, 由 (ii) 推出 (iii) 的证明出自文献 [4], 为了结论的完整性, 在此给出证明细节。

命题 2 假设 \mathcal{A} 是具有有界渐近单位的 Banach 代数。则下列结论等价:

(i) 如果 f 是从 \mathcal{A} 到对偶空间 \mathcal{A}^* 的连续线性映射, 并且满足

$$ab=0 \Rightarrow f(a) \cdot b=0,$$

则 f 是左乘子。

(ii) \mathcal{A} 是零乘积确定的。

(iii) 假设 \mathcal{M} 是分离的 Banach \mathcal{A} -双模, 如果 f 是从 \mathcal{A} 到 \mathcal{M} 的连续线性映射, 并且满足

$$ab=0 \Rightarrow f(a) \cdot b=0,$$

则 f 是左乘子。

证明 (i) \Rightarrow (ii) 假设 φ 是从 $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ 到 \mathbf{C} 的连续双线性泛函, 并且满足当 $xy=0$ 时, $\varphi(x, y)=0$ 。令 f 为从 \mathcal{A} 到 \mathcal{A}^* 的连续线性映射, 对于任意 $a, c \in \mathcal{A}$, 定义

$$f(a)(c)=\varphi(a, c),$$

由于 φ 是连续的双线性泛函, 因此 $f(a) \in \mathcal{A}^*$ 。

如果 $ab=0$, 则对任意 $c \in \mathcal{A}$, 有

$$(f(a) \cdot b)(c)=f(a)(bc)=\varphi(a, bc)=0,$$

因此 $f(a) \cdot b=0$ 。根据假设, f 是左乘子, 即对任意 $a, b \in \mathcal{A}$, $f(ab)=f(a) \cdot b$ 。根据 f 的定义, 对任意 $a, b, c \in \mathcal{A}$, 有

$$\varphi(a, bc)=(f(a) \cdot b)(c)=f(ab)(c)=\varphi(ab, c),$$

因此, \mathcal{A} 是零乘积确定。

(ii) \Rightarrow (iii) 令 f 是从 \mathcal{A} 到 \mathcal{M} 的连续线性映射, 满足对任意 $a, b \in \mathcal{A}$, 当 $ab=0$ 时, $f(a) \cdot b=0$ 。定义从 $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ 到 \mathcal{M} 的连续的双线性映射 ϕ 为

$$\phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}, \quad (a, b) \mapsto f(ab) - f(a) \cdot b,$$

并且当 $ab=0$ 时, $\phi(a, b)=0$ 。

因为 \mathcal{A} 是零乘积确定的, 对任意 $a, b, c \in \mathcal{A}$,

$$\phi(ab, c) = \phi(a, bc),$$

即

$$f(abc) - f(ab) \cdot c = f(abc) - f(a) \cdot bc,$$

所以, 对任意 $a, b, c \in \mathcal{A}$,

$$f(ab) \cdot c = f(a) \cdot bc,$$

即

$$(f(ab) - f(a) \cdot b) \cdot c = 0.$$

因为 \mathcal{M} 是分离的 Banach \mathcal{A} -双模, 所以对任意 $a, b \in \mathcal{A}$,

$$f(ab) = f(a) \cdot b.$$

(iii) \Rightarrow (i) 这是显然的。

注 1 命题 2 可以用来弱化一些已有结论的条件。例如, 在文献[5, 命题 3.2] 中, 具有单位元的 Banach 代数 \mathcal{A} 需要满足以下 2 个条件:

(i) 对任意单位的 Banach \mathcal{A} -双模 \mathcal{B} , 有界算子 $D: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是左乘子的充要条件是 $ab=0 \Rightarrow D(a)b=0$ 。

(ii) 对任意单位的 Banach \mathcal{A} 双模 \mathcal{B} , 有界算子 $D: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 满足: 对任意 $a_0, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, $a_0 a_1 = a_1 a_2 = 0 \Rightarrow a_0 D(a_1) a_2 = 0$ 当且仅当对任意 $a, b, c \in \mathcal{A}$, $D(acb) - aD(cb) - D(ac)b + aD(c)b = 0$ 。

然而, 如果代数 \mathcal{A} 满足条件 (i), 根据命题 2, 则 \mathcal{A} 是零乘积确定的, 然后根据文献[3, 引理 8.11], 可得条件 (ii) 自动成立, 因此文献[5, 命题 3.2] 的结论只需要 \mathcal{A} 满足 (i)。

下面给出在一些映射下代数的零乘积确定性质是保持的。

命题 3 假设 \mathcal{A} 是有单位元的代数, 对任意 $a, b \in \mathcal{A}$, 定义 $a \circ b = \phi(a)b$, 其中 ϕ 是 \mathcal{A} 上的非零可乘线性泛函, 则 \mathcal{A} 在乘法 \circ 下是零乘积确定的代数。

证明 令 φ 是从 $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ 到 \mathbf{C} 的双线性泛函, 并且满足当 $a \circ b = 0$ 时, 有 $\varphi(a, b) = 0$ 。由于对任意 $a, b \in \mathcal{A}$, 有 $\varphi(a - \phi(a)1, b) = 0$, 即

$$\varphi(a, b) = \phi(a)\varphi(1, b), \quad (1)$$

根据式(1), 有

$$\begin{aligned} \varphi(a \circ b, c) &= \phi(a \circ b)\varphi(1, c) \\ &= \phi(a)\phi(b)\varphi(1, c) \\ &= \phi(a)\varphi(1, \phi(b)c) \\ &= \phi(a)\varphi(1, b \circ c) \\ &= \varphi(a, b \circ c), \end{aligned}$$

因此, \mathcal{A} 是零乘积确定的。

如果 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是 Banach 代数, φ 是从 \mathcal{A} 到 \mathcal{B} 的有界同态, 则 φ 的图, $\mathcal{G}(\varphi) = \{(a, \varphi(a)) : a \in \mathcal{A}\}$, 在下列范数与运算下构成 Banach 代数: 对任意 $a, b \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \|(a, \varphi(a))\|_1 &= \|a\|_{\mathcal{A}} + \|\varphi(a)\|_{\mathcal{B}}, \\ (a, \varphi(a)) + (b, \varphi(b)) &= (a+b, \varphi(a+b)), \\ (a, \varphi(a))(b, \varphi(b)) &= (ab, \varphi(a)\varphi(b)) = (ab, \varphi(ab)). \end{aligned}$$

命题 4 如果 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是 Banach 代数, 且 \mathcal{A} 是具有有界渐近单位的零乘积确定代数, 令 φ 是从 \mathcal{A} 到 \mathcal{B} 的有界同态, 则 $\mathcal{G}(\varphi) = \{(a, \varphi(a)) : a \in \mathcal{A}\}$ 是零乘积确定的 Banach 代数。

证明 如果 $\{e_i\}$ 是 \mathcal{A} 的有界渐近单位, 则 $\{(e_i, \varphi(e_i))\}$ 是 $\mathcal{G}(\varphi)$ 的有界渐近单位。

假设 $\phi: \mathcal{F}(\varphi) \times \mathcal{F}(\varphi) \rightarrow \mathbf{C}$ 是连续双线性泛函, 并且对任意 $a, b \in \mathcal{A}$, 当 $(a, \varphi(a))(b, \varphi(b)) = 0$ 时, $\phi((a, \varphi(a)), (b, \varphi(b))) = 0$ 。

显然, $(a, \varphi(a))(b, \varphi(b)) = 0$ 当且仅当 $ab = 0$, 因此可以定义从 $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ 到 \mathbf{C} 的泛函 Φ , 使得对任意 $a, b \in \mathcal{A}$,

$$\Phi(a, b) = \phi((a, \varphi(a)), (b, \varphi(b))),$$

因此, Φ 是有界的双线性泛函, 并且对任意 $a, b \in \mathcal{A}$, 当 $ab = 0$ 时, $\Phi(a, b) = 0$ 。因为 \mathcal{A} 是零乘积确定的, 所以对任意 $a, b, c \in \mathcal{A}$,

$$\Phi(ab, c) = \Phi(a, bc),$$

即

$$\phi((ab, \varphi(ab)), (c, \varphi(c))) = \phi((a, \varphi(a)), (bc, \varphi(bc))),$$

展开上面的等式, 可得

$$\begin{aligned} \phi((a, \varphi(a))(b, \varphi(b)), (c, \varphi(c))) &= \phi((ab, \varphi(ab)), (c, \varphi(c))) \\ &= \phi((a, \varphi(a)), (bc, \varphi(bc))) \\ &= \phi((a, \varphi(a)), (b, \varphi(b))(c, \varphi(c))), \end{aligned}$$

因此, $\mathcal{F}(\varphi)$ 是零乘积确定的。

假设 \mathcal{A} 是 Banach 代数, \mathcal{M} 是 Banach \mathcal{A} -双模, δ 是从 \mathcal{A} 到 \mathcal{M} 的有界导子, 则 δ 的图, $\mathcal{G}(\delta) = \{(a, \delta(a)) : a \in \mathcal{A}\}$, 在下列范数与运算下构成 Banach 代数: 对任意 $a, b \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \|(a, \delta(a))\|_1 &= \|a\|_{\mathcal{A}} + \|\delta(a)\|_{\mathcal{M}}, \\ (a, \delta(a)) + (b, \delta(b)) &= (a+b, \delta(a+b)), \\ (a, \delta(a))(b, \delta(b)) &= (ab, \delta(a)b + a\delta(b)) = (ab, \delta(ab)). \end{aligned}$$

与命题 4 的证明类似, 可得到如下结果。

命题 5 假设 \mathcal{A} 是有有界渐近单位的零乘积确定的 Banach 代数, \mathcal{M} 是 Banach \mathcal{A} -双模。令 δ 是从 \mathcal{A} 到 \mathcal{M} 的有界导子, 则 $\mathcal{G}(\delta) = \{(a, \delta(a)) : a \in \mathcal{A}\}$ 是零乘积确定的 Banach 代数。

命题 6 假设 \mathcal{A} 是 $B(\mathcal{H})$ 中零乘积确定的 Banach 子代数, 并且有有界的左渐近单位。如果 $P, Q \in \text{Lat } \mathcal{A}$, 其中 $\text{Lat } \mathcal{A}$ 表示 \mathcal{A} 的不变子空间构成的集合, 则 $\mathcal{B} = \overline{(P-Q)\mathcal{A}(P-Q)}^{\|\cdot\|}$ 是零乘积确定的 Banach 代数。

证明 定义 $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow (P-Q)\mathcal{A}(P-Q)$, 对任意 $A \in \mathcal{A}$, $\Phi(A) = (P-Q)A(P-Q)$, 则 Φ 是有界满同态, 根据文献[3, 推论 5.7], \mathcal{B} 是零乘积确定的。

在本章的最后, 给出几个与零乘积确定性质相关的反例。

假设 $T \in B(\mathcal{H})$, 令 \mathcal{A}_T 表示由 T 和单位元 I 生成的 Banach 代数, 令 $\text{Lat } T$ 表示算子 T 的所有闭的不变子空间构成的格, $\text{Alg Lat } T$ 表示 $B(\mathcal{H})$ 中满足 $\text{Lat } T \subseteq \text{Lat } A$ 的算子 A 构成的代数, $\mathcal{W}(T)$ 表示由算子 T 和单位元 I 生成的弱算子闭的代数。如果 $\mathcal{W}(T) = \text{Alg Lat } T$, 则称算子 T 是自反的。在文献[6]中, Wogen 构造了一些反例证明: 如果算子 T 是自反的, 但 T^2 不一定是自反的; 如果算子 T_1, T_2 是自反的, 但 $T_1 \oplus T_2$ 不一定是自反的。

受到 Wogen 的启发, 本文将构造例子去表明当 \mathcal{H} 是无穷维时, 存在 $B(\mathcal{H})$ 中的算子 T_1, T_2, T_3 使得 \mathcal{A}_{T_i} 是零乘积确定的, 但 $\mathcal{A}_{T_1^2}$ 和 $\mathcal{A}_{T_2 \oplus T_3}$ 不是零乘积确定的。

在反例的证明中, 本文主要应用下面的结论, 命题 7 的纯代数版本来自文献[3]。下面说明该命题在分析框架下也是成立的。

假设 \mathcal{A} 是 Banach 代数, 令 $\mathcal{A}^2 = \text{span}\{xy : x, y \in \mathcal{A}\}$ 。

命题 7 假设 \mathcal{A} 是 Banach 代数, 并且 $\overline{\mathcal{A}^2} \neq \mathcal{A}$, 则 \mathcal{A} 的单位化, $\mathcal{A}^\# = \mathcal{A} \oplus \mathbf{C}1$, 不是零乘积确定的 Banach 代数。

证明 令 ϕ 是从 $\mathcal{A}^\# \times \mathcal{A}^\#$ 到商空间 $\overline{\mathcal{A}^\# / \mathcal{A}^2}$ 的连续双线性映射, 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $x, y \in \mathcal{A}$,

$$\phi(\alpha+x, \beta+y) = \alpha y + \overline{\mathcal{A}^2}.$$

如果 $(\alpha+x)(\beta+y) = 0$, 则 $\alpha\beta = 0$ 且 $\alpha y + \beta x + xy = 0, \alpha = 0$ 或 $\beta = 0$, 故 $\alpha y \in \overline{\mathcal{A}^2}$. 因此 ϕ 保零乘积. 然而, 如果 $z \in \overline{\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^2}$, 则 $\phi(1, z) = z + \overline{\mathcal{A}^2} \neq 0$, 而 $\phi(z, 1) = 0$. 根据命题 1, $\mathcal{A}^\#$ 不是零乘积确定的.

首先给出双侧移位算子的定义. 令 \mathcal{H} 表示由双向平方可和的序列构成的 Hilbert 空间. \mathcal{H} 中的元素可以写成下列形式:

$$\langle \dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, (\xi_0), \xi_1, \xi_2, \dots \rangle;$$

括号内的元素表示第 0 个位置对应的项. \mathcal{H} 上的双侧移位算子 W 定义为

$$W \langle \dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, (\xi_0), \xi_1, \xi_2, \dots \rangle = \langle \dots, \xi_{-3}, \xi_{-2}, (\xi_{-1}), \xi_0, \xi_1, \dots \rangle.$$

例 1 在 $B(\mathcal{H})$ 中存在算子 T_1, T_2 , 使得 $\mathcal{A}_{T_1}, \mathcal{A}_{T_2}$ 是零乘积确定的, 但 $\mathcal{A}_{T_1 \oplus T_2}$ 不是零乘积确定的.

证明 令 $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{T})$, 其中 \mathcal{T} 表示复平面上的单位圆. 假设 Γ 是 \mathcal{T} 的真子集, 令 $\mathcal{H}_1 = L^2(\Gamma), \mathcal{H}_2 = L^2(\mathcal{T} \setminus \Gamma)$, 所以 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. 令 $f \in L^\infty(\mathcal{T})$ 定义为 $f(e^{i\theta}) = e^{i\frac{\theta}{2}}, \theta \in [0, 2\pi)$. 令 M_f 表示 $L^2(\mathcal{T})$ 上与 f 相关的乘法算子, 则 $G := (M_f)^2 = M_{f^2}$ 是双侧移位算子.

令 $\text{Lat}(G)$ 表示 G 的所有的不变子空间构成的集合. 因为 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \text{Lat}(G), G = T_1 \oplus T_2$, 其中 T_1, T_2 表示 G 分别限制到 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2 上的算子. 根据文献[7, 推论 2.11], \mathcal{A}_{T_1} 和 \mathcal{A}_{T_2} 都相似于 C^* -代数, 因此都是零乘积确定的.

令 \mathcal{B} 表示由 G 生成的没有单位元的代数, 由于 G 是双侧移位算子 $G^2 \neq G$, 因此 $\mathcal{B}^2 \neq \mathcal{B}$. 所以根据命题 7, \mathcal{A}_G 不是零乘积确定的.

下面的例子将用类似的方式去证明.

例 2 存在 $B(\mathcal{H})$ 中的算子 T 使得 \mathcal{A}_T 是零乘积确定的, 但是 \mathcal{A}_{T^2} 不是零乘积确定的.

证明 令 $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{T})$, 其中 \mathcal{T} 表示复平面上的单位圆. 令 $f \in L^\infty(\mathcal{T})$ 定义为 $f(e^{i\theta}) = e^{i\frac{\theta}{2}}, \theta \in [0, 2\pi)$. 令 M_f 表示 $L^2(\mathcal{T})$ 上与 f 相关的乘法算子, M_f 是正规算子并且谱属于 \mathcal{T} 的上半平面. 根据文献[7, 推论 2.11], \mathcal{A}_{M_f} 是顺从的, 所以相似于一个 C^* -代数. 因此, \mathcal{A}_{M_f} 是零乘积确定的.

令 $G = M_f^2 = M_{f^2}, G$ 是双侧移位算子. 令 \mathcal{B} 表示由 G 生成的没有单位元的代数. 由于 G 是双侧移位算子 $G^2 \neq G$, 因此 $\mathcal{B}^2 \neq \mathcal{B}$. 因此根据命题 7, \mathcal{A}_G 不是零乘积确定的.

2 零 Lie 乘积确定的代数

在文献[8]中讨论了具有哪些性质的代数是零 Lie 乘积确定的. 在这一章中将对具体的代数进行研究, 并得出了三角 UHF 代数, 可数维局部矩阵代数等是零 Lie 乘积确定的结论. 在这些研究中, 主要应用了下列结论.

定义 5 如果从 Banach 代数 \mathcal{A} 到其对偶空间 \mathcal{A}^* 的连续导子都是内导子, 则称 Banach 代数 \mathcal{A} 为弱顺从.

定理 1^[8] 假设 \mathcal{A} 是弱顺从并且具有有界渐近单位的 Banach 代数, 如果 \mathcal{A} 是零乘积确定的, 则 \mathcal{A} 是零 Lie 乘积确定的.

定义 6 (Banach) 代数 \mathcal{A} 称为零 Lie 乘积确定的, 如果 \mathcal{A} 上任意满足当 $xy = yx, \phi(x, y) = 0$ (连续) 的双线性泛函 ϕ 都存在 $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ 上的线性泛函 τ , 使得对任意 $x, y \in \mathcal{A}, \phi(x, y) = \tau([x, y])$, 其中 $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ 表示 (Banach) 代数 \mathcal{A} 的所有换位子的线性生成.

需要注意的是, 在上述定义中的线性泛函 τ 不一定是连续的, 这与 Brešar^[3] 的书中的定义有所区别.

2.1 三角 UHF 代数

定义 7 假设有整数 $k_n, n \in \mathbf{N}$, 满足对所有 n 都有 $k_n | k_{n+1}, \mathcal{A}_\phi = \overline{\bigcup_n M_{k_n}}^{\|\cdot\|}$ 是 UHF 代数, 其中 $\phi_n: M_{k_n} \rightarrow M_{k_{n+1}}$ 是单位嵌入映射. 令 \mathcal{T}_{k_n} 表示 M_{k_n} 中的上三角矩阵构成的代数. 如果 $\phi_n(\mathcal{T}_{k_n}) \subset \mathcal{T}_{k_{n+1}}$, 则称 $T_\phi = \overline{\bigcup_n \mathcal{T}_{k_n}}^{\|\cdot\|}$ 为三角 UHF 代数.

定理 2 假设 \mathcal{A} 是三角 UHF 代数,则 \mathcal{A} 是零 Lie 乘积确定的 Banach 代数。

证明 令 $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$, 其中 \mathcal{T}_n 是所有 $n \times n$ 阶上三角复矩阵构成的代数,并且满足 $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_{n+1}$, 则 $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{B}}^{\|\cdot\|}$ 。

令 φ 是 \mathcal{A} 上的连续双线性泛函,并且满足对任意 $x, y \in \mathcal{A}$,

$$[x, y] = 0 \Rightarrow \varphi(x, y) = 0.$$

首先证明 $[\mathcal{B}, \mathcal{B}]$ 上存在线性泛函 ρ , 使得对任意 $x, y \in \mathcal{B}$, $\varphi(x, y) = \rho([x, y])$ 。

事实上,对任意 $n \in \mathbf{N}$, \mathcal{T}_n 是有限 Nest 代数。因此,根据文献[9, 定理 3.1], \mathcal{T}_n 是零 Lie 乘积确定的 Banach 代数。令 φ_n 表示 φ 在 \mathcal{T}_n 上的限制,则 φ_n 在 \mathcal{T}_n 上满足上面的等式,因此,在 $[\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_n]$ 上存在线性函数 τ_n , 使得对任意 $x, y \in \mathcal{T}_n$, $\varphi_n(x, y) = \tau_n([x, y])$ 。

因为 \mathcal{T}_1 可以嵌入到 \mathcal{T}_2 , 因此得到了一个线性泛函序列 $\{\tau_n\}$ 使得 $\tau_1 \subseteq \tau_2 \subseteq \dots \subseteq \tau_n \subseteq \dots$, 并且对任意 $x, y \in \mathcal{T}_n$, $\tau_{n+1}|_{[\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_n]}([x, y]) = \varphi_{n+1}(x, y) = \varphi_n(x, y) = \tau_n([x, y])$ 。从而在 $[\mathcal{B}, \mathcal{B}]$ 上存在线性泛函 ρ , 使得 $\rho|_{[\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_n]} = \tau_n$ 。对任意 $x, y \in \mathcal{B}$, 存在某个 \mathcal{T}_n , 使得 $x, y \in \mathcal{T}_n$ 并且 $\varphi(x, y) = \tau_n([x, y]) = \rho([x, y])$ 。

接下来证明 \mathcal{A} 是零 Lie 乘积确定的。因为 $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{B}}^{\|\cdot\|}$, 对任意 $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, 定义 $\tilde{\rho}([a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(a_n, b) = \varphi(a, b)$, 其中 $\{a_n\} \subset \mathcal{B}$ 并且 $\{a_n\}$ 在范数拓扑下收敛到 a 。

对任意 $a, c \in \mathcal{A}$, 存在 $\{c_n\} \subset \mathcal{B}$, 使得 $\{c_n\}$ 在范数拓扑下收敛到 c 。因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\rho}([a, c_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(a, c_n) = \varphi(a, c)$ 。所以 $\tilde{\rho}([a, c_n])$ 的极限存在, 极限表示为 $\tilde{\rho}([a, c])$ 。在 $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ 上定义了泛函 $\tilde{\rho}$ 并且定义是良好的, $\tilde{\rho}$ 是线性的并且满足 $\tilde{\rho}|_{\mathcal{B}} = \rho$ 。

2.2 局部矩阵代数

定义 8 假设 \mathcal{A} 是结合代数, 如果对 \mathcal{A} 的每个有限子集 \mathcal{I} , 存在 \mathcal{A} 的子代数 \mathcal{B} 使得 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}$ 并且 $\mathcal{B} \cong M_n(\mathbf{C})$, 则称 \mathcal{A} 为局部矩阵代数。

定理 3 假设 \mathcal{A} 是可数维的局部矩阵代数并且有一个非平凡的幂等元 e , 则 \mathcal{A} 是零 Lie 乘积确定的代数。

证明 如果 \mathcal{A} 是有单位元的, 根据 Köthe 定理([10]), $\mathcal{A} \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$, 其中 \mathcal{A}_i 是有限维的矩阵代数, $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$ 表示 $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的代数张量积。对任意 $a_1 \in \mathcal{A}_1$, a_1 可表示为 $a_1 \otimes \mathbf{C1} \otimes \mathbf{C1} \otimes \dots \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \dots$ 。

因为 \mathcal{A}_i 可以被嵌入到 $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$, n 可能无限。所以有

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 1} (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n).$$

由于 $\mathcal{A}_i \otimes \mathcal{A}_j \cong M_{n_i}(\mathbf{C}) \otimes M_{n_j}(\mathbf{C}) \cong M_{n_i n_j}(\mathbf{C})$, 因此 $\mathcal{A}_i \otimes \mathcal{A}_j$ 是零 Lie 乘积确定的代数。类似于定理 2 的证明, 可得 \mathcal{A} 是零 Lie 乘积确定的代数。

假设 \mathcal{A} 没有单位元, 由于存在非平凡的幂等元 e , 因此存在一列由幂等元构成的序列 $e_1 = e, e_2, \dots$, 使得 $e_i \mathcal{A} e_i \subseteq e_{i+1} \mathcal{A} e_{i+1}$, $i \geq 1$, 并且 $\bigcup_{i \geq 1} e_i \mathcal{A} e_i = \mathcal{A}$, 其中对每个 i , $e_i \mathcal{A} e_i$ 是可数维的有单位元的局部矩阵代数, 因此也可以通过类似的证明方法得到 \mathcal{A} 是零 Lie 乘积确定的。

2.3 \mathcal{I} -子空间格代数和可测算子代数

\mathcal{I} -子空间格代数是一类非自伴代数, 由 Longstaff 等在文献[11-12]中引入, 并随后被其他研究者广泛研究。五边形子空间格和原子 Boolean 子空间格都是 \mathcal{I} -子空间格。在定理 4 中, 将证明 \mathcal{I} -子空间格代数中所有有限秩算子构成的代数是零 Lie 乘积确定的。

假设 \mathcal{L} 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 上的子空间格, 令

$$\mathcal{I}(\mathcal{L}) = \{K \in \mathcal{L} : K \neq \{0\} \text{ 并且 } K_{\perp} \neq \mathcal{H}\},$$

其中 $K_{\perp} = \vee \{L \in \mathcal{L} : L \not\supseteq K\}$ 。

定义 9 Hilbert 空间 \mathcal{H} 上的子空间格 \mathcal{L} 称为 \mathcal{I} -子空间格。如果

- (i) $\vee \{K : K \in \mathcal{I}(\mathcal{L})\} = \mathcal{H}$;
- (ii) $\wedge \{\mathcal{H} : \mathcal{H} \in \mathcal{I}(\mathcal{L})\} = \{0\}$;
- (iii) $K \vee K_{\perp} = \mathcal{H}$ 对每个 $K \in \mathcal{I}(\mathcal{L})$;

(iv) $K \wedge K_- = \{0\}$ 对每个 $K \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ 。

令 $K \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$, $F_1(K) = \{x \otimes f : 0 \neq x \in K, 0 \neq f \in K^\perp\}$, 其中 K^\perp 表示 K 的零化子, 即 $K^\perp = \{f \in \mathcal{H}^* : f(x) = 0, x \in K\}$ 。令 $F(K)$ 表示 $F_1(K)$ 的线性生成。

引理 1 令 $K \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$, 则 $F(K)$ 是零 Lie 乘积确定的代数。

证明 根据文献[13, 引理 3.6], $F(K)$ 是局部矩阵代数。根据定理 3, $F(K)$ 是零 Lie 乘积确定的。

定理 4 令 \mathcal{L} 是 \mathcal{F} -子空间格, 则 $\text{Alg } \mathcal{L} \cap F(\mathcal{H})$ 是零 Lie 乘积确定的代数。

证明 容易得到 $\text{Alg } \mathcal{L} \cap F(\mathcal{H}) = \text{span}\{F(K) : K \in \mathcal{F}(\mathcal{L})\}$ 。根据文献[14, 命题 1.1(3)(4)], 对任意 $K, L \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$, $F_1(K) \cap F_1(L) = \emptyset$ 当且仅当 $K \neq L$ 并且 $F_1(K)F_1(L) = \{0\}$, 当且仅当 $K \neq L$, 因此 $F(K) \cap F(L) = \emptyset$ 当且仅当 $K \neq L$, $F(K)F(L) = \{0\}$ 当且仅当 $K \neq L$, 则

$$\text{Alg } \mathcal{L} \cap F(\mathcal{H}) = \sum_{K \in \mathcal{F}(\mathcal{L})} \oplus F(K).$$

根据引理 1, $\text{Alg } \mathcal{L} \cap F(\mathcal{H})$ 是零 Lie 乘积确定的。

令 \mathcal{M} 是 von Neumann 代数, $S(\mathcal{M})$ 表示附属于 \mathcal{M} 的所有可测算子在强和, 强积和对合运算下构成的代数^[15]。

在下面的命题中得到当 \mathcal{M} 是 I_n 型的 von Neumann 代数时, $S(\mathcal{M})$ 是零 Lie 乘积确定的代数。

引理 2^[3] 如果 \mathcal{B} 是交换的有单位元的代数, 则 $M_n(\mathcal{B})$ 是零 Lie 乘积确定的代数。

命题 8 如果 \mathcal{M} 是 I_n 型的 von Neumann 代数, 则 $S(\mathcal{M})$ 是零 Lie 乘积确定的代数。

证明 如果 \mathcal{M} 是 I_n 型, 则 $\mathcal{M} \cong M_n(\mathcal{B})$, 其中 \mathcal{B} 是交换的 von Neumann 代数, 则 $S(\mathcal{M}) \cong M_n(S(\mathcal{B}))$, 并且 $S(\mathcal{B})$ 是交换代数。根据引理 2, $S(\mathcal{M})$ 是零 Lie 乘积确定的。

2.4 双边零乘积确定的代数

定义 10 Banach 代数 \mathcal{A} 称为双边零乘积确定的, 如果 $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ 上任意满足以下性质的连续的双线性泛函 φ : 对任意 $x, y \in \mathcal{A}$,

$$xy = yx = 0 \Rightarrow \varphi(x, y) = 0,$$

都有下列形式:

$$\varphi(x, y) = \tau_1(xy) + \tau_2(yx),$$

其中, τ_1, τ_2 为 \mathcal{A} 上的连续线性泛函。

下列命题是对文献[16, 推论 3.2]的推广。

命题 9 复的 Hilbert 空间上的任意有限 Nest 代数都是双边零乘积确定的。

证明 首先, 根据文献[9, 引理 3.2]得到任意有限 Nest 代数都是弱顺从的。由于有限的 Nest 代数是零乘积确定的, 因此根据文献[3, 定理 6.6]得到, 任意有限 Nest 代数都是双边零乘积确定的。

参考文献:

- [1] ALAMINOS J, EXTREMERA J, VILLENA R, et al. Characterizing homomorphisms and derivations on C^* -algebras[J]. Proc R Soc Edinburg Sect, 2007, 137(1):1-7.
- [2] BREŠAR M, ŠEMEL P. On bilinear maps on matrices with applications to commutativity preservers[J]. J Algebra, 2006, 301(2):803-837.
- [3] BREŠAR M. Zero product determined algebras[M]. Berlin: Springer, 2021:33-58.
- [4] 陈全园. 算子代数的自反性及其上的若干映射的研究[D]. 上海: 同济大学, 2012.
CHEN Quanyuan. A study of reflexivity of operator algebras and several mappings on them[D]. Shanghai: Tongji University, 2012.
- [5] SAMEI E. Local properties of the Hochschild cohomology of C^* -algebras[J]. J Aust Math Soc, 2008, 84:117-130.
- [6] WOGEN W. Some counterexamples in nonselfadjoint algebras[J]. Ann Math, 1987, 126(2):415-427.
- [7] MARCOUX L, POPOV A. Abelian, amenable operator algebras are similar to C^* -algebras[J]. Duke Math J, 2016, 165(12):2391-2406.