文章编号:1671-9352(2025)08-0106-10 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.188

一类带有饱和治愈率的 SEIR 格微分动力系统的行波解

李敖宇
(西安电子科技大学数学与统计学院, 陕西 西安 710071)

摘要:研究一类具有饱和治愈率和双线性发生率的离散扩散 SEIR 模型行波解的存在性。首先利用上下解的方法结合 Schauder 不动点定理证明截断问题的解的存在性; 其次, 通过极限方法证明当 $R_0>1$, $c>c^*$ 时, 系统存在连接无病平衡点和正平衡点的行波解, 通过分析证明行波解在无穷远处的渐近行为。

关键词:饱和治愈率;SEIR 模型;行波解;格微分方程
中图分类号:O175 **文献标志码**:A
引用格式:李敖宇.一类带有饱和治愈率的 SEIR 格微分动力系统的行波解[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(8):106-115.

Traveling wave solutions of a class of SEIR lattice differential equations with saturated recovery rate

LI Aoyu
(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, Shaanxi, China)

Abstract: In this paper, the existence of traveling wave solutions for a kind of discrete diffusion SEIR model with saturated recovery rate and bilinear occurrence rate is studied. Firstly, the existence of solutions for truncationproblem is proved by using the method of upper and lower solutions and the Schauder fixed point theorem; Secondly, it is proved by the limit method that when $R_0>1$, $c>c^*$, the system has traveling wave solutions connecting the disease-free equilibrium point and the positive equilibrium point. Finally, the asymptotic behavior of traveling wave solution at infinity is proved.

Key words: saturated recovery rate; SEIR model; traveling wave solution; lattice differential equation

0 引言

1760 年,Bernoulli 建立了第一个微分方程模型,以此评估健康人接种天花病毒的有效性。1927 年,Kermack和 McKendrick[1]提出的 SIR 模型对流行病学模型的发展产生了重大影响。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=-\beta S(t)I(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\gamma I(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=\gamma I(t),\end{cases}\tag{1}$$

其中,$S(t)$、$I(t)$和 $R(t)$分别为易感者(suspectible, S)、感染者(infective, I)和恢复者(recovered, R)在 t 时刻的个体数量。常数 β 为感染率,γ 为恢复率。此后,该模型得到进一步的研究。Hosono 和 Ilyas[2]研究了一类扩散传染病的行波解。根据文献[3],当基本再生数 $R_0>1$ 时,$I(t)$首先增加到最大值,然后减少到 0,从而传染病流行开来;如果 $R_0<1$,则 $I(t)$降至零,疾病发生但不会大范围流行。基本再生数 R_0 表示一个感染

收稿日期:2023-04-27; **网络出版时间**:2024-04-15 19:18:43
基金项目:陕西省杰出青年科学基金项目(2020JC-24)
作者简介:李敖宇(2001—),男,硕士研究生,研究方向为微分方程、动力系统及其在生物中的应用. E-mail:869566016@qq.com

者在有传染力的时间段内感染易感者的数量。对于各种不同的传染病，数学模型已成为分析其传播和控制的重要工具[4-6]。

SEIR 模型是一种由 SIR 模型衍生出的模型，相比 SIR 模型，SEIR 模型多出了潜伏者“E”这一人群，潜伏者个体已经被感染，但不具备传染易感者，使其染病的能力，经过一段时间的潜伏期，潜伏者个体会转化为感染者个体。Xu[7]研究了一类扩散 SEIR 模型的行波解存在性以及解的渐近行为；Tian 等[8]研究了一类具有非局部反应和标准发生率的扩散 SEIR 传染病模型的行波解，得到了行波解的存在性和不存在性的条件；Zhou 和 Cui[9]考虑了一个具有饱和恢复率的 SEIR 模型，并分析了此模型行波解的存在性和渐近行为，模型中假定 4 类人群总数固定，即 $S+E+I+R=N$，同时，考虑到当疾病爆发时，某些发展中国家由于医疗资源有限，不能够无限制接受病人，因此添加饱和治愈率函数 $h(I)=\dfrac{r_hI}{b+I}$ 更符合实际情况。但尚未有学者研究离散情况下具有饱和治愈率的 SEIR 模型的行波解情况。

在自然界中，种群的生存空间常常是不连续的，因此空间离散模型对生物种群动力学的研究具有重要的实际意义，同时离散化后的格微分动力系统具有更丰富的动力学行为。Zhou 等[10]研究了一类具有时滞和非线性发生率的离散扩散 SIR 模型，证明了有界超临界和临界行波解的存在性；Chen 等[5]研究了一类单调格动力系统的行波解的唯一性和渐近性。

基于以上研究，本文研究一类具有饱和治愈率的离散扩散 SEIR 模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_n(t)}{\mathrm{d}t}=[S_{n+1}(t)+S_{n-1}(t)-2S_n(t)]-\beta S_n(t)I_n(t)+\mu(1-S_n(t)),\\ \dfrac{\mathrm{d}E_n(t)}{\mathrm{d}t}=[E_{n+1}(t)+E_{n-1}(t)-2E_n(t)]+\beta S_n(t)I_n(t)-\beta S_n(t-\tau)I_n(t-\tau)-\mu E_n(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}I_n(t)}{\mathrm{d}t}=d[I_{n+1}(t)+I_{n-1}(t)-2I_n(t)]+\beta S_n(t-\tau)I_n(t-\tau)-\dfrac{r_hI_n(t)}{b+I_n(t)}-\gamma I_n(t)-\mu I_n(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R_n(t)}{\mathrm{d}t}=[R_{n+1}(t)+R_{n-1}(t)-2R_n(t)]+\dfrac{r_hI_n(t)}{b+I_n(t)}-\mu R_n(t),\end{cases}\tag{2}$$

其中，$S_n(t)$ 和 $I_n(t)$ 分别表示 n 位置易感者和感染者在 t 时刻的种群密度，1 和 d 分别为易感者和感染者的扩散系数，β 代表易感者与染病者接触后染病化成潜伏者(E)的概率，称为感染率。易感者在变为潜伏者之后，经过 τ 时间后转化为染病者 I，治愈率函数为 $h(I)=r_hI/(b+I)$，其中，r_h 为经过治疗，由感染者转化为恢复者的速率，b 是指使恢复率函数刚好达到 $r_h/2$ 时的感染者数量，也即 $h(b)=r_hb/(b+b)=r_h/2$，γ 为染病者的自然恢复率，本文假设总人口归一化为 1，μ 为单位时间内新生的易感者个体数量。

1　预备知识

对于系统(2)来说，第 2 个方程和第 4 个方程和另外 2 个是解耦的，所以本文只需要考虑

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_n(t)}{\mathrm{d}t}=[S_{n+1}(t)+S_{n-1}(t)-2S_n(t)]-\beta S_n(t)I_n(t)+\mu(1-S_n(t)),\\ \dfrac{\mathrm{d}I_n(t)}{\mathrm{d}t}=d[I_{n+1}(t)+I_{n-1}(t)-2I_n(t)]+\beta S_n(t-\tau)I_n(t-\tau)-\dfrac{r_hI_n(t)}{b+I_n(t)}-\gamma I_n(t)-\mu I_n(t)。\end{cases}\tag{3}$$

对于系统(3)，容易知道该系统拥有 2 个平衡点，无病平衡点(1,0)和正平衡点(s^*,i^*)，其中

$$s^*=\mu/(\beta i^*+\mu),\quad i^*=(-v+\sqrt{v^2-4ap})/2a,$$

其中 $a=\beta(\gamma+\mu)$，$v=\beta\mu-\beta r_h+(\gamma+\mu)(\beta b+\mu)$，$p=\beta\mu b-r_h\mu+\gamma\mu b+\mu^2b$。定义 $R_0=\dfrac{\beta}{r_h/b+\gamma+\mu}$。

本文讨论系统(3)的行波解的存在性。行波解可以表示为

$$S_n(t)=\phi(n+ct),\quad I_n(t)=\psi(n+ct),\quad n\in\mathbf{Z},\ t\in\mathbf{R}。$$

其中 ϕ,ψ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的非负有界函数,c 为一个常数(波速)。令 $\xi=n+ct$,将 $S_n(t)=\phi(\xi)$, $I_n(t)=\psi(\xi)$ 带入到系统(3),可以得到波廓方程:

$$\begin{cases} c\phi'(\xi)=[\phi(\xi+1)+\phi(\xi-1)-2\phi(\xi)]-\beta\phi(\xi)\psi(\xi)+\mu(1-\phi(\xi)), \\ c\psi'(\xi)=d[\psi(\xi+1)+\psi(\xi-1)-2\psi(\xi)]+\beta\phi(\xi-c\tau)\psi(\xi-c\tau)-\dfrac{r_h\psi(\xi)}{b+\psi(\xi)}-\gamma\psi(\xi)-\mu\psi(\xi)。\end{cases} \tag{4}$$

此文章研究系统(3)在波速 $c>c^*$ 时解的存在性,c^* 表示最小波速。首先应用上下解方法结合 Schauder 不动点定理证明解在有限闭区间上的存在性,再利用极限方法证明了行波解在整个实数域上的存在性,并分析行波解在无穷远处的渐近行为。

首先对系统(3)的第 2 个方程在$(\phi,\psi)=(1,0)$处线性化,并将 $\psi(\xi)=\mathrm{e}^{\lambda\xi}$代入,得

$$\begin{cases} c\lambda\mathrm{e}^{\lambda\xi}=d(\mathrm{e}^{\lambda(\xi+1)}+\mathrm{e}^{\lambda(\xi-1)}-2\mathrm{e}^{\lambda\xi})+\beta\mathrm{e}^{\lambda(\xi-c\tau)}-\dfrac{r_h\mathrm{e}^{\lambda\xi}}{b+\mathrm{e}^{\lambda\xi}}-\gamma\mathrm{e}^{\lambda\xi}-\mu\lambda\xi, \\ c\lambda=d(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}-2)+\beta\mathrm{e}^{-c\lambda\tau}-\dfrac{r_h}{b}-\gamma-\mu, \end{cases} \tag{5}$$

令 $\Delta(\lambda,c)=d(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}-2)-c\lambda+\beta\mathrm{e}^{-c\lambda\tau}-\dfrac{r_h}{b}-\gamma-\mu$。根据文献[11],可得以下引理。

引理 1 假设 $\beta\mathrm{e}^{-c\lambda\tau}>\gamma+\mu+\dfrac{r_h}{b}$,则存在 $c^*>0$ 和 $\lambda^*>0$,使得

$$\Delta(\lambda^*,c^*)=0。$$

并有以下性质成立:

(ⅰ) 对 $\forall\, 0<c<c^*$,当 $\lambda\in[0,+\infty)$ 时,$\Delta(\lambda,c)>0$;

(ⅱ) 对 $\forall\, c>c^*$, $\Delta(\lambda,c)=0$ 存在两个正根 $\lambda_1(c)=\lambda_1$, $\lambda_2(c)=\lambda_2(0<\lambda_1<\lambda_2)$ 并且当 $\lambda\in(-\infty,\lambda_1)\cup(\lambda_2,+\infty)$ 时,$\Delta(\lambda,c)>0$; $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$ 时,$\Delta(\lambda,c)<0$。

以下始终假设 $c>c^*$。

1.1 构造上下解

接下来定义系统(4)的上解和下解。始终定义 $R_0=\dfrac{\beta}{r_h/b+\gamma+\mu}>1$,定义如下函数:

$$\overline{\phi}(\xi):=1, \qquad \overline{\psi}(\xi):=\mathrm{e}^{\lambda_1\xi},$$

$$\underline{\phi}(\xi):=\begin{cases}1-\rho\mathrm{e}^{\theta\xi}, & \xi\leqslant\xi_1, \\ 0, & \xi>\xi_1。\end{cases} \qquad \underline{\psi}(\xi):=\begin{cases}\mathrm{e}^{\lambda_1\xi}-q\mathrm{e}^{\eta\lambda_1\xi}, & \xi\leqslant\xi_2, \\ 0, & \xi>\xi_2,\end{cases}$$

其中

$$\xi_1=\frac{-\ln\rho}{\theta}, \quad \xi_2=\frac{-\ln q}{(\eta-1)\lambda_1},$$

参数 θ,ρ,η,q 满足如下条件:

(ⅰ) $\theta>0$ 足够小,使得 $0<\theta<\lambda_1$ 并且 $\mathrm{e}^{\theta}+\mathrm{e}^{-\theta}-2-c\theta-\mu<0$;

(ⅱ) $\rho>\max\left\{1, \dfrac{\beta}{-(\mathrm{e}^{\theta}+\mathrm{e}^{-\theta}-2-c\theta-\mu)}\right\}\geqslant1>0$;

(ⅲ) $\eta\in\left(1, \min\left\{1+\dfrac{\theta}{\lambda_1}, \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\}\right)$使得$(\lambda,c)<0$;

(ⅳ) $q>\max\left\{\mathrm{e}^{(1-\eta)\lambda_1\xi_1}, \dfrac{\beta\rho}{-(d(\mathrm{e}^{\eta\lambda_1}+\mathrm{e}^{-\eta\lambda_1}-2)-c\eta\lambda_1+\beta-\gamma-\mu-(r_h/b))}\right\}$。

注意到,通过计算,有

$$\xi_2=\frac{-\ln q}{(\eta-1)\lambda_1}<\xi_1=\frac{-\ln\rho}{\theta}<0,$$

此外易知

$$\underline{\phi}\leqslant\overline{\phi}=1,\quad \underline{\psi}\leqslant\overline{\psi}=\mathrm{e}^{\lambda_1\xi},\quad \forall\xi\in\mathbf{R}。$$

接下来的引理将证明$(\overline{\phi},\overline{\psi})$,$(\underline{\phi},\underline{\psi})$是系统(4)的上下解。

引理 2　连续函数 $\underline{\phi},\underline{\psi},\overline{\phi},\overline{\psi}$ 是系统(4)的上下解,即对 $\forall\xi\in(\mathbf{R}\setminus\{\xi_1,\xi_2\})$, $\underline{\phi},\underline{\psi},\overline{\phi},\overline{\psi}$ 可导且满足

$$D[\overline{\phi}](\xi)-c\,\overline{\phi}'(\xi)-\beta\overline{\phi}(\xi)\underline{\psi}(\xi)+\mu(1-\overline{\phi}(\xi))\leqslant0,\tag{6}$$

$$D[\underline{\phi}](\xi)-c\underline{\phi}'(\xi)-\beta\underline{\phi}(\xi)\overline{\psi}(\xi)\mu(1-\underline{\phi}(\xi))\geqslant0,\tag{7}$$

$$dD[\overline{\psi}](\xi)-c\overline{\psi}'(\xi)+\beta\overline{\phi}(\xi-c\tau)\overline{\psi}(\xi-c\tau)-\frac{r_h\overline{\psi}(\xi)}{b+\overline{\psi}}-(\gamma+\mu)\overline{\psi}\leqslant0,\tag{8}$$

$$dD[\underline{\psi}](\xi)-c\underline{\psi}'(\xi)+\beta\underline{\phi}(\xi-c\tau)\underline{\psi}(\xi-c\tau)-\frac{r_h\underline{\psi}(\xi)}{b+\underline{\psi}}-(\gamma+\mu)\underline{\psi}\geqslant0,\tag{9}$$

其中

$$D[u](\xi):=u(\xi+1)+u(\xi-1)-2u(\xi)。$$

证明　依次验证 $\underline{\phi},\underline{\psi},\overline{\phi},\overline{\psi}$ 满足不等式组(6)—(9),将 $\overline{\phi}$ 和 $\underline{\psi}(\xi)$ 代入式(6)中,简单计算可得满足不等式(6)。

容易判断对 $\xi>\xi_1$,不等式(7)显然满足, 所以考虑当 $\xi<\xi_1$ 时的情况,将 $\underline{\phi}$ 和 $\overline{\psi}(\xi)$ 代入得

$$\begin{aligned}
&(1-\rho\mathrm{e}^{\theta(\xi+1)})+(1-\rho\mathrm{e}^{\theta(\xi-1)})-2(1-\rho\mathrm{e}^{\theta\xi})+c\theta\rho\mathrm{e}^{\theta\xi}-\beta(1-\rho\mathrm{e}^{\theta\xi})(\mathrm{e}^{\lambda_1\xi})+\mu(1-(1-\rho\mathrm{e}^{\theta\xi}))\\
\geqslant&-\rho(\mathrm{e}^{\theta(\xi+1)}+\mathrm{e}^{\theta(\xi-1)}-2\mathrm{e}^{\theta\xi})+c\theta\rho\mathrm{e}^{\theta\xi}-\beta(1-\rho\mathrm{e}^{\theta\xi})(\mathrm{e}^{\lambda_1\xi})\\
\geqslant&\mathrm{e}^{\theta\xi}(-\rho(\mathrm{e}^{\theta}+\mathrm{e}^{-\theta}-2-c\theta)-\beta\mathrm{e}^{(\lambda_1-\theta)\xi})\\
\geqslant&\beta^{\theta\xi}(1-\mathrm{e}^{(\lambda_1-\theta)\xi})\\
\geqslant&0。
\end{aligned}$$

式(8)代入后同样满足。

对于 $\xi>\xi_2$,式(9)满足,考虑当 $\xi<\xi_2$ 时的情况。

$$\begin{aligned}
&dD[\underline{\psi}](\xi)-c\underline{\psi}'(\xi)+\beta\underline{\phi}(\xi)\underline{\psi}(\xi-c\tau)-\frac{r_h\underline{\psi}(\xi)}{b+\underline{\psi}}-(\gamma+\mu)\underline{\psi}\\
\geqslant&d[-q\mathrm{e}^{\eta\lambda_1}(\xi+1)-q\mathrm{e}^{\eta\lambda_1}(\xi-1)+q\mathrm{e}^{\eta\lambda_1}\xi]+c\eta\lambda_1q\mathrm{e}^{\eta\lambda_1\xi}\\
&-\beta(\rho\mathrm{e}^{(\lambda_1+\theta)(\xi-c\tau)}+q\mathrm{e}^{\eta\lambda_1(\xi-c\tau)})+q\mathrm{e}^{\eta\lambda_1\xi}\left(\frac{r_h}{b}+\mu+\gamma\right)\\
=&\mathrm{e}^{\eta\lambda_1\xi}\left[-q[d(\mathrm{e}^{\eta\lambda_1}+\mathrm{e}^{-\eta\lambda_1}-2)]-c\eta\lambda_1-\mu-\gamma-\frac{r_h}{b}\right]-\beta\mathrm{e}^{\eta\lambda_1(\xi-c\tau)}(\rho\mathrm{e}^{[\theta+(1-\eta)\lambda_1]\xi}+q)\\
\geqslant&\mathrm{e}^{\eta\lambda_1\xi}\left\{-q[d(\mathrm{e}^{\eta\lambda_1}+\mathrm{e}^{-\eta\lambda_1}-2)]-c\eta\lambda_1-\mu-\gamma-\frac{r_h}{b}\right\}-\beta\mathrm{e}^{\eta\lambda_1\xi}(\rho\mathrm{e}^{[\theta+(1-\eta)\lambda_1]\xi}+q)\\
=&\mathrm{e}^{\eta\lambda_1\xi}\left\{-q\left[d(\mathrm{e}^{\eta\lambda_1}+\mathrm{e}^{-\eta\lambda_1}-2)+\beta-c\eta\lambda_1-\mu-\gamma-\frac{r_h}{b}\right]-\beta\rho\mathrm{e}^{[\theta+(1-\eta)\lambda_1]\xi}\right\}\\
\geqslant&\beta\rho\mathrm{e}^{\eta\lambda_1\xi}(1-\mathrm{e}^{[\theta+(1-\eta)\lambda_1]\xi})\\
\geqslant&0。
\end{aligned}$$

引理得证。

2　截断问题

这一章考虑一个辅助的截断问题,证明系统(4)的解在有限闭区间上的存在性。现给定 $l>-\xi_2(>0)$,考虑如下截断问题:

$$\begin{cases} D[\phi]-c\phi'-\beta\phi\psi+\mu(1/\phi)=0, & \xi\in[-l,l], \\ dD[\psi]-c\psi'+\beta\phi(\xi-c\tau)\psi(\xi-c\tau)-\dfrac{r_h\psi(\xi)}{b+\psi(\xi)}-(\gamma+\mu)\psi(\xi), & \xi\in[-l,l], \\ (\phi,\psi)=(\bar{\phi},\bar{\psi}), & \xi<-l, \\ (\phi,\psi)=(\phi(l),\psi(l)), & \xi>l, \end{cases} \tag{10}$$

其中

$$\begin{cases} \phi'(-l):=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\phi(-l+h)-\phi(-l)}{h}, \\ \phi'(l):=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\phi(l)-\phi(l-h)}{h}, \\ \psi'(-l):=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\psi(-l+h)-\psi(-l)}{h}, \\ \psi'(l):=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\psi(l)-\psi(l-h)}{h}。 \end{cases} \tag{11}$$

设 $\mathscr{C}^l=C([-l,l])\times C([-l,l])$, $S^l=\{(\phi(\xi),\psi(\xi))\in\mathscr{C}^l \mid \underline{\phi}\leqslant\phi\leqslant\bar{\phi},\ \underline{\psi}\leqslant\psi\leqslant\bar{\psi},\ \xi\in[-l,l],\ (\phi,\psi)(-l)=(\bar{\phi},\bar{\psi})(-l)\}$。

并定义 S^l上的范数为

$$\|(u_1,u_2)\|_{\sup}=\max\{\sup_{\xi\in[-l,l]}|u_1|,\ \sup_{\xi\in[-l,l]}|u_2|\},$$

再令

$$\phi(\xi)=\begin{cases}\phi(\xi), & \xi\in(-l,l), \\ \underline{\phi}(\xi), & \xi\in(-l-c\tau,-l],\end{cases} \qquad \psi(\xi)=\begin{cases}\psi(\xi), & \xi\in(-l,l), \\ \underline{\psi}(\xi), & \xi\in(-l-c\tau,-l]。\end{cases}$$

由上下解的定义可知,在 $\xi\in[-l,l]$上有 $0\leqslant\phi\leqslant 1$, $0\leqslant\psi\leqslant e^{\lambda_1 l}$,因此,$S^l$在所定义的范数的意义下是一个非空有界闭集。对任意$(\phi,\psi)\in S^l$,将其如式(10)一样延拓至$[-l,l]$外。引入连续函数 $H_1^l(\phi,\psi)$,$H_2^l(\phi,\psi)$:

$$\begin{cases} H_1^l(\phi,\psi)=\alpha\phi(\xi)+D[\phi](\xi)-\beta\phi(\xi)\psi(\xi)+\mu(1-\phi(\xi)), \\ H_2^l(\phi,\psi)=\alpha\psi(\xi)+dD[\psi](\xi)+\beta\phi(\xi-c\tau)\psi(\xi-c\tau)-\dfrac{r_h\psi(\xi)}{b+\psi(\xi)}-(\mu+\gamma)\psi(\xi), \end{cases} \tag{12}$$

其中,$\alpha=\alpha^l$ 为正常数且满足

$$\alpha>\max\left\{2+\beta e^{\lambda_1 l}+\mu,\ 2d+\frac{r_h}{b}+\mu+\gamma\right\},$$

对于(ϕ_1,ψ_1),$(\phi_2,\psi_2)\in S^l$且 $\phi_1\leqslant\phi_2$, $\psi_1\leqslant\psi_2$,有,

$$H_1^l(\phi_1,\psi_2)\leqslant H_1^l(\phi_1,\psi_1\leqslant H_1^l(\phi_2,\psi_1),\quad H_2^l(\phi_1,\psi_1)\leqslant H_2^l(\phi_2,\psi_2),\quad \forall\xi\in[-l,l]。\tag{13}$$

最后定义一个非线性算子 $F^l=(F_1^l,F_2^l)$:

$$\begin{cases} F_1^l(\phi,\psi)(\xi)=e^{\alpha(-l-\xi)/c}\bar{\phi}(-l)+\displaystyle\int_{-l}^{\xi}\frac{e^{\alpha(z-\xi)/c}}{c}H_1^l(\phi,\psi)(z)\,dz, & \xi\in[-l,l], \\ F_2^l(\phi,\psi)(\xi)=e^{\alpha(-l-\xi)/c}\bar{\psi}(-l)+\displaystyle\int_{-l}^{\xi}\frac{e^{\alpha(z-\xi)/c}}{c}H_2^l(\phi,\psi)(z)\,dz, & \xi\in[-l,l], \end{cases} \tag{14}$$

易知 F^l的一个不动点是系统(10)的解,且属于 $C(\mathbf{R})\times C(\mathbf{R})\cap C^1(\mathbf{R}\backslash\{-l,l\})\times C^1(\mathbf{R}\{-l,l\})$,下面应用 Schauder 不动点定理证明不动点的存在性。

引理 3 给定 $l>-\xi$,系统(10)存在一个属于 $C(\mathbf{R})\times C(\mathbf{R})\cap C^1(\mathbf{R}\backslash\{-l,l\})\times C^1(\mathbf{R}\{-l,l\})$的解$(\phi,\psi)$,且满足

$$0\leqslant\underline{\phi}\leqslant\phi\leqslant 1,\quad 0\leqslant\underline{\psi}\leqslant\psi\leqslant\bar{\psi},\quad \forall\xi\in(-\infty,-l)。\tag{15}$$

证明 首先说明 $F^l(S^l)\subset S^l$。由式(13)、(14)计算得,对任意$(\phi,\psi)\in S^l$, $\xi\in[-l,l]$上有

$$F_1^l(\underline{\phi},\bar{\psi})\leqslant F_1^l(\phi,\psi)\leqslant F_1^l(\bar{\phi},\underline{\psi}),\quad F_2^l(\underline{\phi},\underline{\psi})\leqslant F_2^l(\phi,\psi)\leqslant F_2^l(\bar{\phi},\bar{\psi}),$$

由引理 2 以及上下解的定义，可得，$\xi\in[-l,l]$ 上有

$$\underline{\phi}\leqslant F_1^l(\phi,\psi)\leqslant F_1^l(\overline{\phi},\underline{\psi})\leqslant\overline{\phi},\quad \underline{\psi}\leqslant F_2^l(\underline{\phi},\underline{\psi})\leqslant F_2^l(\overline{\phi},\overline{\psi})\leqslant\overline{\psi},$$

因此，$F^l(S^l)\subset S^l$，即算子 F^l 将 S^l 映到 S^l。

接下来证明 F^l 全连续。先考虑 F_1^l，对于 $\Phi_1=(\phi_1,\psi_1)$，$\Phi_2=(\phi_2,\psi_2)\in S^l$，存在正常数 M,M_1,M_2 足够大，使得

$$\begin{aligned}
&\| F_1^l(\Phi_1)(\xi)-F_1^l(\Phi_2)(\xi)\|_{\sup}\\
&=\sup_{\xi\in[-l,l]}\left|e^{\alpha(l-\xi)/c}[\overline{\phi}_1(-l)-\overline{\phi}_2(-l)]+\int_{-l}^{\xi}\frac{e^{\alpha(z-\xi)/c}}{c}[\alpha(\phi_1-\phi_2)+(D[\phi_1]-D\phi_2])(\beta\phi_1\psi_1-\beta\phi_2\psi_2)]z\mathrm{d}z\right|\\
&\leqslant M_1(\overline{\phi}_1(-l)-\overline{\phi}_2(-l))+\int_{-l}^{\xi}M_2[(\alpha+4)\|\phi_1-\phi_2\|_{\sup}+\beta\phi_1(\psi_1-\psi_2)+\beta\psi_2(\phi_2-\phi_1)]z\mathrm{d}z\\
&\leqslant M_1(\overline{\phi}_1(-l)-\overline{\phi}_2(-l))+2lM_2[(\alpha+4)+\beta\psi_2]\|\phi_1-\phi_2\|_{\sup}+2lM_2\beta\phi_1\|\psi_1-\psi_2\|_{\sup}\\
&\leqslant M\|\Phi_1-\Phi_2\|_{\sup},
\end{aligned}$$

因此，当 $\|\Phi_1-\Phi_2\|_{\sup}\to0$，$\|F_1^l(\Phi_1)(\xi)-F_1^l(\Phi_2)(\xi)\|_{\sup}\to0$。$F_1^l$ 的连续性得证。

可以由类似的计算得到 F_2^l 的连续性。同时，显然 F^l 为一致有界的。

下证 F^l 等度连续。容易看出对 $\forall\Phi=(\phi,\psi)\in S^l$，$H_1^l(\phi,\psi)$ 有界，令 $K\in\mathbf{R}$ 充分大，不妨设 $|H_1^l(\phi,\psi)|\leqslant K$。

$$\begin{aligned}
&\|F_1^l(\Phi)(\xi+s)-F_1^l(\Phi)(\xi)\|_{\sup}\\
&=\sup_{\xi\in[-l,l]}\left|e^{\alpha[-l-(\xi+s)]/c}\overline{\phi}(-l)-e^{\alpha(-l-\xi)/c}\overline{\phi}(-l)+\int_{-l}^{\xi}\left(\frac{e^{\alpha[z-(\xi+s)]/c}}{c}-\frac{e^{\alpha(z-\xi)/c}}{c}\right)H_1^l(\phi,\psi)(z)\mathrm{d}z\right|\\
&=\sup_{\xi\in[-l,l]}\left|e^{\alpha[-l-\xi]/c}\overline{\phi}(-l)(e^{\alpha s/c}-1)+\int_{-l}^{\xi}\frac{e^{\alpha(z-\xi)/c}}{c}(e^{-\alpha s/c}-1)H_1^l(\phi,\psi)(z)\mathrm{d}z\right.\\
&\quad\left.+\int_{\xi}^{\xi+s}\frac{e^{\alpha[z-(\xi+s)]/c}}{c}H_1^l(\phi,\psi)(z)\mathrm{d}z\right|\\
&\leqslant\frac{sK}{c}+\left(\frac{2lK}{c}+1\right)\left|e^{\frac{-\alpha s}{c}}-1\right|,
\end{aligned}$$

因此 F_1^l 等度连续。F_2^l 同理，故 F^l 在 S^l 上一致有界且等度连续。由 Arzelà−Ascoli 定理，F^l 列紧。

下证 F^l 为闭集。设

$$\overline{U}=\begin{pmatrix}\overline{\phi}(\xi)\\ \overline{\psi}(\xi)\end{pmatrix},\quad \underline{U}=\begin{pmatrix}\underline{\phi}(\xi)\\ \underline{\psi}(\xi)\end{pmatrix}。$$

因为 F^l 列紧，故在 $F^l(S^l)$ 中可以找到一个有收敛子列的无限序列 $\{\Psi\}_n$，仍记为 $\{\Psi\}_n\to\Psi$。由于 $F^l:S^l\to S^l$，故 $\{\Psi\}_n\subset S^l$，也即 $\underline{U}\leqslant\Psi_n\leqslant\overline{U}$，因而 $\underline{U}\leqslant\Psi\leqslant\overline{U}$，即 $\Psi\subset S^l$，因此 F^l 为闭集。同时因为 $\|\Psi_n(\xi)\|_{\sup}$ 一致收敛于 $\|\Psi_n\|_{\sup}$，且 $\lim_{\xi\to\infty}\|\overline{U}-\underline{U}\|_{\sup}=0$，上下解收敛，故 $\{\Psi\}_n\to\Psi$ 在 S^l 中成立，F^l 在 S^l 中是紧的，所以由 Schauder 不动点定理，F^l 在 S^l 中存在一个不动点，证明了系统(10)在 $[-l,l]$ 上解的存在性。

3　行波解的存在性

本章将证明当 $c\geqslant c^*$，$R_0>1$ 时，系统(4)存在行波解 (ϕ,ψ) 且满足 $0<\phi<1$，$\psi>0$。

首先考虑 $c>c^*$ 的情况。取一个正递增数列 $\{l_k\}_{k\in\mathbf{N}}$，使得 $k\to+\infty$ 时，$l_k\to+\infty$，且 $k\in\mathbf{N}$ 时，$l_k>-\xi_2$。由引理 3 可知，对于任一 $k\in\mathbf{N}$，存在满足系统(10)和式(15)的解 $(\phi_k,\psi_k)\in C(\mathbf{R})\times C(\mathbf{R})\cap(C^1(\mathbf{R}\setminus\{-l_k,l_k\})\times C^1(\mathbf{R}\setminus\{-l_k,l_k\}))$。对 $\forall K\in\mathbf{N}$ 充分大且 $l_k\geqslant2$，因为 ψ 在 $[-l_k,l_k]$ 上有界，通过系统(4)，可得 $\{\phi_k\}_{k\geqslant K}$，$\{\psi_k\}_{k\geqslant K}$，以及 $\{\phi_k\psi_k\}_{k\geqslant K}$ 在 $[-l_k,l_k]$ 上一致有界，且 $\{\phi_k\}$，$\{\psi_k\}$ 在 $[-l_k+1,l_k-1]$ 上也一致有界。再令 K 足够大，同时通过对角取元过程得到 $\{\phi_k,\psi_k\}$ 的子列 $\{(\phi_{k_j},\psi_{k_j})\}$，使得当 $j\to\infty$ 时，在 $\mathbf{R}$ 的任意紧子集上一致地有 $\phi_{k_j}\to\phi$，$\psi_{k_j}\to\psi$，$\phi_{k_j}\to\phi'$，$\psi_{k_j}\to\psi'$。由 Arzelà−Ascoli 定理，显然 (ϕ,ψ) 是系统(4)的解，且有

$$0\leqslant\underline{\phi}\leqslant\phi\leqslant1,\quad 0\leqslant\underline{\psi}\leqslant\psi\leqslant\overline{\psi},\quad\forall\xi\in\mathbf{R},\tag{16}$$

由上下解的定义,有

$$(\phi,\psi)(-\infty)=(1,0)。$$

引理 4 在 $\mathbf{R}$ 上,$0<\phi<1$, $\psi>0$,且 ϕ,ψ 是非平凡的。

证明 先证 $\psi>0$。使用反证法,由于 $\underline{\psi}>0$,则在 $(-\infty,-\xi_2)$ 上 $\psi>0$。假设存在一实数 $\xi_0\in[\xi_2,\infty)$,使得 $\psi(\xi_0)=0$ 且对 $\forall\,\xi<\xi_0$, $\psi(\xi)>0$。由于 ψ 在 $\mathbf{R}$ 上始终非负,则 $\psi'(\xi_0)=0$,再将 $\psi(\xi_0)=0$, $\psi'(\xi_0)=0$ 代入式(4)的第二个方程,可得

$$\psi(\xi_0-1)+\psi(\xi_0+1)+\beta\phi(\xi_0-c\tau)\psi(\xi_0-c\tau)=0,$$
$$\psi(\xi_0-1)+\psi(\xi_0+1)+\beta\phi(\xi_0-c\tau)\psi(\xi_0-c\tau)=0,$$
$$\psi(\xi_0-1)=0,\quad \psi(\xi_0-c\tau)=0,$$

与 ξ_0 的定义矛盾,因此 $\psi>0$。

再证明 $\phi>0$。事实上,如果对于某个 ξ^* 有 $\phi(\xi^*)=0$,那么由系统(4)的第 1 个方程可知,由于 $\phi'(\xi^*)=0$, $D[\phi](\xi^*)\geqslant0$, $\mu>0$。那么

$$0=-c\phi'(\xi^*)+D[\phi](\xi^*)+\mu(1-\phi(\xi^*))-\beta\phi(\xi^*)\psi(\xi^*)=D[\phi](\xi^*)+\mu>0,$$

导出矛盾,因此 $\phi>0$。

接下来证明 $\phi<1$。类似地,如果存在 $\tilde{\xi}$,使得 $\phi(\tilde{\xi})=1$,同样由系统(4)的第一个方程,可知,

$$\begin{aligned}0&=-c\phi'(\tilde{\xi})+D[\tilde{\xi}]+\mu(1-\phi(\tilde{\xi}))-\beta\phi(\tilde{\xi})\psi(\tilde{\xi})\\&=-c\phi'(\tilde{\xi})+D[\phi](\tilde{\xi})-\beta\psi(\tilde{\xi})\\&<0。\end{aligned}$$

这是因为 $\phi'(\xi^*)=0$, $D[\phi](\tilde{\xi})\leqslant0$, $\psi>0$。导出矛盾,因此 $\phi<1$。

下面最主要的是证明 ψ 有界。我们称系统(4)中的第 2 个方程满足下列 Harnack 性质[12]。

引理 5 令 M 为正实数,若存在一个正常数 $C=C(M)$ 使得对任意连续函数 a 和 b,满足对所有 $\xi\in\mathbf{R}$, $M^{-1}\leqslant a(\xi)\leqslant M$, $b(\xi)\geqslant-M$,且对任意 $C^1(\mathbf{R})$ 函数 u 满足,对任意 $\xi\in\mathbf{R}$ 有 $u'(\xi)\geqslant a(\xi)u(\xi+1)+b(\xi)u(\xi)$,那么对所有 $\xi\in\mathbf{R}$,有

$$C^{-1}\leqslant\frac{u(\xi+1)}{u(\xi)}\leqslant C。$$

由于 $C>0$ 且 ϕ 非负,令引理 5 中 $u=\psi$,有

$$\psi'(\xi)\geqslant\left(\frac{d}{c}\right)\psi(\xi+1)-\left(\frac{2d}{c}+\frac{\gamma}{c}+\frac{r_h}{bc}\right)\psi(\xi),$$

因此由引理 5,可知 $\xi\mapsto\dfrac{\psi(\xi\pm1)}{\psi(\xi)}$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界,而由波廓方程(4),$\xi\mapsto\dfrac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}$ 也有界。

下面两个引理说明了当 $\limsup\limits_{\xi\to+\infty}\psi(\xi)=+\infty$ 时,ϕ,ψ 在 $+\infty$ 处的渐近行为。

引理 6 令 $0<\underline{c}\leqslant\bar{c}$ 为两给定正实数,$\{c_k\}$ 为 $[\underline{c},\bar{c}]$ 中的实数序列,令 $\{(\phi_k,\psi_k)\}$ 为速度 c_k 下满足(16)式的系统(4)的解。若 $\{\xi_k\}$ 为一个实数序列,且使得在 $k\to+\infty$ 时 $\psi_k(\xi_k)\to+\infty$,那么在 $k\to+\infty$ 时 $\phi_k(\xi_k)\to0$。

证明 使用反证法,假设存在 $\varepsilon>0$ 使得当 $k\to+\infty$ 时,$\psi_k(\xi_k)\to+\infty$ 且对所有 $k\in\mathbf{N}$,有 $\phi_k(\xi_k)\geqslant\varepsilon$。由于在 $\mathbf{R}$ 上有 $0<\phi_k<1$ 且 $\psi_k>0$,系统(4)中关于 ϕ_k 的方程说明对 $\xi\in\mathbf{R}$,有

$$\phi_k'(\xi)\leqslant\frac{2}{\underline{c}},\tag{*}$$

因此,在 $\xi\in[\xi_k-\delta,\xi]$ 上,$\phi_k(\xi)\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$,其中 $\delta=\dfrac{\varepsilon\underline{c}}{4}>0$。

另一方面,由于对所有的 $\xi\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{N}$ 都有 $\psi_k'(\xi)\geqslant\dfrac{d\psi(\xi+1)}{\bar{c}}-\dfrac{(2d+\gamma+r_h/b)\psi(\xi)}{\underline{c}}$,因此$\dfrac{\psi_k'}{\psi_k}$在 $\mathbf{R}$ 上全局有界且不依赖于 k。因此,极限 $\lim\limits_{k\to+\infty}\psi_k(\xi_k)=+\infty$ 即 $k\to+\infty$ 时,

$$0<M_k:=\min_{\xi_k-\delta,\xi_k}\psi_k\to+\infty,$$

由（＊）式及系统（4），以及 $0<\phi_k<1$ 得出在 $k\to+\infty$ 时 $\max\limits_{[\xi_k-\delta,\xi_k]}\phi_k'\leqslant\frac{2}{\underline{c}}-\frac{\beta\varepsilon M_k}{2\bar{c}}\to-\infty$。这与 ϕ_k 有界矛盾，因此在 $k\to+\infty$ 时 $\phi_k(\xi_k)\to0$。

再考虑满足式（16）以及 $(\phi,\psi)(-\infty)=(1,0)$ 的系统（4）的解。下面引理说明了当 ψ 无界时，ψ 在 $+\infty$ 处收敛于 $+\infty$。

引理 7　若 $\limsup\limits_{\xi\to+\infty}\psi(\xi)=+\infty$，则 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\psi(\xi)=+\infty$。

证明　使用反证法。假设 $\limsup\limits_{\xi\to+\infty}\psi(\xi)=+\infty$，且 $\liminf\limits_{\xi\to+\infty}\psi(\xi)<+\infty$。因为 $\frac{\psi'}{\psi}$ 全局有界，则存在 $M\in\mathbf{R}$ 和收敛于 $+\infty$ 的序列 $\{\theta_k\}$，$\{\xi_k\}$，且使得对于所有 $k\in\mathbf{N}$ 和 $\lim\limits_{k\to+\infty}\psi(\xi_k)=+\infty$，

$$\psi(\theta_k)\leqslant M,\quad \theta_k<\xi_k-1<\xi<\xi_k+1<\theta_k+1,\quad \psi(\xi_k)=\max_{[\theta_k,\theta_k+1]}\psi\Big(=\max_{[\xi_k-1,\xi_k+1]}\psi\Big),$$

因此 $\psi'(\xi_k)=0$（极值点）且 $D[\psi](\xi_k)\leqslant0$。由式（4）可推断出，对所有 $k\in\mathbf{N}$，$\left(\mu+\gamma+\frac{r_h}{b}-\beta\phi(\xi-c\tau)\right)\psi(\xi)\leqslant0$。但是当 $k\to+\infty$ 时，由引理 6 得 $\phi(\xi_k)\to0$ 且 $\psi(\xi_k)>0$，因此上式显然不成立。

为了进一步分析解的性质，根据文献[4]，得出以下结果。

引理 8　令 $\zeta>0$ 为正常数，同时，$B:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为有极限 $B(\pm\infty)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}B(x)$ 的连续函数。z 为连续函数，且满足

$$\zeta z(x)=\mathrm{e}^{\int_x^{x+1}z(s)\mathrm{d}s}+\mathrm{e}^{\int_x^{x-1}z(s)\mathrm{d}s}+B(x),$$

$z(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续且有界。同时，极限 $\omega^{\pm}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}z(x)$ 存在，且为特征方程

$$\zeta\omega=\mathrm{e}^{\omega}+\mathrm{e}^{-\omega}+B(\pm\infty)$$

的实根。

引理 9　ψ 有界。

证明　若 ψ 无界，即 $\limsup\limits_{\xi\to\infty}\psi(\xi)=+\infty$，由于 ψ 连续且正，$\psi(-\infty)=0$。因此，引理 6、7 意味着在 $\xi\to\infty$ 时，$\psi(\xi)\to\infty$，$\phi(\xi)\to0$。由系统（4），连续函数 $z(\xi):=\frac{\psi'}{\psi}$ 满足

$$\frac{c}{d}z(\xi)=\left(\mathrm{e}^{\int_\xi^{\xi+1}z(s)\mathrm{d}s}+\mathrm{e}^{\int_\xi^{\xi-1}z(s)\mathrm{d}s}-2\right)-\frac{\mu+\gamma+[r_h\psi(\xi)/(b+\psi(\xi))]}{d}+\frac{\beta\phi(\xi-c\tau)\psi(\xi-c\tau)}{\psi(\xi)},$$

因为 ϕ 存在有限极限，且 $\phi(+\infty)=0$，由引理 8 得，在 $\xi\to+\infty$ 时，有

$$d(\mathrm{e}^{\omega}+\mathrm{e}^{-\omega}-2)=c\omega+\mu+\gamma+r_h,\tag{17}$$

μ,γ,r_h 为正，方程有一正一负两根。而 $z=\frac{\psi'}{\psi}$，由于 $\psi(+\infty)=\infty$，故 z 趋于式（17）的正根。同时，注意 $\lambda_1<\lambda_2$ 为特征方程 $\Delta(\lambda^*,c^*)=0$ 的两个正根，由于 $\beta>0$，可得 $\lambda_1<\lambda_2<\omega$；但由 $z=\frac{\psi'}{\psi}=\omega>0$ 可得，$\xi\to\infty$ 时，$\ln\psi(\xi)\sim\omega\xi$，由式（16），对所有 $\xi\in\mathbf{R}$，有 $\psi(\xi)\leqslant\bar{\psi}(\xi)=\mathrm{e}^{\lambda_1\xi}$，$\lambda_1<\omega$，故矛盾，所以 ψ 有界。

引理 10　$\inf\limits_{\mathbf{R}}\phi>0$。

证明　C^{∞} 函数 ϕ 在 $\mathbf{R}$ 中满足 $0<\phi<1$，且 $\phi(-\infty)=1$。假设 $\inf\limits_{\mathbf{R}}\phi=0$。则存在一个序列 $\{\xi_k\}\to\infty$，使得在 $k\to+\infty$ 时，$\phi(\xi_k)\to0$。

另一方面，由于 ϕ,ψ 有界，且任意阶导数有界，因此，由 Arzelà-Ascoli 定理，存在 ξ 的子序列 ξ_k，使得当 $k\to+\infty$ 时，函数 $\xi\mapsto\phi(\xi+\xi_k)$，$\xi\mapsto\psi(\xi+\xi_k)$ 在 $C_{\mathrm{loc}}^{\infty}(\mathbf{R})$ 上收敛到非负函数 $\phi_\infty(\xi)$，$\psi_\infty(\xi)$，显然 $\phi_\infty(0)=0$，由系统（4）第一个方程有

$$-c\phi_\infty(\xi)'+D[\phi_\infty(\xi)]+\mu(1-\phi_\infty(\xi))-\beta\phi_\infty(\xi)\psi_\infty(\xi)=0。\tag{18}$$

由 $\mu>0$，上式在 0 处矛盾。因此 $\inf\limits_{\mathbf{R}}\phi>0$。

下面证明 ψ 不会在 $+\infty$ 处以任意形式接近 0，方法是证明对于任意充分小的 ε，当 $\psi<\varepsilon$ 时 $\psi'>0$。

引理 11　令 $0<\underline{c}\leqslant\bar{c}$ 为两给定正实数，存在 $\varepsilon>0$，使得对任意 $\Gamma\in[\underline{c},\bar{c}]$ 和对任意满足式（16）的（4）的解

(以速度 Γ 代替 c)成立:对任意 $\xi\in\mathbf{R}$,有

$$(\psi(\xi)\leqslant\varepsilon)\Rightarrow(\psi'(\xi)>0)。$$

证明 使用反证法。假设不存在这样的 ε,则存在序列 $\{c_k\}\in[\underline{c},\bar{c}]$ 和序列 $\{\xi_k\}$,使得系统(4)的以 $c=c_k$ 为波速且满足式(16)的解 $\{(\phi_k,\psi_k)\}$,满足当 $k\to+\infty$ 时,$\psi_k(\xi_k)\to0$,且对所有 $k\in\mathbf{N}$, $\psi_k'(\xi_k)\leqslant0$。

不失一般性,假设 $\xi_k=0$。$\{c_k\}$ 存在子序列仍记为 $\{c_k\}$,使得在 $k\to+\infty$ 时,$c_k\to c_\infty\in[\underline{c},\bar{c}]$。引理 5 可得序列 $\left\{\dfrac{\psi_k'}{\psi_k}\right\}$ 在 $L^\infty(\mathbf{R})$ 有界,即存在 $c>0$,使得在 $k\in\mathbf{N}$, $\xi\in\mathbf{R}$ 时,$|\psi_k(\xi)|\leqslant c|\psi_k(\xi)|$。因为在 $k\to+\infty$ 时,$\psi_k(0)\to0$,从而 ψ_k 在 $\mathbf{R}$ 上局部一致收敛于 0。因此也有在 $k\to+\infty$ 时,$\psi_k'(\xi_k)$ 在 $\mathbf{R}$ 上局部一致收敛于 0。相应地,通过对系统(4)中的 ϕ_k 求导,可得 ϕ_k',ϕ_k''局部有界。因此,$\{\phi_k\}$ 在 $C_{\mathrm{loc}}^1(\mathbf{R})$ 中收敛,$\{\phi_k\}$ 收敛于 ϕ_∞ 且 ϕ_∞ 满足系统(4)(速度 c_∞,$\psi=0$)且 $0\leqslant\phi_\infty\leqslant1$,即,在 $\mathbf{R}$ 上有

$$c_\infty\phi_\infty'=D[\phi_\infty]+\mu(1-\phi_\infty),$$

令 $\alpha=\inf\limits_{\mathbf{R}}\phi_\infty$,$\{\zeta_m\}$ 为一实序列,使得在 $m\to\infty$ 时,$\phi_\infty(\zeta_m)\to\alpha$。存在函数 $\xi\mapsto\phi_\infty(\xi+\zeta_m)$ 的子序列 Φ_m,使得当 $m\to\infty$ 时,Φ_m 在 C_{loc}^∞ 中收敛于 Φ_∞,且 Φ_∞ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $c_\infty\Phi_\infty'=D[\Phi_\infty]+\mu(1-\Phi_\infty)$。由此可得 $\alpha\leqslant\Phi_\infty\leqslant1$ 且 $\Phi_\infty(0)=\alpha$,因此,$\Phi_\infty'(0)=0$, $D[\Phi_\infty](0)\geqslant0$。那么由 $c_\infty\Phi_\infty'=D[\Phi_\infty]+\mu(1-\Phi_\infty)\Rightarrow\mu(1-\Phi_\infty(0))=\mu(1-\alpha)\leqslant0$。由 $\alpha\geqslant1$,得 $1\leqslant\alpha=\inf\limits_{\mathbf{R}}\phi_\infty\leqslant\phi_\infty\leqslant1$。因此 $\phi_\infty=1$。

设 $\Psi_k(\xi)=\dfrac{\psi_k(\xi)}{\psi_k(0)}$。由于$\left\{\dfrac{\psi_k'}{\psi_k}\right\}$在 $L^\infty(\mathbf{R})$ 上有界,因此正函数 Ψ_k 在 sup 范数意义下局部有界,因此 $\Psi_k'(\xi)=\left(\dfrac{\psi_k(\xi)}{\psi_k(0)}\right)'=\dfrac{\psi_k'(\xi)}{\psi_k(\xi)}\times\Psi_k(\xi)$ 同样有界。因为 Ψ_k 满足

$$-c_k\Psi_k''(\xi)+dD[\Psi_k'](\xi)-\left(\mu+\gamma+\frac{r_h}{b}\right)\Psi_k'(\xi)+\beta\phi_k(\xi-c\tau)\Psi_k'(\xi-c\tau)+\beta\phi_k'(\xi-c\tau)\Psi_k(\xi-c\tau)=0,$$

且 $\{\phi_k\}$ 在 C_{loc}^l 中有界,故可推出 Ψ_k''局部有界。由 Arzelà-Ascoli 定理,存在 $\{\Psi_k\}$ 的子序列仍记为 $\{\Psi_k\}$ 使得 $\{\Psi_k\}$ 在 C_{loc}^l 中收敛于 Ψ_∞。$\phi_\infty=1$,则 Ψ_∞ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $c_\infty\Psi_\infty=dD[\Psi_\infty]+\left(\beta-\mu-\gamma-\dfrac{r_h}{b}\right)\Psi_\infty$。

进一步,本文说明在 $\mathbf{R}$ 上有 $\Psi_\infty>0$;如若不然,则存在 ξ_0 使得 $\Psi_\infty(\xi_0)=0$,且 $\Psi'_\infty(\xi_0)=0$。而由方程 $c_\infty\Psi_\infty=dD[\Psi_\infty]+\left(\beta-\mu-\gamma-\dfrac{r_h}{b}\right)\Psi_\infty$,可得 $\Psi_\infty(\xi+1)=\Psi_\infty(\xi-1)=0$。通过归纳法得 $\Psi_\infty(\xi_0+m)=0$。由于 $c_\infty\Psi_\infty'\geqslant\left(\beta-\mu+\gamma-\dfrac{r_h}{b}\right)\Psi_\infty$,非负函数 $\xi\mapsto\Psi_\infty(\xi)\mathrm{e}^{-\left(\beta-\mu-\gamma-\frac{r_h}{b}-2\right)/c_\infty}$ 不减,则在 $\mathbf{R}$ 上有 $\Psi_\infty=0$,与 $\Psi_\infty(0)=1$ 矛盾,因此对所有 $\xi\in\mathbf{R}$, $\Psi_\infty(\xi)>0$。

设连续函数 $Z(\xi):=\dfrac{\Psi'_\infty(\xi)}{\Psi_\infty(\xi)}$满足

$$\frac{c_\infty}{d}Z(\xi)=\ (\mathrm{e}^{\int_\xi^{\xi+1}Z(s)\mathrm{d}s}+\mathrm{e}^{\int_\xi^{\xi-1}Z(s)\mathrm{d}s}-2+\frac{\beta-\mu-\gamma-(r_h/b)}{d}。\tag{19}$$

由引理 5,$Z(\xi)=\dfrac{\Psi'_\infty(\xi)}{\Psi_\infty(\xi)}$在 $\xi\to\pm\infty$ 时有有限极限 $\omega_\pm$,同时 $\omega_\pm$是特征方程 $c_\infty\omega_\pm=d(\mathrm{e}^{\pm\omega}+\mathrm{e}^{\mp\omega}-2)+\beta-\mu-\gamma-\dfrac{r_h}{b}$ 的根。由于 $c_\infty\geqslant\underline{c}>0$ 且 $\beta>\mu+\gamma+\dfrac{r_h}{b}$,因此 $\omega_\pm$必为正,特别地,Ψ'_∞ 在$\pm\infty$ 处为正。进一步对式(19)求导,得出:在 $\mathbf{R}$ 上有

$$c_\infty Z'(\xi)=d(Z(\xi+1)-Z(\xi))\frac{\Psi_\infty(\xi+1)}{\Psi_\infty(\xi)}+d(Z(\xi-1)-Z(\xi))\frac{\Psi_\infty(\xi-1)}{\Psi_\infty}。$$

若 Z 在 $\mathbf{R}$ 上有极小值点 $\underline{\xi}$,那么根据上式,$Z'(\underline{\xi})=0$ 且 $Z(\underline{\xi}+1)=Z(\underline{\xi}-1)=Z(\underline{\xi})$。由归纳法得出,对所有 $m\in\mathbf{N}$,都有 $Z(\underline{\xi}+m)=Z(\underline{\xi})$,因此可得 $\inf\limits_{\mathbf{R}}Z\geqslant\min\{Z(-\infty),Z(+\infty)\}>0$。进一步有,在 $\mathbf{R}$ 上有 $\Psi'_\infty>0$,因此

对于充分大的 k,由 $0<\Psi'_\infty(0)=\lim\limits_{k\to+\infty}\Psi'_k(0)=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\psi'_k(0)}{\psi_k(0)}$可得出 $\psi'_k(0)>0$,这与 $\psi'_k(0)<0$ 矛盾。引理得证。

由引理 11 和 ϕ,ψ 的正性可得 ψ 在$+\infty$ 处的渐近行为。

$$\liminf_{\xi\to+\infty}\psi(\xi)>0,\quad \liminf_{\xi\to+\infty}\phi(\xi)>0,$$

同样地,有

$$\limsup_{\xi\to+\infty}\phi(\xi)<1。$$

如若不然,存在一个实数列$\{\xi_k\}\to\infty$,使得在 $k\to\infty$ 时,$\phi(\xi_k)\to1$。类似引理 11 的证明,函数 $\xi\mapsto\phi(\xi+\xi_k)$,$\xi\mapsto\psi(\xi+\xi_k)$在 $k\to+\infty$ 时,在 $C^\infty_{\rm loc}$中收敛于非负函数 $\phi_\infty(\xi)$,$\psi_\infty(\xi)$,且是 $\phi_\infty(\xi)$,$\psi_\infty(\xi)$系统(4)的解。

进一步有 $0<\phi_\infty\leqslant1$, $\psi_\infty>0$。由于 $\phi_\infty(0)=1$,得 $\phi'_\infty(0)=0$,与式(18)在 $\phi_\infty(0)$处有矛盾。因此 $\limsup\limits_{\xi\to+\infty}\phi(\xi)<1$成立。

通过以上引理和证明得出本文主要结论如下。

定理 1　当 $c>c^*$, $R_0>1$ 时,系统(4)在 $\mathbf{R}$ 上存在有界行波解$(\phi(n+ct),\psi(n+ct))$连接无病平衡点和正平衡点,并且满足 $0<\phi<1$, $\psi>0$, $\lim\limits_{\xi\to-\infty}(\phi,\psi)=(1,0)$,且

$$0<\liminf_{\xi\to+\infty}\phi(\xi)\leqslant\lim_{\xi\to+\infty}\phi(\xi)\leqslant\limsup_{\xi\to+\infty}\phi(\xi)<1,$$
$$0<\liminf_{\xi\to+\infty}\psi(\xi)\leqslant\lim_{\xi\to+\infty}\psi(\xi)\leqslant\limsup_{\xi\to+\infty}\psi(\xi)<+\infty。$$

4　总结

本文研究了一类具有饱和治愈率的扩散 SEIR 模型行波解的存在性,通过上下解结合 Schauder 不动点定理的方法,先构造出了一类截断问题的解,并通过极限思想和数学分析方法,得到了解在无穷远处的渐近行为,证明了在 $c>c^*$, $R_0>1$ 时,系统(4)在 $\mathbf{R}$ 上存在行波解(ϕ,ψ)连接无病平衡点和正平衡点且满足 $0<\phi<1$, $\psi>0$。

参考文献:

[1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1991, 53(1/2):33-55.

[2] HOSONO Y, ILYAS B. Traveling waves for a simple diffusive epidemic model[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Science, 1995, 5(7):935-966.

[3] DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1/2):29-48.

[4] CHEN X F, GUO J S. Uniqueness and existence of traveling waves for discrete quasilinear monostable dynamics[J]. Mathematische Annalen, 2003, 326(1):123-146.

[5] CHEN X F, FU S C, GUO J S. Uniqueness and asymptotics of traveling waves of monostable dynamics on lattices[J].Siam Journal on Mathematical Analysis, 2006, 38(1):233-258.

[6] WANG Haiyan, WANG Xiangsheng. Traveling wave phenomena in a Kermack-Mckendrick SIR model[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2016, 28(1):143-166.

[7] XU Zhiting. Traveling waves for a diffusive SEIR epidemic model[J]. Communications on Pure Applied Analysis, 2016, 15(3):871-892.

[8] TIAN Baochuan, YUAN Rong. Traveling waves for a diffusive SEIR epidemic model with non-local reaction[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 50:432-449.

[9] ZHOU Xueyong, CUI Jingan. Analysis of stability and bifurcation for an SEIR epidemic model with saturated recovery rate[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(11):4438-4450.

[10] ZHOU Jiangbo, SONG Liyuan, WEI Jingdong. Mixed types of waves in a discrete diffusive epidemic model with nonlinear incidence and time delay[J]. Journal of Differential Equations, 2019, 268(8):4491-4524.

[11] BAI Zhenguo, WU Shiliang. Traveling waves in a delayed SIR epidemic model with nonlinear incidence[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 263:221-232.

[12] CHEN Yanyu, GUO Jongshenq, HAMEL F. Traveling waves for a lattice dynamical system arising in a diffusive endemic model[J]. Nonlinearity, 2016, 30(6):2334-2359.

(编辑:胡春燕)