

具有交错扩散的时滞 Brusselator 模型的 Hopf 分支

杨秀楠, 邢慧*

(西安工程大学理学院, 陕西 西安 710048)

摘要:研究带有交错扩散的时滞 Brusselator 模型。首先应用线性化的方法分析该系统特征方程根的分布,得到系统唯一正平衡点的局部渐近稳定性和 Hopf 分支存在性;其次分析时滞参数对系统 Hopf 分支存在性的影响;最后,利用 MATLAB 软件进行数值模拟来支持理论结果。

关键词:Brusselator 模型;交错扩散;时滞;Hopf 分支

中图分类号:O175 **文献标志码:**A

引用格式:杨秀楠,邢慧.具有交错扩散的时滞 Brusselator 模型的 Hopf 分支[J].山东大学学报(理学版),2025,60(8):116-124,134.

Hopf bifurcation of Brusselator model with cross-diffusion and delay

YANG Xiunan, XING Hui*

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, Shaanxi, China)

Abstract: In this paper, the Brusselator model with cross-diffusion and delay are studied. Firstly, by analyzing the distribution of the roots of the characteristic equation of the system using linearization method, the local asymptotic stability of the system and the existence of Hopf bifurcation at the unique positive equilibrium point are obtained. Then the effect of time delay parameters on the existence of Hopf bifurcation is analyzed. Finally, numerical simulation is carried out to support the theoretical results using MATLAB.

Key words: Brusselator model; cross-diffusion; delay; Hopf bifurcation

0 引言

Brusselator 模型是 Prigogine 和 Lefever^[1]于 1968 年引入的,作为自催化化学振荡反应模型,包括 4 个反应过程: $A \rightarrow U$, $B+U \rightarrow V+D$, $2U+V \rightarrow 3U$, $U \rightarrow E$ 。总反应: $A+B \rightarrow D+E$, 其中 A 、 B 为反应物, D 、 E 为生成物, U 、 V 为中间反应物。结合 4 个反应过程和质量守恒定律^[2],可以获得以下浓度的二阶动力学方程组,通常称为 Brusselator 模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \lambda(1 - (b+1)u + bu^2), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + \lambda a^2(u - u^2 v), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期:2023-04-27;网络出版时间:2024-04-16 12:25:15

基金项目:陕西省自然科学基金项目(2021JQ-662)

第一作者:杨秀楠(1992—),女,硕士研究生,研究方向为非线性泛函分析及其在微分方程中的应用。E-mail:2544114637@qq.com

*通信作者:邢慧(1982—),女,副教授,硕士生导师,博士,研究方向为非线性泛函分析及其在微分方程中的应用。

E-mail:xinghui210@163.com

其中, $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 1)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域, u 和 v 是两个反应物的浓度, a 和 b 是其他组分(如催化剂)的固定浓度, d_1, d_2 分别是 u 和 v 的扩散系数, d_1, d_2, a, b, λ 为正常数, \mathbf{n} 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。

许多学者对 Brusselator 模型做了广泛的研究^[3-9]。Ghergu^[5] 研究了一般的 Brusselator 模型在满足 Neumann 边界条件时正稳态解的存在性和不存在性。Li 和 Wang^[6] 研究了反应扩散 Brusselator 模型常数稳态解的稳定性和 Hopf 分支。Peng 和 Wang^[7] 研究了反应扩散 Brusselator 模型的模式生成。

Ott 等^[10] 首次提出延迟对控制系统的影响,后来把这种通过一种参数微扰控制混沌的方法称为 OGY 法。时滞现象在许多化学反应中普遍存在,并且是系统不稳定的重要因素,时滞微分系统的控制问题一直受到学者的广泛关注。时间延迟的引入会极大地影响偏微分方程和动力系统的行为。Alfifi^[11] 研究了具有延迟反馈控制的 Brusselator 模型的稳定性和 Hopf 分支。Hu 等^[12] 分析了 Brusselator 反应扩散系统在时滞反馈下会产生行波解和驻波解。杨晓燕等^[13] 研究了带有时滞 Brusselator 模型的动力系统,讨论了系统正平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性。Gurevich 等^[14] 研究了时滞反馈耗散系统中局部结构的不稳定性。Gurevich^[15] 研究了时滞反馈对一类具有一种活化剂和两种抑制剂的化学反应模型的影响。由于温度和环境等因素的影响,活化剂的活性作用会有时间延迟,因此,在活化剂中加入时滞项是非常有意义的。此外,按照活化剂和抑制剂的相互影响,考虑到一种交叉的活化-抑制系统,2019 年, Yadeav 等^[16] 通过用 Galerkin 有限元法对 Brusselator 模型近似求解,还研究了存在交错扩散时模型的稳定性,发现交错扩散增加解的波数。从化学的角度看,交叉扩散系数表示一种物质浓度对另一种物质的相互影响^[17-18]。在以上研究工作的启发下,本文研究具有交错扩散的时滞 Brusselator 模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + e_1 \Delta v + \lambda(1 - (b+1)u(t-\tau) + bu^2), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = e_2 \Delta u + d \Delta v + \lambda a^2(u - u^2 v), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, t) = \hat{u}(x, t) \geq 0, v(x, t) = \hat{v}(x, t) \geq 0, & (x, t) \in \bar{\Omega} \times [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 1)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域, u 和 v 是两个反应物的浓度, a 和 b 是其他组分(如催化剂)的固定浓度, $\tau \geq 0$ 表示时滞,参数 d, λ, a 和 b 是正常数,交错扩散系数 $e_1, e_2 \geq 0$ 。

在一维空间 $\Omega = (0, \pi)$ 中考虑问题,则系统(2)变为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + e_1 \Delta v + \lambda(1 - (b+1)u(t-\tau) + bu^2), & x \in (0, \pi), t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = e_2 \Delta u + d \Delta v + \lambda a^2(u - u^2 v), & x \in (0, \pi), t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, t) = \hat{u}(x, t) \geq 0, v(x, t) = \hat{v}(x, t) \geq 0, & (x, t) \in [0, \pi] \times [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3)$$

首先对提出的系统(3)在平衡点处进行线性化,进而分析系统(3)在平衡点处的稳定性;其次,利用文献[19]中提出的方法,得到了时滞 τ 的变化对系统(3)在平衡点稳定性和 Hopf 分支存在性的影响;最后对所获得的理论结果进行数值模拟。

1 系统平衡点处稳定性分析

经计算,系统(3)存在唯一正常数平衡点 $E^* = (1, 1)$ 。

在 E^* 处对系统(3)进行线性化,令 $u = 1 + \phi(x, t), v = 1 + \psi(x, t)$, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta \phi + e_1 \Delta \psi + \lambda(2b\phi - (b+1)\phi(t-\tau) + b\psi), & x \in (0, \pi), t > 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = e_2 \Delta \phi + d \Delta \psi - \lambda a^2 \phi - \lambda a^2 \psi, & x \in (0, \pi), t > 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ \phi(x, t) = \hat{\phi}(x, t) \geq 0, \psi(x, t) = \hat{\psi}(x, t) \geq 0, & x \in [0, \pi] \times [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (4)$$

下面利用空间分解的方法, 设 $0 = \delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \dots$ 是带有齐次 Neumann 边界条件的 $-\Delta$ 算子在 Ω 中的特征值, 在 $C^1(\bar{\Omega})$ 中 δ_i 对应的特征空间为 $E(\delta_i)$, 设

$$X = \{ U = (\phi, \psi) \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}) \mid \partial_n \phi = \partial_n \psi = 0, x \in \partial \Omega \},$$

$\{\varphi_{ij}, j=1, 2, \dots, \dim E(\delta_i)\}$ 是 $E(\delta_i)$ 的一组标准正交基,

$$X_{ij} = \{ c \cdot \varphi_{ij} \mid c \in \mathbf{R}^2 \}, \quad X_i = \bigoplus_{j=1}^{\dim E(\delta_i)} X_{ij}, \quad X = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} X_i.$$

系统(4)在 $(0, 0)$ 处线性化后为 $U_t = \mathbf{D} \Delta U + \lambda(\mathbf{J}U + \mathbf{J}_0 U(t-\tau))$, 其中

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} \phi(x, t) \\ \psi(x, t) \end{pmatrix}, \quad U(x, t-\tau) = \begin{pmatrix} \phi(x, t-\tau) \\ \psi(x, t-\tau) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ e_2 & d \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2b & b \\ -a^2 & -a^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} -(b+1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

且

$$\text{Det}(\mathbf{D}) = d - e_1 e_2 > 0.$$

注意到算子 $\mathbf{D} \Delta + \lambda(\mathbf{J} + \mathbf{J}_0)$ 在整个空间 X 上的结果不明确, 但作用到每个特征子空间的结果是简洁的。对每个 $i \geq 1$, X_i 是算子 $\mathbf{D} \Delta + \lambda(\mathbf{J} + \mathbf{J}_0)$ 的不变子空间, 则 μ 是 X_i 上的特征值当且仅当 μ 是矩阵 $-\delta_i \mathbf{D} + \lambda(\mathbf{J} + \mathbf{J}_0)$ 的特征值。

因为是在一维空间 $\Omega = (0, \pi)$ 中考虑的问题, 所以 Neumann 边值条件下 $-\Delta$ 的特征值为

$$\delta_k = k^2, \quad k \in \mathbf{N} = \mathbf{N}^+ \cup \{0\},$$

从而矩阵 $-\delta_k \mathbf{D}$ 变为 $-k^2 \mathbf{D}$ 。

令 $\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\mu t}$, 则对每个 $k \in \mathbf{N}$, $U_t = -k^2 \mathbf{D} U + \lambda(\mathbf{J}U + \mathbf{J}_0 U(t-\tau))$ 对应的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \mu + k^2 - 2\lambda b + \lambda(b+1)e^{-\mu\tau} & e_1 k^2 - \lambda b \\ e_2 k^2 + \lambda a^2 & \mu + dk^2 + \lambda a^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

$$\mu^2 + s_k \mu + q_k + (r_k \mu + p_k) e^{-\mu\tau} = 0, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} s_k &= dk^2 + \lambda a^2 + k^2 - 2\lambda b, \\ p_k &= \lambda(b+1)(dk^2 + \lambda a^2), \\ r_k &= \lambda(b+1), \\ q_k &= (d - e_1 e_2)k^4 + \lambda(a^2 + b e_2 - a^2 e_1 - 2bd)k^2 - \lambda^2 a^2 b. \end{aligned} \quad (7)$$

当 $\tau = 0$ 时, 特征方程(6)变为

$$\mu^2 + (s_k + r_k)\mu + q_k + p_k = 0. \quad (8)$$

令 $M_k = -k^2 \mathbf{D} + \lambda \mathbf{J}_1$, 其中 $\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} b-1 & b \\ -a^2 & -a^2 \end{pmatrix}$ 。

于是

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{M}_k) &= -k^2(1+d) + \lambda(b-1-a^2), \\ \text{Det}(\mathbf{M}_k) &= k^4(d-e_1e_2) + F(\mathbf{J}_1, \mathbf{D})\lambda k^2 + a^2\lambda^2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F(\mathbf{J}_1, \mathbf{D}) &= -d(b-1) + e_2b - e_1a^2 + a^2, \\ \text{Det}(\mathbf{M}_k) &= q_k + p_k, \end{aligned}$$

特征方程(8)变为

$$\mu^2 - \text{tr}(\mathbf{M}_k)\mu + \text{Det}(\mathbf{M}_k) = 0. \tag{9}$$

当 $\text{Det}(\mathbf{M}_k) = 0$ 时,对任意 $k \in \mathbf{N}^+$,记

$$d = \frac{e_1e_2k^4 - (e_2b - e_1a^2 + a^2)\lambda k^2 - a^2\lambda^2}{k^4 + (1-b)\lambda k^2} := d_0, \tag{10}$$

在本文中,始终假设 $(A_0): b < 1 + a^2$. 当 $k = 0$ 时,方程(9)的所有特征值都具有负实部,显然交错扩散系统(3)对应的常微分方程系统的正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。

定理 1 假设 (A_0) 和 $\tau = 0$ 成立,且 $k \in \mathbf{N}$. 有

- (1) 如果 $d > d_0$,则交错扩散系统(3)的正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的;
- (2) 如果 $d < d_0$,则交错扩散系统(3)的正平衡点 E^* 是不稳定的。

证明 由假设 (A_0) ,得到 $\text{tr}(\mathbf{M}_k) < 0$. 因此,当 $k \in \mathbf{N}$ 时, $d > d_0$,即 $\text{Det}(\mathbf{M}_k) > 0$,方程(9)的所有特征值都具有负实部,得交错扩散系统(3)的正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的; $d < d_0$,即 $\text{Det}(\mathbf{M}_k) < 0$,方程(9)的特征根具有正的实部,得交错扩散系统(3)的正平衡点 E^* 是不稳定的。

2 具交错扩散和时滞系统的 Hopf 分支的存在性

本章证明具有时滞系统(3) Hopf 分支的存在性。

下面考虑在 $d > d_0$ 的情况下研究系统(3)的 Hopf 分支,设特征方程(6)有一对纯虚根 $\mu = \pm i\omega_k$, $\omega_k > 0$,则特征方程(6)在 $\mu = i\omega_k$ 变为

$$-\omega_k^2 + s_k i\omega_k + q_k + (r_k i\omega_k + p_k)(\cos(\omega_k\tau) - i \sin(\omega_k\tau)) = 0, \tag{11}$$

对于 $k \in \mathbf{N}$,分离式(11)实部和虚部得

$$\begin{cases} -\omega_k^2 + q_k = -\omega_k r_k \sin(\omega_k\tau) - p_k \cos(\omega_k\tau), \\ s_k \omega_k = -\omega_k r_k \cos(\omega_k\tau) + p_k \sin(\omega_k\tau). \end{cases} \tag{12}$$

方程(12)等号两边平方相加得

$$\omega_k^4 + (s_k^2 - r_k^2 - 2q_k)\omega_k^2 + q_k^2 - p_k^2 = 0. \tag{13}$$

可得方程(13)的根

$$\omega_k^\pm = \frac{\sqrt{2}}{2} (r_k^2 - s_k^2 + 2q_k \pm \sqrt{(s_k^2 - r_k^2 - 2q_k)^2 - 4(q_k^2 - p_k^2)})^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

定理 2 假设 (A_0) 和 $(A_1): d_0 < d \leq \frac{a^2 + be_2 - a^2e_1}{3b+1}$,成立,且满足 $d > e_1e_2$,对 $k \in \mathbf{N}$. 则

- (1) 当 $0 \leq k < k^0$ 时, ω_k^+ 是方程(13)唯一的正根。
- (2) 当 $k \geq k^0$ 时,且 $d \geq \frac{2b + be_2 - a^2e_1}{a^2}$,有
 - (a) 如果 $k^0 \geq k^+$,方程(13)没有正根。
 - (b) 如果 $k^0 < k^+$,存在 $k_* \in (k^0, k^+)$,有
 - (i) $(a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b < 1$ 时, $k = k^0, \omega_k^+$ 是方程(13)唯一的正根; $k \in (k^0, k_*)$, ω_k^+ 和 ω_k^- 是方程(13)的两个正根; $k = k_*, \omega_k^+$ 和 ω_k^- 是方程(13)的两个正根; $k > k_*$,方程(13)没有正根;
 - (ii) $(a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b \geq 1$ 时,方程(13)没有正根;

其中

$$k^0 = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} [3db + d + a^2 e_1 - a^2 - be_2 + \sqrt{(a^2 + be_2 - a^2 e_1 - 3db - d)^2 + 4(d - e_1 e_2)(2a^2 b + a^2)}]}{\sqrt{2(d - e_1 e_2)}},$$

$$k^+ = \frac{[\lambda(4b - 2a^2 e_1 + 2be_2 - 2da^2) + \sqrt{\lambda^2(4b - 2a^2 e_1 + 2be_2 - 2da^2)^2 + 4(d^2 + 1 + 2e_1 e_2)h(0)}]}{\sqrt{2(d^2 + 1 + 2e_1 e_2)}},$$

$$h(0) = \lambda^2 [(a^2 - b)^2 + 2b^2 - (2b + 1)].$$

证明 第一步:由式(7),得

$$q_k - p_k = (d - e_1 e_2)k^4 + (a^2 + be_2 - a^2 e_1 - 3bd - d)\lambda k^2 - \lambda^2 a^2 (2b + 1),$$

由假设(A₁)得 $\text{Det}(\mathbf{M}_k) = q_k + p_k > 0$ 和 $a^2 + be_2 - a^2 e_1 - 3bd - d \geq 0$, 又由 $d > e_1 e_2$, 对于任意 $k \in \mathbf{N}$ 时, 显然由 $q_k - p_k$ 的表达式得 $q_k - p_k$ 是关于 k 严格递增的, 即

$$q_k - p_k \geq q_0 - p_0 = -\lambda^2 a^2 (2b + 1),$$

要使得

$$q_k^2 - p_k^2 = (q_k + p_k)(q_k - p_k) = 0,$$

也就是 $q_k - p_k = 0$; 由于 $q_k - p_k$ 是关于 k^2 的一个二次函数, 其图像是开口向上的抛物线, 在 $k = 0$ 处为负值, 则对于任意 $k \in \mathbf{N}$, $q_k - p_k = 0$ 必有唯一的正根是

$$k = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} [3db + d + a^2 e_1 - a^2 - be_2 + \sqrt{(a^2 + be_2 - a^2 e_1 - 3db - d)^2 + 4a^2(d - e_1 e_2)(2b + 1)}]}{\sqrt{2(d - e_1 e_2)}} := k^0.$$

所以 $k = k^0$ 也是方程 $q_k^2 - p_k^2 = 0$ 唯一正根。分析可得, 当 $0 \leq k < k^0$ 时, $q_k^2 - p_k^2 < 0$; 当 $k \geq k^0$ 时, $q_k^2 - p_k^2 \geq 0$ 。因此, 对于 $0 \leq k < k^0$, ω_k^+ 是方程(13)唯一的正根。

第二步:由式(7),得

$$s_k^2 - r_k^2 - 2q_k = (d^2 + 1 + 2e_1 e_2)k^4 + (2da^2 - 4b + 2a^2 e_1 - 2be_2)\lambda k^2 + \lambda^2 [(a^2 - b)^2 + 2b^2 - (2b + 1)].$$

定义函数

$$h(k^2) = s_k^2 - r_k^2 - 2q_k,$$

且

$$h(0) = s_0^2 - r_0^2 - 2q_0 = \lambda^2 [(a^2 - b)^2 + 2b^2 - (2b + 1)],$$

由 $d \geq \frac{2b + be_2 - a^2 e_1}{a^2}$, 得 $2da^2 - 4b + 2a^2 e_1 - 2be_2 \geq 0$, 则对任意 $k \in \mathbf{N}$ 时, $h(k^2)$ 是严格递增的, 因此 $h(k^2) \geq h(0)$ 。如果 $h(0) < 0$ 时, 则 $h(k^2) = 0$ 的唯一正根是

$$k = \frac{[\lambda(4b - 2a^2 e_1 + 2be_2 - 2da^2) + \sqrt{\lambda^2(4b - 2a^2 e_1 + 2be_2 - 2da^2)^2 - 4(d^2 + 1 + 2e_1 e_2)h(0)}]}{\sqrt{2(d^2 + 1 + 2e_1 e_2)}} := k^+.$$

分析可知:如果 $(a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b < 1$, 即 $h(0) < 0$, 当 $0 \leq k < k^+$ 时, $h(k^2) < 0$; 当 $k \geq k^+$ 时, $h(k^2) \geq 0$; 如果 $(a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b \geq 1$, 即 $h(0) \geq 0$, 对于 $k \in \mathbf{N}$, $h(k^2) \geq 0$ 。

第三步:令

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= (s_k^2 - r_k^2 - 2q_k)^2 - 4(q_k^2 - p_k^2), \\ &= (h(k^2))^2 - 4(q_k + p_k)(q_k - p_k), \\ &= (f(k))^2 - 4g(k). \end{aligned}$$

由以上可得, 则对任意 $k \in \mathbf{N}$ 时, $h(k^2)$ 是严格递增的, 即 $f'(k) > 0$; 当 $(a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b < 1$ 时, $k \in [0, k^+)$, $h(k^2) < 0$, 即 $f(k) < 0$; 当 $k^0 < k^+$ 时, $k \in (k^0, k^+)$, 有 $q_k - p_k > 0$, 且 $q_k - p_k$ 是关于 k 严格递增的, 由式(7)和 $a^2 + be_2 - a^2 e_1 - 3bd - d \geq 0$, 可得 $q_k + p_k$ 是关于 k 严格递增的, 且 $\text{Det}(\mathbf{M}_k) = q_k + p_k > 0$, 即 $g'(k) > 0$; 很容易计算得到,

当 $(a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b < 1$ 时, $k \in (k^0, k^+)$, $\frac{d\Delta(k)}{dk} = 2f(k)f'(k) - 4g'(k) < 0$ 。且注意到

$$q_{k^0}^2 - p_{k^0}^2 = 0, \quad s_{k^+}^2 - r_{k^+}^2 - 2q_{k^+} = 0.$$

对于 $0 \leq k < k^0$ 时, $q_k^2 - p_k^2 < 0$, $\Delta(k) > 0$ 始终成立, 则 ω_k^+ 都是方程 (13) 唯一的正根。定理 2 中的结论 (1) 得以证明。

下面证明结论 (2), 对于 $k \geq k^0$ 时, 分情况讨论, 第一种情况: 当 $k^0 < k^+$ 时。

由 $\Delta(k^0) = (s_{k^0}^2 - r_{k^0}^2 - 2q_{k^0})^2 > 0$ 和 $\Delta(k^+) = -4(q_{k^+}^2 - p_{k^+}^2) < 0$, 且 $(a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b < 1$, 得 $k \in (k^0, k^+)$, $\frac{d\Delta(k)}{dk} < 0$, 因此, 当 $(a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b < 1$ 时, 存在唯一的 $k_* \in (k^0, k^+)$, 使 $\Delta(k_*) = 0$ 。故对于 $(a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b < 1$ 时, 当 $k \in (k^0, k_*)$ 时, $q_k^2 - p_k^2 > 0$, $\Delta(k) > 0$, 则 ω_k^+ 和 ω_k^- 是方程 (13) 的两个正根; 当 $k = k^0$ 时, $q_k^2 - p_k^2 = 0$, $\Delta(k) = (s_k^2 - r_k^2 - 2q_k)^2 > 0$, 则 ω_k^+ 是方程 (13) 的正根; 当 $k = k_*$ 时, $q_k^2 - p_k^2 > 0$, $\Delta(k) = 0$, 则 $\omega_k^+ = \omega_k^-$ 都是方程 (13) 的正根; 当 $k \in (k_*, k^+)$ 时, $q_k^2 - p_k^2 > 0$, $\Delta(k) < 0$, 方程 (13) 没有正根; 当 $k \in [k^+, +\infty)$ 时, $q_k^2 - p_k^2 > 0$ 和 $h(k^2) \geq 0$, 方程 (13) 没有正根。对于 $(a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b \geq 1$ 时, $h(k^2) \geq 0$ 和 $q_k^2 - p_k^2 \geq 0$ 始终成立, 方程 (13) 没有正根。

第二种情况是: 当 $k^0 \geq k^+$ 时, $h(k^2) \geq 0$ 和 $q_k^2 - p_k^2 \geq 0$ 始终成立, 因此, 方程 (13) 没有正根。

通过上述定理 2 的证明过程, 还可以得到如下推论。

推论 1 假设 (A_0) 和 (A_1) 成立, 且 $d \geq \frac{2b + be_2 - a^2 e_1}{a^2}$ 和 $d > e_1 e_2$, 对 $k \in \mathbf{N}$, 如果

$$k^* = \begin{cases} k^0, & k^0 \geq k^+, \\ k^0, & (a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b \geq 1 \text{ 和 } k^0 < k^+, \\ k_*, & (a^2 - b)^2 + 2b^2 - 2b < 1 \text{ 和 } k^0 < k^+, \end{cases}$$

则当 $0 \leq k < k^*$ 时, 方程 (13) 至少有一个正根 ω_k^+ 。

在接下来的讨论中, 假设式 (14) 中的 ω_k^+ 是方程 (13) 的正根。由方程 (12) 得

$$\begin{aligned} \sin(\omega_k \tau) &= \frac{s_k p_k \omega_k + \omega_k r_k (\omega_k^2 - q_k)}{\omega_k^2 r_k^2 + p_k^2}, \\ \cos(\omega_k \tau) &= \frac{p_k (\omega_k^2 - q_k) - \omega_k^2 r_k s_k}{\omega_k^2 r_k^2 + p_k^2}, \end{aligned} \tag{15}$$

令 $\tau_{k,j}^+$ 是方程 (15) 的正根, 且 $\omega_k = \omega_k^+$, 因此, 定义

$$\tau_{k,j}^+ = \begin{cases} \frac{1}{\omega_k^+} \left(\arccos \frac{p_k ((\omega_k^+)^2 - q_k) - r_k s_k (\omega_k^+)^2}{r_k^2 (\omega_k^+)^2 - p_k^2} + 2j\pi \right), & 0 \leq k < k^*, k, j \in \mathbf{N}, \sin(\omega_k^+ \tau) \geq 0, \\ \frac{1}{\omega_k^+} \left(2\pi - \arccos \frac{p_k ((\omega_k^+)^2 - q_k) - r_k s_k (\omega_k^+)^2}{r_k^2 (\omega_k^+)^2 - p_k^2} + 2j\pi \right), & 0 \leq k < k^*, k, j \in \mathbf{N}, \sin(\omega_k^+ \tau) < 0. \end{cases} \tag{16}$$

则在 $\tau = \tau_{k,j}^+$ 处方程 (6) 有一对纯虚根 $\pm i\omega_k^+$ 。如果 τ 作为参数, 设 $\mu(\tau) = a(\tau) + i\omega(\tau)$ 是方程 (6) 在 $\tau = \tau_{k,j}^+$ 附近的根, 且满足 $a(\tau_{k,j}^+) = 0$ 和 $\omega(\tau_{k,j}^+) = \omega_k^+$, $k \in \mathbf{N}$ 且 $0 \leq k < k^*$ 。

引理 1 假设 (A_0) 和 (A_1) 成立, 且 $d \geq \frac{2b + be_2 - a^2 e_1}{a^2}$ 和 $d > e_1 e_2$, 当 $0 \leq k < k^*$ 时, 则

$$\left. \frac{d \operatorname{Re}(\mu(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau = \tau_{k,j}^+} > 0.$$

其中, $\operatorname{Re}(\mu(\tau))$ 是 $\mu(\tau)$ 的实部。

证明 由于特征值问题 (6) 是文献 [19] 中问题 4.1 的特例, 因此文献 [19] 中的定理 4.1 可以用来证明这个引理。根据文献 [19], 定义

$$S_j(\tau) = \tau - \frac{\theta(\tau) + 2j\pi}{\omega(\tau)}, \tag{17}$$

通过式 (16)、(17) 进行比较, 得

$$\begin{cases} \theta(\tau) = \arccos \frac{p_k ((\omega_k^+)^2 - q_k) - r_k s_k (\omega_k^+)^2}{r_k^2 (\omega_k^+)^2 - p_k^2}, & \omega(\tau) = \omega_k^+, \sin(\omega_k \tau) \geq 0, \\ \theta(\tau) = 2\pi - \arccos \frac{p_k ((\omega_k^+)^2 - q_k) - r_k s_k (\omega_k^+)^2}{r_k^2 (\omega_k^+)^2 - p_k^2}, & \omega(\tau) = \omega_k^+, \sin(\omega_k \tau) < 0. \end{cases}$$

这意味着 $\frac{\theta(\tau)+2j\pi}{\omega(\tau)} = \tau_{k,j}^+$ 与 τ 无关。由式(17)得

$$\left. \frac{d(S_j(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_{k,j}^+} > 0。$$

根据文献[19],有

$$\text{sign} \left\{ \left. \frac{d \text{Re}(\mu(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau_{k,j}^+} \right\} = \text{sign} \left\{ \left. \frac{d S_j(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_{k,j}^+} \right\},$$

其中 $\text{sign}(\cdot)$ 是符号函数。

因此,由以上结果,并结合引理1,得到以下平衡点处的稳定性和 Hopf 分支存在性定理,取

$$\tau_{k_2} = \min_{\substack{k,j \in \mathbf{N} \\ k \in [0, k^*]}} \tau_{k,j}^+, \quad k_2 \in [0, k^*]。$$

定理3 假设 (A_0) 和 (A_1) 成立,且 $d \geq \frac{2b+be_2-a^2e_1}{a^2}$ 和 $d > e_1e_2$ 。则

- (1) 当 $\tau \in [0, \tau_{k_2})$ 时,系统(3)的正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的;当 $\tau = \tau_{k_2}$ 时,除有一对纯虚根 $\pm i\omega_k^+$ 外,方程(6)的所有特征根都具有负实部;
- (2) 当 $\tau \in (\tau_{k_2}, +\infty)$ 时,系统(3)的正平衡点 E^* 是不稳定的;
- (3) 当 $\tau = \tau_{k,j}^+$ 时,且 $0 \leq k < k^*$, $k, j \in \mathbf{N}$, 系统(3)在正平衡点 E^* 附近出现 Hopf 分支;特别的,当 $k=0$ 时, Hopf 分支是空间齐次的;当 $0 < k < k^*$ 时, Hopf 分支是空间非齐次的。

注1 如果(14)中的 ω_k^- 也是方程(13)的一个正根,令 $\tau_{k,j}^-$ 是方程(15)的正根,且 $\omega_k = \omega_k^-$ 。由方程(15),定义

$$\tau_{k,j}^- = \begin{cases} \frac{1}{\omega_k^-} \left(\arccos \frac{p_k((\omega_k^-)^2 - q_k) - r_k s_k (\omega_k^-)^2}{r_k^2 (\omega_k^-)^2 - p_k^2} + 2j\pi \right), & k^0 < k \leq k_*, k, j \in \mathbf{N}, \sin(\omega_k^- \tau) \geq 0, \\ \frac{1}{\omega_k^-} \left(2\pi - \arccos \frac{p_k((\omega_k^-)^2 - q_k) - r_k s_k (\omega_k^-)^2}{r_k^2 (\omega_k^-)^2 - p_k^2} + 2j\pi \right), & k^0 < k \leq k_*, k, j \in \mathbf{N}, \sin(\omega_k^- \tau) < 0. \end{cases}$$

则在 $\tau = \tau_{k,j}^-$ 处方程(6)有一对纯虚根 $\pm i\omega_k^-$ 。如果 τ 作为参数,设 $\mu(\tau) = a(\tau) + i\omega(\tau)$ 是方程(6)在 $\tau = \tau_{k,j}^-$ 附近的根,且满足 $a(\tau_{k,j}^-) = 0$ 和 $\omega(\tau_{k,j}^-) = \omega_k^-$, $k \in \mathbf{N}$ 且 $k^0 < k \leq k_*$ 。通过类似于引理1的计算,得到

$$\left. \frac{d \text{Re}(\mu(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_{k,j}^-} < 0,$$

则

$$\tau_{k_2} < \min_{\substack{k,j \in \mathbf{N} \\ k \in [k^0, k_*]}} \tau_{k,j}^-。$$

这就意味着,无论 ω_k^- 是否存在, τ_{k_2} 总是第一个 Hopf 分岔值。

3 数值模拟

本章利用 MATLAB 软件进行数值模拟,进一步说明前面的理论分析结果。图1和图2是没有时滞 τ 的情况下,系统(3)的正平衡点 E^* 的稳定性变化,以 d 为参数。图3和图4有时滞 τ 的情况下,系统(3)的正平衡点 E^* 的稳定性变化,以时滞 τ 为参数。

第一种情况,当 $\tau=0$ 时,取 $a=2, b=4, d=3, \lambda=1, e_1=3, e_2=0, k=1$,根据式(10)经计算 $d < d_0$,由定理1得知,系统(3)的正平衡点 E^* 是不稳定的。从图1可以看到,曲线是不断振动的。当 $\tau=0$ 时,取 $a=3, b=1, d=3, \lambda=1, e_1=0, e_2=14, k=1$,根据式(10)经计算 $d > d_0$,由定理1得知,系统(3)的正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。从图2可以看到,曲线趋于稳定。图中的现象和定理1是相对应的。

第二种情况,假设 $\tau \neq 0$,取 $a=3, b=1, d=3, \lambda=1, e_1=0, e_2=14, k=1$,则 $\tau_{k_2} \approx 0.5353$ 。当 $\tau = 0.1 < \tau_{k_2}$

时,图 3 中的曲线趋于稳定。当 $\tau=0.55>\tau_{k_2}$ 时,图 4 中的曲线变得不稳定,振动越来越大。图中这些现象与定理 3 相对应。当 $\tau \in [0, \tau_{k_2})$ 时,系统 (3) 具有局部渐近稳定的正平衡点 E^* 。当超过临界值 τ_{k_2} 时,正平衡点 E^* 失去稳定性,变得不稳定。

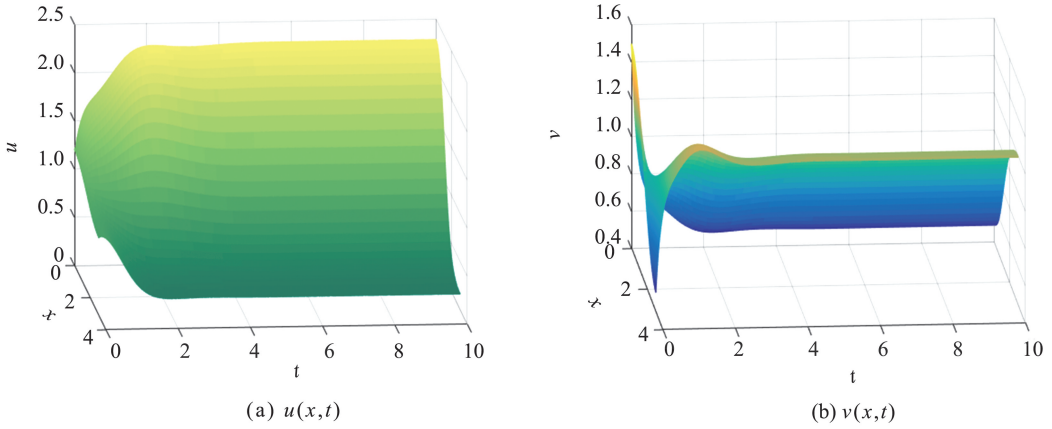


图 1 当 $a=2, b=4, d=3, \lambda=1, e_1=3, e_2=0, k=1, \tau=0$, 则系统 (3) 的正平衡点 E^* 是不稳定的 (初始条件 $(u_0, v_0) = (1+0.2 \cos x, 1+0.5 \cos x)$)

Fig.1 When $a=2, b=4, d=3, \lambda=1, e_1=3, e_2=0, k=1, \tau=0$, the system (3) is instability at the positive equilibrium point E^* (The initial value is $(u_0, v_0) = (1+0.2 \cos x, 1+0.5 \cos x)$)

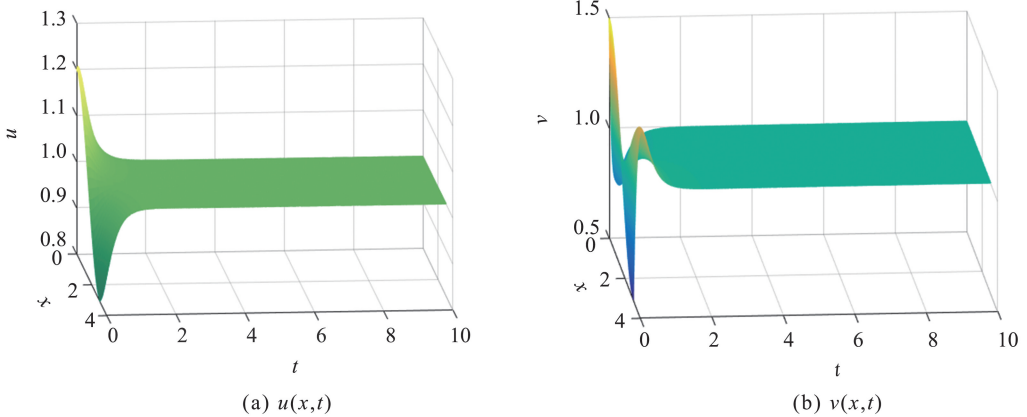


图 2 当 $a=2, b=1, d=3, \lambda=1, e_1=0, e_2=14, k=1, \tau=0$, 则系统 (3) 的正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的 (初始条件: $(u_0, v_0) = (1+0.2 \cos x, 1+0.5 \cos x)$)

Fig.2 When $a=2, b=1, d=3, \lambda=1, e_1=0, e_2=14, k=1, \tau=0$, the system (3) is locally asymptotically stable at the positive equilibrium point E^* (The initial value is $(u_0, v_0) = (1+0.2 \cos x, 1+0.5 \cos x)$)

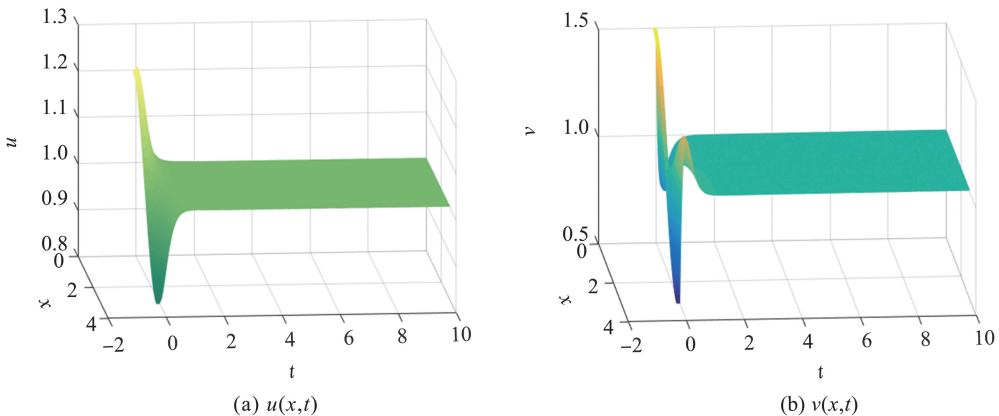


图 3 当 $a=2, b=1, d=3, \lambda=1, e_1=0, e_2=14, k=1, \tau=0.1 < \tau_{k_2}$, 则系统 (3) 的正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的 (初始条件: $(u_0, v_0) = (1+0.2 \cos x, 1+0.5 \cos x)$)

Fig.3 When $a=2, b=1, d=3, \lambda=1, e_1=0, e_2=14, k=1, \tau=0.1 < \tau_{k_2}$, the system (3) is locally asymptotically stable at the positive equilibrium point E^* (The initial value is $(u_0, v_0) = (1+0.2 \cos x, 1+0.5 \cos x)$)

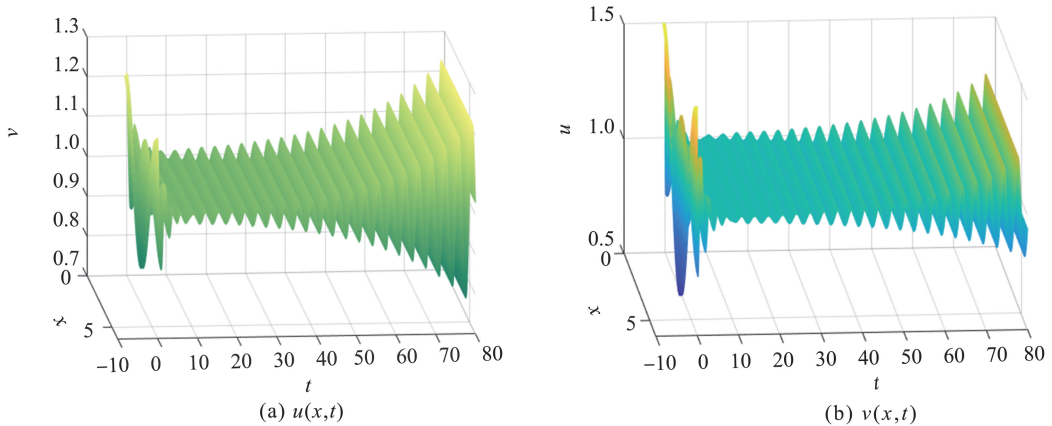


图4 当 $a=2, b=1, d=3, \lambda=1, e_1=0, e_2=14, k=1, \tau=0.55 < \tau_{k_2}$, 则系统(3)的正平衡点 E^* 是不稳定的, 并且分支出空间非齐次周期解(初始条件: $(u_0, v_0) = (1+0.2 \cos x, 1+0.5 \cos x)$)

Fig.4 When $a=2, b=1, d=3, \lambda=1, e_1=0, e_2=14, k=1, \tau=0.55 < \tau_{k_2}$, the system (3) is instability at the positive equilibrium point E^* , and there are the spatially inhomogeneous periodic solutions (The initial value is $(u_0, v_0) = (1+0.2 \cos x), 1+0.5 \cos x)$)

4 结论

本文建立一个具有时滞和交错扩散的 Brusselator 模型,研究了在没有时滞 τ 影响的情况下,正平衡点的稳定性,此时,没有 Hopf 分支的存在。当有时滞 τ 的影响下,当 $\tau = \tau_{k_2}$ 时,系统(3)在正平衡点 E^* 附近发生了 Hopf 分支。当 τ 穿过临界值 $\tau = \tau_{k_2}$ 时,分岔周期解是空间齐次的;当 τ 穿过临界值 $\tau = 0.55 > \tau_{k_2}$ 时,分叉周期解是空间非齐次的。最后,通过数值仿真检验了理论的正确性和方法的可行性。

参考文献:

- [1] PRIGOGENE I, LEFEVER R. Symmetry breaking instabilities in dissipative system [J]. The Journal of Chemical Physics, 1968, 48(4):1665-1700.
- [2] MURRAY J D. Mathematical biology I: an introduction [M]. 3rd ed. New York: Springer, 2002:175-217.
- [3] ERNEUX T, REISS E. Brusselator isolas [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1983, 43(6):1240-1246.
- [4] LI Y. Hopf bifurcations in general systems of Brusselator type [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2016, 28:32-47.
- [5] GHERGU M. Steady-state solutions for a general Brusselator system [J]. Operator Theory: Advances and Application, 2011, 216:153-166.
- [6] LI B, WANG M X. Diffusion-driven instability and Hopf bifurcation in Brusselator system [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2008, 29(6):825-832.
- [7] PENG R, WANG M X. Pattern formation in the Brusselator system [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 309:151-166.
- [8] 郭改慧,李兵方. 具有扩散的 Brusselator 系统的 Hopf 分支 [J]. 应用数学, 2011, 24(3):467-473.
GUO Gaihui, LI Bingfang. Hopf bifurcation in the Brusselator system with diffusion [J]. Mathematica Applicata, 2011, 24(3):467-473.
- [9] LV Y H, LIU Z H. Turing-Hopf bifurcation analysis and normal form of a diffusive Brusselator model with gene expression time delay [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2021, 152:111478.
- [10] OTT E, GREBOGI C, YORKE J A. Controlling Chaos [J]. Physical Review Letters, 1990, 64(11):1196.
- [11] ALFIFI H Y. Feedback control for a diffusive and delayed Brusselator model: semi-analytical solutions [J]. Symmetry, 2021, 13(4):725-738.
- [12] HU H, LI Q, LI S. Traveling and standing patterns induced by delay feedback in uniform oscillatory reaction-diffusion system [J]. Chemical Physics Letters, 2007, 447:364-367.