

离散时间 Bernoulli 噪声泛函上算子值函数的可微性

唐玉玲

(河西学院数学学院,甘肃 张掖 734000)

摘要:设 M 是具有混沌表示性质的离散时间正规鞅, $S(M) \subset L^2(M) \subset S^*(M)$ 是与 M 相关的 Gel'fand 三元组,用 $L(S(M), S^*(M))$ 表示从 $S(M)$ 到 $S^*(M)$ 的连续线性算子构成的空间, O 表示 \mathbf{R}^d 的一个开集,探讨从 O 到 $L(S(M), S^*(M))$ 的算子值函数的可微性。以 2D-Fock 变换为工具,得到从 O 到 $L(S(M), S^*(M))$ 的算子值函数的可微性刻画定理。

关键词:鞅; 2D-Fock 变换; 卷积; 可微性

中图分类号: O177; O211 **文献标志码:** A

引用格式: 唐玉玲. 离散时间 Bernoulli 噪声泛函上算子值函数的可微性[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(9): 137-142.

Differentiability of operator-valued functions on discrete-time Bernoulli noise functionals

TANG Yuling

(School of Mathematics, Hexi University, Zhangye 734000, Gansu, China)

Abstract: Let M be a discrete-time normal martingale that has the chaotic representation property and $S(M) \subset L^2(M) \subset S^*(M)$ a Gel'fand triple associated with M . Let $L(S(M), S^*(M))$ be the space of all continuous linear operators from $S(M)$ to $S^*(M)$ and O be an open subset of \mathbf{R}^d . The differential of operator-valued functions from O to $L(S(M), S^*(M))$ is investigated. Mainly using the 2D-Fock transform as a tool, a differentiability characterization theorem is obtained for operator-valued functions from O to $L(S(M), S^*(M))$.

Key words: martingale; 2D-Fock transform; convolution; differentiability

0 引言

Hida 白噪声分析本质上是 Brown 运动广义泛函无穷维随机分析理论,具有重要的物理意义并且被广泛应用于数学物理领域^[1-2]。1988 年, Ito^[3] 引入了 Poisson 白噪声分析,可以将其看做 Poisson 鞅广义泛函的无穷维随机分析理论。众所周知, Brown 运动和 Poisson 鞅都是连续时间的正规鞅,是其他连续时间情形下的白噪声分析理论。然而,众多学者对离散时间正规鞅泛函越来越感兴趣,并提出了离散时间正规鞅泛函的混沌积分问题^[4],考虑了 Rademacher 泛函(一种特殊的离散时间正规鞅泛函)的正规逼近^[5]和参数广义泛函的可微性问题^[6]。2004 年,王湘君和王才士^[7]则把参数广义泛函的可微性研究工作推广到广义算子值函数,探讨了广义算子值函数在经典白噪声分析框架 $(E) \subset (L^2) \subset (E^*)$ 下的可微性问题,得到了广义算子值函数可由解析性和增长性条件同时刻画的结论。2010 年, Wang 等^[8]从量子概率论的角度出发,探讨了作用于一类特殊的离散时间正规鞅平方可积泛函的湮灭、增生算子族 $\{\partial_k^*, \partial_k\}_{k \geq 0}$ 。假设 M 是离散时间正规鞅, $L^2(M)$ 是 M 的平方可积泛函构成的复 Hilbert 空间,则由 $L^2(M)$ 和文献[9]中定义在其上的稠定的正自伴算

收稿日期:2024-02-27; 网络出版时间:2024-12-10 15:55:49

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12161050); 甘肃省高校创新基金资助项目(2021B-254); 河西学院博士科研启动基金资助项目(KYQD2020021); 河西学院校长基金创新团队项目(CXTD2022010, CXTD2022013)

作者简介:唐玉玲(1980—),女,副教授,硕士生导师,博士,研究方向为随机分析及其应用。E-mail:tyl0316@163.com

子,可得一个复 Gel'fand 三元组

$$S(M) \subset L^2(M) \subset S^*(M).$$

同时,文献[9]中通过 Fock 变换建立了关于离散时间正规鞅广义泛函的刻画定理。2017 年, Wang 和 Chen^[10]对于从 $S(M)$ 到 $S^*(M)$ 的连续线性算子通过 2D-Fock 变换建立了离散时间正规鞅泛函上算子的刻画定理。2020 年,石佳等^[11]引入关于 $S^*(M)$ -值测度和 $S^*(M)$ -值函数的积分运算,讨论了 $S^*(M)$ 空间中的 Bochner-Wick 积分。陈金淑等进一步讨论了离散时间正规鞅广义泛函值函数的 Bochner-卷积积分^[12]以及离散时间正规鞅算子值函数的 Bochner 积分^[13]。

假设 $L=L(S(M), S^*(M))$ 表示从 $S(M)$ 到 $S^*(M)$ 的连续线性算子构成的空间, O 表示 \mathbf{R}^d 的一个开集,则可在 L 中定义基于 2D-Fock 变换的卷积 $*$,从而, $(L, *)$ 构成了一个关于卷积运算和单位元的可交换代数。受上述工作的启发,本文探讨从 O 到 $L(S(M), S^*(M))$ 的算子值函数的可微性,以 2D-Fock 变换为工具,刻画了作用于离散时间正规鞅泛函上的算子值函数的可微性。

本文中总是假定 \mathbf{N}^* 表示非负整数集, Γ 为 \mathbf{N}^* 的有限幂集,即

$$\Gamma = \{ \sigma \mid \sigma \subset \mathbf{N}^*, \#(\sigma) < \infty \},$$

其中, $\#\sigma$ 表示集合 σ 的基数。

1 离散时间正规鞅泛函上的算子

本章简单回顾 $S(M)$ 到 $S^*(M)$ 的连续线性算子的相关概念和记号,具体参见文献[9-13]。

假设 (Ω, F, P) 为给定的概率空间,称 (Ω, F, P) 上的实值随机变量序列 $M = (M_n)_{n \geq 0}$ 为离散时间正规鞅是指 $\{M_n \mid n \geq 0\} \subset L^2(\Omega, F, P)$ 且满足:

- 1) $M = (M_n)_{n \geq 0}$ 关于代数流 $(F_n)_{n \geq 0}$ 是一个中心化的鞅,其中, $F_n = \sigma(M_k, 0 \leq k \leq n)$;
- 2) $E(M_0 \mid F_{-1}) = 1, E(M_n^2 \mid F_{n-1}) = M_{n-1}^2 + 1, n \geq 1$, 其中, $F_{-1} = \{ \emptyset, \Omega \}, E[\cdot \mid F_n]$ 为 F_n 的条件期望。

设 $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$ 是与 $M = (M_n)_{n \geq 0}$ 相联系的离散时间正规噪声。为简便起见,用 $L^2(M)$ 表示 M 的平方可积泛函构成的复 Hilbert 空间,即

$$L^2(M) = L^2(\Omega, F_\infty, P),$$

其中,内积和范数与空间 $L^2(\Omega, F, P)$ 相同,即表示为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\| \cdot \|$ 。注意到, $\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$ 构成了 $L^2(M)$ 的可数标准正交基,其中, $Z_\emptyset = 1$,

$$Z_\sigma = \prod_{n \in \sigma} Z_n, \quad \sigma \in \Gamma, \quad \sigma \neq \emptyset.$$

文献[9]中由标准正交基构造的 $L^2(M)$ 的稠密线性子空间 $S(M)$ 实际上是一个连续包含于 $L^2(M)$ 的可数 Hilbert 核空间, $S^*(M)$ 为 $S(M)$ 赋予强拓扑的对偶空间,则通过将 $L^2(M)$ 与其对偶等同,得到一个 Gel'fand 三元组

$$S(M) \subset L^2(M) \subset S^*(M),$$

称之为与 M 相联系的 Gel'fand 三元组。 $S(M)$ 中的元素称为 M 检验泛函, $S^*(M)$ 中的元素称为 M 广义泛函。用 $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ 表示 $S^*(M) \times S(M)$ 上的典则双线性型,即

$$\langle \langle \Phi, \xi \rangle \rangle = \Phi(\xi), \quad \Phi \in S^*(M), \quad \xi \in S(M).$$

本文中,以 $L=L(S(M), S^*(M))$ 表示从 $S(M)$ 到 $S^*(M)$ 的连续线性算子构成的空间。

定义 1^[10] 设 $T \in L$, 其 2D-Fock 变换是 $\Gamma \times \Gamma$ 上的函数 \hat{T} , 定义为

$$\hat{T}(\sigma, \tau) = \langle \langle T(Z_\sigma), Z_\tau \rangle \rangle, \quad \sigma, \tau \in \Gamma,$$

其中, $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ 是 $S^*(M) \times S(M)$ 上的典则双线性型。

引理 1^[9] 设 $\sigma \mapsto \lambda_\sigma$ 为 Γ 上的 \mathbf{N}^* -值函数,即

$$\lambda_\sigma = \begin{cases} \prod_{k \in \sigma} (k + 1), & \sigma \neq \emptyset, \sigma \in \Gamma, \\ 1, & \sigma = \emptyset. \end{cases}$$

则对于 $p > 1$, 正项级数 $\sum_{\sigma \in \Gamma} \lambda_\sigma^{-p}$ 收敛,并且

$$\sum_{\sigma \in \Gamma} \lambda_{\sigma}^{-p} \leq \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p} \right] < \infty .$$

类似于 M 广义泛函, L 中的连续线性算子完全由其 $2D$ -Fock 变换唯一确定。

引理 2^[10] 设 G 是定义在 $\Gamma \times \Gamma$ 上的函数, 则 G 是算子 $T \in L$ 的 $2D$ -Fock 变换当且仅当存在常数 $c \geq 0, p \geq 0$, 使得

$$|G(\sigma, \tau)| \leq c \lambda_{\sigma}^p \lambda_{\tau}^p, \quad \sigma, \tau \in \Gamma, \tag{1}$$

此种情形下, 对 $q > p + \frac{1}{2}$, 有

$$\|T\|_q \leq c \sum_{\sigma \in \Gamma} \lambda_{\sigma}^{-2(q-p)},$$

特别地, T 在 $S_q^*(M)$ 中取值, 其中

$$\|T\|_p \equiv \sup_{\xi \neq 0, \xi \in S(M)} \frac{\|T(\xi)\|_{-p}}{\|\xi\|_p}, \quad p \geq 0.$$

注 1 引理 2 表明, L 中的连续线性算子仅用增长性条件即可刻画, 这不同于 Gauss 白噪声广义算子的情形, Gauss 白噪声的广义算子的刻画同时要求满足增长性条件和解析性条件(见文献[10])。

一般而言, 算子 $T_1, T_2 \in L$ 的普通乘积 $T_1 T_2$ 是没有意义的, 然而, 由 $2D$ -Fock 变换可以证明, 存在唯一的 $T \in L$, 使得

$$\hat{T}(\sigma, \tau) = \hat{T}_1(\sigma, \tau) \hat{T}_2(\sigma, \tau), \quad \sigma, \tau \in \Gamma. \tag{2}$$

这样, 可定义连续线性算子 $T_1, T_2 \in L$ 的新乘积如下。

定义 2^[9] 设 $T_1, T_2 \in L$, 则由式(2)给出的算子 T 称为 T_1 与 T_2 的卷积, 记作 $T_1 * T_2$ 。

2 算子值函数的可微性

本章主要以 $2D$ -Fock 变换为工具探讨函数 $f(\cdot) : O \rightarrow L$ 的可微性。称满足式(1)的函数为离散时间正规鞅 U -泛函, 用 \mathfrak{N} 表示离散时间正规鞅 U -泛函全体构成的空间。

定义 3 称映射 $f(\cdot) : O \rightarrow L$ 是弱可测的, 若对于任意的 $\xi, \eta \in S(M)$, $\langle \langle f(\cdot) \xi, \eta \rangle \rangle$ 是 Borel 可测的。

定义 4 称算子序列 $(T_n)_{n \geq 1} \subset L$ 弱收敛于 $T \in L$, 若对于任意的 $\xi, \eta \in S(M)$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \langle T_n \xi, \eta \rangle \rangle = \langle \langle T \xi, \eta \rangle \rangle.$$

称映射 $f(\cdot) : O \rightarrow L$ 在点 $x_0 \in O$ 处弱连续, 若对于任意的 $\xi, \eta \in S(M)$, 有

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \langle \langle f(x) \xi, \eta \rangle \rangle = \langle \langle f(x_0) \xi, \eta \rangle \rangle.$$

定义 5 考虑映射 $f(\cdot) : O \rightarrow L$, 设 $\{e_k\}_{k=1,2,\dots,d} \subset \mathbf{R}^d$ 为 \mathbf{R}^d 的标准正交基, $x_0 \in O$, 如果存在 L 中的算子, 记作 $(D_k f)(x_0) \in L$, 使得极限

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{\langle \langle f(x + h e_k) \xi, \eta \rangle \rangle - \langle \langle f(x) \xi, \eta \rangle \rangle}{h}, \quad e_k \in \mathbf{R}^d,$$

弱收敛到 $(D_k f)(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 处 k 方向的(弱)偏导数存在。

对所有的 $x \in O$, 若 f 在点 x 处所有方向的弱偏导数都存在, 且对任意的 $k = 1, 2, \dots, d, x \rightarrow D_k f(x)$ 是 O 到 L 的弱连续映射, 则称 f 在 O 中弱连续可微, 并将从 O 到 L 的所有弱连续可微的映射构成的空间记作 $C_w^1(O; L)$ 。

由引理 2 和定义 5, 易知下面的命题成立。

命题 1 若 $f \in C_w^1(O; L)$, 则对任意的 $\xi, \eta \in S(M)$, $x \rightarrow \langle \langle f(x) \xi, \eta \rangle \rangle \in C^1(O)$, 其中, $C^1(O)$ 为 O 上的一阶连续可微函数集。

假设对所有的 $x \in O, k = 1, 2, \dots, d, (D_k f)(x) \in L$ 存在, 则可连续地定义函数 f 的 n 阶弱偏可微性。

定义 6 若对每一个多重实指标 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d \leq n$ 以及每一个 $x \in O$, 弱偏导数 $D_f^\alpha(x) = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_d^{\alpha_d} f(x)$ 存在, 且在 x 处弱连续, 则称 $f(\cdot) : O \rightarrow L$ 是 n 阶弱连续可微的。

以 $C_w^n(O;L)$ 表示 O 到 L 的 n 阶弱连续可微函数全体构成的集合。 $C_w^0(O;L) \equiv C_w(O;L)$ 为 O 到 L 的弱连续函数全体构成的集合, $C_w^\infty(O;L) \equiv \bigcap_n C_w^n(O;L)$ 。

如果 V 是一离散时间正规鞅 U -泛函, 通过 $2D$ -Fock 变换得到对应于 V 的离散时间 Bernoulli 噪声算子, 记作 $F^{-1}V$ 。

定义 7 设 V 是 O 到 \mathfrak{N} 的一个映射。如果对任意的 $x \in O$, 存在 x 的邻域 $O_x \subseteq O$ 以及 $c_0 \geq 0, p_0, q_0 \geq 0$, 使得

$$|V(x')(\sigma, \tau)| \leq c_0 \lambda_\sigma^{p_0} \lambda_\tau^{q_0}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma, \quad x' \in O_x,$$

则称 V 满足局部一致性条件。

满足局部一致性条件的映射全体记为 $G_u^2(O; \mathfrak{N})$ 。如果对任意的 $x \in O, O_x = O$, 则称 V 满足一致性条件。满足一致性条件的映射全体记为 $G_u^2(O; \mathfrak{N})$ 。

命题 2 假设 $V \in G_u^2(O; \mathfrak{N})$, 则存在 $p, q \geq 0$, 使得离散时间正规鞅算子族 $\{f(x) = F^{-1}V(x); x \in O\} \subseteq L(S_p(M), S_{-q}(M))$ 有界。

证明 $V \in G_u^2(O; \mathfrak{N})$ 隐含了对于任意的 $x \in O$, 存在 $c_0 \geq 0, p_0, q_0 \geq 0$ 使得

$$|V(x)(\sigma, \tau)| \leq c_0 \lambda_\sigma^{p_0} \lambda_\tau^{q_0}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma.$$

并且 $f(x) = F^{-1}V(x)$, 即 $V(x) = \widehat{f(x)}$, 结合引理 2, 可证得结论成立。

定义 8 设 $V \in G_u^2(O; \mathfrak{N})$, 若对任意的 $\sigma, \tau \in \Gamma, x \rightarrow V(x)(\sigma, \tau)$ 连续, 则称 V 是局部一致连续的, 并记 $C_u(O; \mathfrak{N})$ 为局部一致连续映射全体构成的集合。

对于 M 检验泛函空间 $S(M)$, 定义 2-重张量积 $S(M) \otimes S(M)$ 上的内积为

$$\langle \xi_1 \otimes \xi_2, \eta_1 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle \langle \xi_2, \eta_2 \rangle, \quad \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in S(M),$$

则有下面的结论成立。

命题 3 若 $V \in C_u(O; \mathfrak{N})$, 则 $f(x) \equiv F^{-1}V(x) \in C_w(O; L)$ 。

证明 设 $x \in O$, 则对 x 的某个邻域 $O_x, V \in G_u^2(O_x; \mathfrak{N})$, 由命题 2, 存在 $p, q \geq 0$, 使得 $\{f(x') | x' \in O_x\}$ 是 $L(S_p(M), S_{-q}(M))$ 中的有界子集。不妨假设存在常数 $K > 0$, 使得

$$\|f(x')\|_{-p, -q} \leq K, \quad x' \in O_x.$$

对任意的 $Z_\sigma, Z_\tau \in \mathfrak{S}$, 其中 $\mathfrak{S} \equiv \{Z_\sigma | \sigma \in \Gamma\}$ 是 $S(M)$ 中的完全集, 映射 $x \rightarrow \langle f(x)Z_\sigma, Z_\tau \rangle$ 连续。

对任意的 $\varepsilon > 0$, 假设 $\xi, \eta \in S(M)$ 给定。由于 \mathfrak{S} 在 $S(M)$ 中完全, 所以可以选取 $Z_\sigma, Z_\tau \in \mathfrak{S}$, 使得

$$\|\xi \otimes \eta - Z_\sigma \otimes Z_\tau\|_{p, q} \leq \frac{\varepsilon}{4K}.$$

选取 δ 足够小, 使得 $\{x'; |x-x'| < \delta\} \subseteq O_x$, 且由 $|x-x'| < \delta$, 有

$$|\langle f(x)Z_\sigma, Z_\tau \rangle - \langle f(x')Z_\sigma, Z_\tau \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而有

$$\begin{aligned} & | \langle f(x)\xi, \eta \rangle - \langle f(x')\xi, \eta \rangle | \\ & \leq | \langle f(x)\xi, \eta \rangle - \langle f(x')Z_\sigma, Z_\tau \rangle | + | \langle f(x)Z_\sigma, Z_\tau \rangle - \langle f(x')Z_\sigma, Z_\tau \rangle | \\ & \quad + | \langle f(x)Z_\sigma, Z_\tau \rangle - \langle f(x')\xi, \eta \rangle | \\ & \leq 2 \max \{ \|f(x)\|_{-p, -q}, \|f(x')\|_{-p, -q} \} \cdot \|\xi \otimes \eta - Z_\sigma \otimes Z_\tau\|_{p, q} + \frac{\varepsilon}{2} \\ & \leq 2K \|\xi \otimes \eta - Z_\sigma \otimes Z_\tau\|_{p, q} + \frac{\varepsilon}{2} \\ & \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

这隐含了对于 $\xi, \eta \in S(M)$, 函数 $f(x)(\xi, \eta) = \langle f(x)\xi, \eta \rangle$ 是连续的, 因此, $f(x) \in C_w(O, L)$ 。结论得证。

定义 9 若 $V \in G_u^2(O; \mathfrak{N})$ 满足下列条件:

1) 对任意的 $\sigma, \tau \in \Gamma, x \rightarrow V(x)(\sigma, \tau) \in C^n(O)$ 连续, 其中, $C^n(O)$ 表示 O 上 n 阶连续可微函数全体构

成的集合;

2) 对每个多重指标 $\alpha, |\alpha| \leq n, D^\alpha V \in G_u^2(O, \mathfrak{N})$;

则称 V 在 O 上 n 阶局部一致连续可微, 并记 O 上 n 阶局部一致连续可微函数全体为 $C_u^n(O; \mathfrak{N})$ 。

定理 1 设 $V \in C_u^n(O; \mathfrak{N})$, 则对应于 V 的离散时间正规鞅算子 $F^{-1}V \in C_w^n(O; L)$ 。

证明 应用数学归纳法。首先, 证明 $n=1$ 的情形。设 $D_k f = F^{-1}(D_k V)$, $k=1, 2, \dots, d$, 并结合命题 3, 有 $D_k f \in C_w(O; L)$ 。下证对于任意的 $x \in O, \xi, \eta \in S(M), k=1, 2, \dots, d$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle \langle f(x+he_k)\xi, \eta \rangle \rangle - \langle \langle f(x)\xi, \eta \rangle \rangle}{h} - \langle \langle D_k f(x)\xi, \eta \rangle \rangle = 0. \tag{3}$$

由定理的条件, 式(3)对 $\xi, \eta \in S(M)$ 成立。与命题 3 的证明过程相同, 下面只需要证明存在 $\delta > 0, p, q \geq 0$, 使得

$$\left\{ \frac{f(x+he_k) - f(x)}{h}; 0 < |h| < \delta \right\}$$

是 $L(S_p(M), S_{-q}(M))$ 中的有界集。

设 $x \in O, O_{x,k}$ 为 x 的一个邻域, 且 $D_k V \in G_u^2(O_{x,k}; \mathfrak{N})$, 选 δ 足够小且满足 $0 < |h| < \delta$, 使得 $x+he_k \in O_{x,k}$ 。假定 $\sigma, \tau \in \Gamma$, 则由微分中值定理, 存在 $x' \in O_{x,k}$, 使得

$$\left| \frac{V(x+he_k)(\sigma, \tau) - V(x)(\sigma, \tau)}{h} \right| = (D_k V)(x')(\sigma, \tau),$$

且 $(D_k V)(x')(\sigma, \tau) \in G_u^2(O_{x,k}; \mathfrak{N})$, 结合命题 2 可知, 存在 $p, q \geq 0$, 使得 $\{h^{-1}(f(x+he_k) - f(x))\}$ 为 $L(S_p, S_{-q})$ 中的有界集。

对于 $n > 1$, 假设定理对 n 成立。设 V 是 O 上的 n 阶局部一致连续可微的离散时间正规鞅 U -泛函。则对任意的 $k=1, 2, \dots, d$ 以及 $\sigma, \tau \in \Gamma, x \rightarrow D_k V(x)(\sigma, \tau) \in C^n(O)$ 。并且对任意的 $\alpha, |\alpha| = n$, 有 $D^\alpha(D_k V) \in G_u^2(O, \mathfrak{N})$, 即 $D_k V$ 在 O 上是 n 阶局部一致连续可微的。因此, 有 $F^{-1}(D_k V) \in C_w^{n+1}(O; L)$, 即定理对 $n+1$ 也成立。于是, 由数学归纳法定理得证。

3 总结

受已有工作的启发, 本文在量子 Bernoulli 噪声框架下, 以 $2D$ -Fock 变换为工具讨论了离散时间正规鞅泛函算子值函数的可微性, 获得了离散时间正规鞅泛函算子值函数可微性的刻画定理, 可以将其看作是白噪声理论的一种发展, 具有重要的理论意义。

参考文献:

[1] HUNG Zhiyuan, YAN Jiaan. Introduction to infinite dimensional stochastic analysis[M]. Dordrecht: Springer, 2000.

[2] OBATA N. Operator calculus on vector-valued white noise functionals[J]. Journal of Functional Analysis, 1994, 121(1):185-232.

[3] ITO Y. Generalized poisson functionals[J]. Probability Theory and Related Fields, 1988, 77(1):1-28.

[4] PRIVAULT N. Stochastic analysis of Bernoulli processes[J]. Probability Surveys, 2008, 5(1):435-483.

[5] NOURDIN I, PECCATI G, REINERT G. Stein's method and stochastic analysis of rademacher functionals[J]. Electronic Journal of Probability, 2010, 15:1703-1742.

[6] POTTHOFF J. White noise approach to parabolic stochastic partial differential equation[J]. Stochastic Analysis and Application in Physics, 1994, 449:307-327.

[7] 王湘君, 王才士. 广义算子值函数可微性的刻画[J]. 数学物理学报, 2004, 24(4):454-458.
WANG Xiangjun, WANG Caishi. A characterized theorem of the differential of generalized operator-valued function[J]. Acta Mathematica Scientia, Series A, 2004, 24(4):454-458.

[8] WANG Caishi, CHAI Huifang, LU Yanchun. Discrete-time quantum Bernoulli noises[J]. Journal of Mathematical Physics, 2010, 51(5):1-8.

[9] WANG Caishi, CHEN Jinshu. Characterization theorems for generalized functionals of discrete-time normal martingale[J].

Journal of Function Spaces, 2015, 1:1-6.

- [10] WANG Caishi, CHEN Jinshu. A characterization of operators on functionals of discrete-time normal martingales[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2017, 35(2):305-316.
- [11] 石佳,王才士,张丽霞,等. $S^*(M)$ 空间中的 Bochner-Wick 积分[J]. 山东大学学报(理学版),2020,55(6):23-31,40.
SHI Jia, WANG Caishi, ZHANG Lixia, et al. Bochner-Wick integral for $S^*(M)$ space[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2020, 55(6):23-31,40.
- [12] CHEN Jinshu. The Bochner-convolution integral for generalized functional-valued functions of discrete-time normal martingales[J]. Turkish Journal of Mathematics, 2020, 44(3):698-711.
- [13] 陈金淑,唐玉玲. 离散时间正规鞅算子值函数的 Bochner 积分[J]. 应用概率统计,2023,39(3):436-448.
CHEN Jinshu, TANG Yuling. Bochner integration of operator-valued functions in terms of discrete-time normal martingales [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2023, 39(3):436-448.

(编辑:李艺)

(上接第 132 页)

- [16] 王瑞,王雨宁,逯静. 基于双分解和深度学习的短期风电功率预测[J/OL]. 武汉大学学报(工学版). (2024-10-08)[2025-04-11]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1675.T.20241008.1139.004.html>.
WANG Rui, WANG Yuning, LU Jing. Short-term wind power prediction based on double decomposition and deep learning [J/OL]. Journal of Wuhan University (Engineering Edition). (2024-10-08)[2025-04-11]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1675.T.20241008.1139.004.html>.
- [17] 邹婕,李路. 基于随机森林的 SA-BiGRU 模型的股票价格预测研究[J]. 中国物价,2023,11:52-56.
ZOU Jie, LI Lu. Research on stock price forecasting based on random forest and SA-BiGRU model[J]. China Price, 2023, 11:52-56.
- [18] DRAGOMIRETSKIY K, ZOZZO D. Variational mode decomposition[J]. IEEE Transactions on Signalprocessing, 2013, 62(3):531-544.
- [19] XUE Jiankai, SHEN Bo. Dung beetle optimizer: a new meta-heuristic algorithm for global optimization[J]. The Journal of Supercomputing, 2023, 79(7):7305-7336.
- [20] SHEPARD D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data[C]//Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference. New York: ACM, 1968:517-524.

(编辑:李艺)

(上接第 136 页)

- [4] HAN Jiangbo, XU Runzhang, YANG Chao. Continuous dependence on initial data and high energy blowup time estimate for porous elastic system[J]. Communications in Analysis and Mechanics, 2023, 15(2):214-244.
- [5] WINKLER M. Global solutions in higher dimensions to a fourth-order parabolic equation modeling epitaxial thin-film growth [J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 2011, 62(4):575-608.
- [6] HAN Yuzhu. blow-up phenomena for a fourth-order parabolic equation with a general nonlinearity[J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2021, 27:261-270.
- [7] ZHAO Lijing, LI Fushan. Sufficient conditions and bounds estimate of blow-up time for a fourth order parabolic equation[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2022, 21(3):1-17.
- [8] PHILIPPIN G A. Lower bounds for blow-up time in a class of nonlinear wave equations[J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 2015, 66(1):129-134.
- [9] HENROT A. Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators[M]. Basel: Birkhäuser Verlag, 2006.

(编辑:陈丽萍)