

捕食-食饵系统在离散斑块环境下强迫波的存在性

朱巧玲,史振霞*

(兰州交通大学数理学院,甘肃兰州730070)

摘要:针对在离散斑块环境下的三物种捕食-食饵系统,使用Schauder不动点定理并构造合适的上下解,得到了强迫波的存在性。

关键词:捕食-食饵系统;强迫波;存在性;Schauder不动点定理;上下解方法

中图分类号:O175.8 **文献标志码:**A

引用格式:朱巧玲,史振霞.捕食-食饵系统在离散斑块环境下强迫波的存在性[J].山东大学学报(理学版),2025,60(8):135-142.

Existence of forced waves for a predator-prey system in a discrete shifting habitat

ZHU Qiaoling, SHI Zhenxia*

(College of Mathematical and Physical, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: This paper studies a three-species predator-prey model in discrete patch environments, the existence of forced waves is obtained by using Schauder's fixed point theorem and constructing appropriate upper-lower solutions.

Key words: predator-prey system; forced wave; existence; Schauder fixed-point theorem; upper-lower solutions

0 引言

在过去的几十年里,气候变化对生物物种生存影响引起了人们的极大关注,全球变暖、工业化和过度开发导致的气候变化造成了生物物种栖息地的转移,严重威胁和破坏了生态环境和生物多样性^[1-4]。最近,数学生物学家建立并研究了气候变化及其对物种生态学影响的各种数学模型。对于单物种模型,反应扩散方程

$$u_t(x, t) = du_{xx}(x, t) + u(x, t)f(x-st, u(x, t))$$

可以描述物种的持续发展与气候变化之间的关系,其中 t 是时间, x 是空间变量, s 是气候变化速度, f 是依赖于气候变化的种群增长模型, d 是物种的扩散系数。

对于连续的人口增长,文献[5-6]研究了Fisher方程的强迫波的存在性,这里反应项 f 的一个典型例子为

$$f(x-st, u) = \alpha(x-st) - u',$$

其中 α 是一个单调有界函数, s 为波速, u' 为物种。对于两个相互作用的物种,大多数关于气候变化的研究都是在竞争和合作模型中进行的^[7-10]。Wang等^[11]通过迭代技术研究具有非局部扩散和栖息地变化的竞争模型

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + u[r_1(x-ct) - u - a_1 v], & t > 0, x \in \mathbf{R}, \\ v_t = d_2 v_{xx} + v[r_2(x-ct) - v - a_2 u], & t > 0, x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

收稿日期:2023-08-03;网络出版时间:2024-05-09 09:20:42

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11904275)

第一作者:朱巧玲(1998—),女,硕士研究生,研究方向为微分方程与动力学. E-mail:1363061605@qq.com

*通信作者:史振霞(1982—),女,副教授,博士,研究方向为微分方程与动力学. E-mail:shizhx08@mail.lzjtu.cn

强迫波的存在性。式中： u, v 分别表示两捕食者的种群，参数 d_1, d_2 分别为第一、二种群的扩散系数， r_1, r_2 分别表示第一、二种群的内在增长率， a_1, a_2 分别表示第一、二种群的捕食者转化率，给定的正常数 c 为气候变化速度。

由于缺乏比较原理，对具有气候变化效应的三种群以及三种群以上的捕食模型研究较难，Choi 等^[12] 利用 Schauder 不动点定理并结合上下解方法研究了在连续的移动环境条件下捕食-食饵系统

$$\begin{cases} u_t(x, t) = d_1 u_{xx}(x, t) + r_1 u(x, t) [\alpha(x-st) - (u+hv+aw)(x, t)], & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ v_t(x, t) = d_2 v_{xx}(x, t) + r_2 v(x, t) [\alpha(x-st) - (ku+v+aw)(x, t)], & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ w_t(x, t) = d_3 w_{xx}(x, t) + r_3 w(x, t) (-1+bu+bv-w)(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

强迫波的存在性。式中： w 表示食饵的种群，参数 d_3 表示第三种群的扩散系数， r_3 表示第三种群的内在增长率， h 为竞争率， k 为捕食率， a 为捕食者转化率， b 为食饵转化率。

随着计算机的出现，使得很多复杂的方程可以利用计算机来计算，由于计算机的计算是离散的，这促使我们去研究离散化后的系统。格动力系统通常指空间离散的反应扩散系统或偏微分方程的离散形式。自然界中，种群入侵、疾病传播、图像处理、晶体生长等众多不同领域的数学模型均可归结为格动力系统^[13-15]。Cheng 等^[16] 利用 Fredholm 迭代理论研究了在二维格上具有年龄结构的时滞人口模型双稳行波解。

受文献[12, 16]的启发，本研究系统(1)在离散斑块环境下，系统

$$\begin{cases} u_t(x, t) = d_1 [u(x+\cos \theta, t) + u(x-\cos \theta, t) + u(x+\sin \theta, t) + u(x-\sin \theta, t) - 4u(x, t)] \\ \quad + r_1 u(x, t) [\alpha(x-ct) - (u+hv+aw)(x, t)], & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ v_t(x, t) = d_2 [v(x+\cos \theta, t) + v(x-\cos \theta, t) + v(x+\sin \theta, t) + v(x-\sin \theta, t) - 4v(x, t)] \\ \quad + r_2 v(x, t) [\alpha(x-ct) - (ku+v+aw)(x, t)], & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ w_t(x, t) = d_3 [w(x+\cos \theta, t) + w(x-\cos \theta, t) + w(x+\sin \theta, t) + w(x-\sin \theta, t) - 4w(x, t)] \\ \quad + r_3 w(x, t) (-1+bu+bv-w)(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

强迫波的存在性。式中 $x = i \cos \theta + j \sin \theta$, $i, j \in \mathbf{Z}$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, α 是与气候变化相关的种群增长率。

假设函数 $\alpha(\cdot)$ 满足性质：

(A) $\alpha(\cdot)$ 是连续函数且关于 ξ 是非减的；

(B) $-\infty < \alpha(-\infty) < 0 < \alpha(\infty) < \infty$ 。

考虑在气候变化之前，环境对食饵是有利的，逐渐恶化，直到对物种产生不利，假设 $\alpha(\infty) = 1$ 。

1 预备知识

由于两个食饵竞争较弱，故 $h, k < 1$ 。对给定的 (h, k) ，参数 a 和 b 之间的关系为

$$0 < a < \min\left\{\frac{1-h}{2b}, \frac{1-k}{2b}\right\}. \quad (3)$$

令 $b > 1$ ，当至少有一个食饵存在时，捕食者可以在给定的系统中生存。

本文考虑系统(2)的强迫波的存在性，即系统(2)形如 $(u, v, w)(x, t) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)(\xi)$, $\xi := ct - x$ 的解，那么 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) 满足

$$\begin{cases} c\phi_1'(\xi) = d_1 [\phi_1(\xi+\cos \theta) + \phi_1(\xi-\cos \theta) + \phi_1(\xi+\sin \theta) + \phi_1(\xi-\sin \theta) - 4\phi_1(\xi)] \\ \quad + r_1 \phi_1(\xi) [\alpha(-\xi) - (\phi_1(\xi) + h\phi_2(\xi) + a\phi_3(\xi))], & \xi \in \mathbf{R}, \\ c\phi_2'(\xi) = d_2 [\phi_2(\xi+\cos \theta) + \phi_2(\xi-\cos \theta) + \phi_2(\xi+\sin \theta) + \phi_2(\xi-\sin \theta) - 4\phi_2(\xi)] \\ \quad + r_2 \phi_2(\xi) [\alpha(-\xi) - (k\phi_1(\xi) + \phi_2(\xi) + a\phi_3(\xi))], & \xi \in \mathbf{R}, \\ c\phi_3'(\xi) = d_3 [\phi_3(\xi+\cos \theta) + \phi_3(\xi-\cos \theta) + \phi_3(\xi+\sin \theta) + \phi_3(\xi-\sin \theta) - 4\phi_3(\xi)] \\ \quad + r_3 \phi_3(\xi) (-1+b\phi_1(\xi) + b\phi_2(\xi) - \phi_3(\xi)), & \xi \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (4)$$

通过对函数 $\alpha(\cdot)$ 的假设,可以预测所有物种在恶劣环境下最终都会灭绝,因此系统(4)满足边界条件 $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(+\infty) = (0, 0, 0)$ 。

当 $\xi \rightarrow -\infty$ 时,考虑边界条件 $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(-\infty)$:

$$E_1 = (1, 0, 0), \quad \hat{E}_1 = (0, 1, 0), \quad E_2 = \left(\frac{1-h}{1-hk}, \frac{1-k}{1-hk}, 0 \right),$$

$$E_3 = \left(\frac{1+a}{1+ab}, 0, \frac{b-1}{1+ab} \right), \quad \hat{E}_3 = \left(0, \frac{1+a}{1+ab}, \frac{b-1}{1+ab} \right),$$

$$E_4 = \left(\frac{(1+a)(1-h)}{1-hk+ab(2-h-k)}, \frac{(1+a)(1-k)}{1-hk+ab(2-h-k)}, \frac{b(2-h-k)-1+hk}{1-hk+ab(2-h-k)} \right)。$$

本文研究系统(4)满足边界条件 $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(+\infty) = (0, 0, 0)$ 和 $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(-\infty) = E_4$ 强迫波的存在性。

首先,给出系统(4)上下解的定义。

定义 1 如果 $\bar{\phi}_i \geq \phi_i, i=1, 2, 3$, 且对所有的 $\xi \in \mathbf{R} \setminus E$, 其中 E 是 \mathbf{R} 中的某个有限集, 满足下列不等式

$$c\bar{\phi}'_1(\xi) \geq d_1 [\bar{\phi}_1(\xi+\cos\theta) + \bar{\phi}_1(\xi-\cos\theta) + \bar{\phi}_1(\xi+\sin\theta) + \bar{\phi}_1(\xi-\sin\theta) - 4\bar{\phi}_1(\xi)] + r_1 \bar{\phi}_1(\xi) [\alpha(-\xi) - (\bar{\phi}_1(\xi) + h\underline{\phi}_2(\xi) + a\underline{\phi}_3(\xi))], \tag{5}$$

$$c\bar{\phi}'_2(\xi) \geq d_2 [\bar{\phi}_2(\xi+\cos\theta) + \bar{\phi}_2(\xi-\cos\theta) + \bar{\phi}_2(\xi+\sin\theta) + \bar{\phi}_2(\xi-\sin\theta) - 4\bar{\phi}_2(\xi)] + r_2 \bar{\phi}_2(\xi) [\alpha(-\xi) - (k\underline{\phi}_1(\xi) + \bar{\phi}_2(\xi) + a\underline{\phi}_3(\xi))], \tag{6}$$

$$c\bar{\phi}'_3(\xi) \geq d_3 [\bar{\phi}_3(\xi+\cos\theta) + \bar{\phi}_3(\xi-\cos\theta) + \bar{\phi}_3(\xi+\sin\theta) + \bar{\phi}_3(\xi-\sin\theta) - 4\bar{\phi}_3(\xi)] + r_3 \bar{\phi}_3(\xi) (-1 + b\bar{\phi}_1(\xi) + b\bar{\phi}_2(\xi) - \bar{\phi}_3(\xi)), \tag{7}$$

$$c\underline{\phi}'_1(\xi) \geq d_1 [\underline{\phi}_1(\xi+\cos\theta) + \underline{\phi}_1(\xi-\cos\theta) + \underline{\phi}_1(\xi+\sin\theta) + \underline{\phi}_1(\xi-\sin\theta) - 4\underline{\phi}_1(\xi)] + r_1 \underline{\phi}_1(\xi) [\alpha(-\xi) - (\underline{\phi}_1(\xi) + h\bar{\phi}_2(\xi) + a\bar{\phi}_3(\xi))], \tag{8}$$

$$c\underline{\phi}'_2(\xi) \geq d_2 [\underline{\phi}_2(\xi+\cos\theta) + \underline{\phi}_2(\xi-\cos\theta) + \underline{\phi}_2(\xi+\sin\theta) + \underline{\phi}_2(\xi-\sin\theta) - 4\underline{\phi}_2(\xi)] + r_2 \underline{\phi}_2(\xi) [\alpha(-\xi) - (k\underline{\phi}_1(\xi) + \bar{\phi}_2(\xi) + a\bar{\phi}_3(\xi))], \tag{9}$$

$$c\underline{\phi}'_3(\xi) \geq d_3 [\underline{\phi}_3(\xi+\cos\theta) + \underline{\phi}_3(\xi-\cos\theta) + \underline{\phi}_3(\xi+\sin\theta) + \underline{\phi}_3(\xi-\sin\theta) - 4\underline{\phi}_3(\xi)] + r_3 \underline{\phi}_3(\xi) (-1 + b\underline{\phi}_1(\xi) + b\underline{\phi}_2(\xi) - \underline{\phi}_3(\xi)), \tag{10}$$

那么称连续函数 $(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3)$ 和 $(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \underline{\phi}_3)$ 为系统(4)的一对上下解。

引理 1 令 $c > 0$, 设 $(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3)$ 和 $(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \underline{\phi}_3)$ 是系统(4)的一对上下解, 对 $i=1, 2, 3$, 满足

$$\bar{\phi}'_i(\xi-) \geq \bar{\phi}'_i(\xi+) \text{ 及 } \underline{\phi}'_i(\xi-) \leq \underline{\phi}'_i(\xi+), \quad \xi \in E, \tag{11}$$

那么系统(4)存在一个解 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) , 使得

$$\phi_i(\xi) \leq \underline{\phi}_i(\xi) \leq \bar{\phi}_i(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad i=1, 2, 3。$$

利用 Schauder 不动点定理可证明引理 1, 与文献[17]中的定理 2.1 类似, 证明略。

2 捕食-食饵系统在离散斑块环境下强迫波的存在性

由文献[6]中的定理 1.1 可知, 对 $\xi \mapsto -\xi$, 存在非增函数 $\underline{\phi}_1$ 和 $\underline{\phi}_2$, 使得

$$c\underline{\phi}'_1(\xi) = d_1 [\underline{\phi}_1(\xi+\cos\theta) + \underline{\phi}_1(\xi-\cos\theta) + \underline{\phi}_1(\xi+\sin\theta) + \underline{\phi}_1(\xi-\sin\theta) - 4\underline{\phi}_1(\xi)] + r_1 \underline{\phi}_1(\xi) [\alpha(-\xi) - h - a(2b-1) - \underline{\phi}_1(\xi)], \quad \xi \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

$$c\underline{\phi}'_2(\xi) = d_2 [\underline{\phi}_2(\xi+\cos\theta) + \underline{\phi}_2(\xi-\cos\theta) + \underline{\phi}_2(\xi+\sin\theta) + \underline{\phi}_2(\xi-\sin\theta) - 4\underline{\phi}_2(\xi)] + r_2 \underline{\phi}_2(\xi) [\alpha(-\xi) - k - a(2b-1) - \bar{\phi}_2(\xi)], \quad \xi \in \mathbf{R} \tag{13}$$

成立且满足条件

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \underline{\phi}_1(\xi) = 1 - h - a(2b-1) > 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \underline{\phi}_1(\xi) = 0,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \underline{\phi}_2(\xi) = 1 - k - a(2b-1) > 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \underline{\phi}_2(\xi) = 0。$$

此外,由文献[6]中的定理 1.1 可得,存在一个非递增函数 $\underline{\phi}_3$, 满足

$$\begin{aligned}
c\underline{\phi}'_3(\xi) &= d_3[\underline{\phi}_3(\xi+\cos\theta)+\underline{\phi}_3(\xi-\cos\theta)+\underline{\phi}_3(\xi+\sin\theta)+\underline{\phi}_3(\xi-\sin\theta)-4\underline{\phi}_3(\xi)] \\
&\quad +r_3\underline{\phi}_3(\xi)(-1+b\underline{\phi}_1(\xi)+b\underline{\phi}_2(\xi)-\underline{\phi}_3(\xi)), \quad \xi \in \mathbf{R}, \\
\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \underline{\phi}_3(\xi) &= -1+b[2-h-k-2a(2b-1)]>0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \underline{\phi}_3(\xi) = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

引理 2 假设式(3)成立,则系统(4)存在一个解 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) , 使得对 $\xi \in \mathbf{R}$, 有 $\underline{\phi}_1 \leq \phi_1 \leq 1$, $\underline{\phi}_2 \leq \phi_2 \leq 1$ 及 $\underline{\phi}_3 \leq \phi_3 \leq 2b-1$.

证明 设 $(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3) = (1, 1, 2b-1)$, 对所有的 $\xi \in \mathbf{R}$, 由式(8)—(10)和式(12)—(14), 得 $(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3) = (1, 1, 2b-1)$ 成立. 下证 $(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3)$ 和 $(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \underline{\phi}_3)$ 满足式(5)—(7). 由于对 $\xi \in \mathbf{R}$, 有 $\alpha(-\xi) \leq 1$, 且

$$\begin{aligned}
&d_1[\bar{\phi}_1(\xi+\cos\theta)+\bar{\phi}_1(\xi-\cos\theta)+\bar{\phi}_1(\xi+\sin\theta)+\bar{\phi}_1(\xi-\sin\theta)-4\bar{\phi}_1(\xi)] \\
&\quad +r_1\bar{\phi}_1(\xi)[\alpha(-\xi)-(\bar{\phi}_1(\xi)+h\underline{\phi}_2(\xi)+a\underline{\phi}_3(\xi))] \\
&\leq r_1[\alpha(-\xi)-1] \leq 0 = c\bar{\phi}'_1(\xi), \\
&d_2[\bar{\phi}_2(\xi+\cos\theta)+\bar{\phi}_2(\xi-\cos\theta)+\bar{\phi}_2(\xi+\sin\theta)+\bar{\phi}_2(\xi-\sin\theta)-4\bar{\phi}_2(\xi)] \\
&\quad +r_2\bar{\phi}_2(\xi)[\alpha(-\xi)-(k\underline{\phi}_1(\xi)+\bar{\phi}_2(\xi)+a\underline{\phi}_3(\xi))] \\
&\leq r_2[\alpha(-\xi)-1] \leq 0 = c\bar{\phi}'_2(\xi)
\end{aligned}$$

成立,故对所有的 $\xi \in \mathbf{R}$, 式(5)、(6)成立. 容易得出

$$\begin{aligned}
&d_3[\bar{\phi}_3(\xi+\cos\theta)+\bar{\phi}_3(\xi-\cos\theta)+\bar{\phi}_3(\xi+\sin\theta)+\bar{\phi}_3(\xi-\sin\theta)-4\bar{\phi}_3(\xi)] + r_3\bar{\phi}_3(\xi)(-1+b\bar{\phi}_1(\xi)+b\bar{\phi}_2(\xi)-\bar{\phi}_3(\xi)) \\
&\leq r_3(2b-1)(-1+2b-(2b-1)) = 0 = c\bar{\phi}'_3(\xi).
\end{aligned}$$

因为 $\bar{\phi}_i \geq \underline{\phi}_i (i=1, 2, 3)$ 及 $(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3)$ 和 $(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \underline{\phi}_3)$ 是一对上下解, 所以引理 1 中的式(11)成立. 证毕.

引理 3 如果 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) 是系统(4)的任意非负解, 那么 $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(\infty) = (0, 0, 0)$ 成立.

证明 假设 $\phi_1^+ = \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \phi_1(\xi) > 0$ 成立. 当 ϕ_1 在 $\xi \rightarrow +\infty$ 附近扰动时, 存在 ϕ_1 的极大值序列 $\{\xi_n\}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\xi_n \rightarrow \infty$ 及 $\phi_1(\xi_n) \rightarrow \phi_1^+$ 成立. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由 $\alpha(-\infty) < 0$ 及系统(4), 可得

$$d_1[\phi_1(\xi_n+\cos\theta)+\phi_1(\xi_n-\cos\theta)+\phi_1(\xi_n+\sin\theta)+\phi_1(\xi_n-\sin\theta)-4\phi_1(\xi_n)] \rightarrow 0$$

成立,故

$$\begin{aligned}
0 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \{d_1[\phi_1(\xi_n+\cos\theta)+\phi_1(\xi_n-\cos\theta)+\phi_1(\xi_n+\sin\theta)+\phi_1(\xi_n-\sin\theta)-4\phi_1(\xi_n)] \\
&\quad +r_1\phi_1(\xi_n)[\alpha(-\xi_n)-(\phi_1(\xi_n)+h\underline{\phi}_2(\xi_n)+a\underline{\phi}_3(\xi_n))]\} \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} d_1[\phi_1(\xi_n+\cos\theta)+\phi_1(\xi_n-\cos\theta)+\phi_1(\xi_n+\sin\theta)+\phi_1(\xi_n-\sin\theta)-4\phi_1(\xi_n)] \\
&\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} r_1\phi_1(\xi_n)[\alpha(-\xi_n)-(\phi_1(\xi_n)+h\underline{\phi}_2(\xi_n)+a\underline{\phi}_3(\xi_n))] \\
&\leq r_1\phi_1^+[\alpha(-\infty)-\phi_1^+-h \liminf_{n \rightarrow \infty} \underline{\phi}_2(\xi_n)-a \liminf_{n \rightarrow \infty} \underline{\phi}_3(\xi_n)] \\
&< 0,
\end{aligned}$$

显然矛盾.

另一方面, 假设在 $\xi = +\infty$ 处, ϕ_1 单调, 则当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, $\phi_1(\xi) \rightarrow \phi_1^+$. 此外, 存在序列 $\{\xi_n\}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\xi_n \rightarrow \infty$, 有 $\phi_1'(\xi_n) \rightarrow 0$. 将系统(4)从 0 到 ξ_n 积分, 得

$$\begin{aligned}
&c(\phi_1(\xi_n)-\phi_1(0))-d_1 \int_0^{\xi_n} [\phi_1(y+\cos\theta)+\phi_1(y-\cos\theta)+\phi_1(y+\sin\theta)+\phi_1(y-\sin\theta)-4\phi_1(y)] dy \\
&= r_1 \int_0^{\xi_n} \phi_1(y)[\alpha(-y)-(\phi_1(y)+h\underline{\phi}_2(y)+a\underline{\phi}_3(y))] dy.
\end{aligned} \tag{15}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\xi_n \rightarrow \infty$, 而 $\phi_1'(\xi_n) := \phi_1(\xi_n+\cos\theta)+\phi_1(\xi_n-\cos\theta)+\phi_1(\xi_n+\sin\theta)+\phi_1(\xi_n-\sin\theta)-4\phi_1(\xi_n)$, 故

$$\int_0^{\xi_n} [\phi_1(y+\cos\theta)+\phi_1(y-\cos\theta)+\phi_1(y+\sin\theta)+\phi_1(y-\sin\theta)-4\phi_1(y)] dy = \phi_1'(\xi_n) - \phi_1'(0) \rightarrow 0,$$

因此当 $n \rightarrow \infty$ 时, 式(15)的左边一致有界.

通过令 $K \gg 1$, 使得 $\phi_1(y) \geq \frac{\phi_1^+}{2}$ 且对所有的 $y \geq K$, 有 $\alpha(-y) \leq 0$, 可得

$$\phi_1(y) [\alpha(-y) - (\phi_1(y) + h\phi_2(y) + a\phi_3(y))] \leq -\phi_1^2(y) \leq -\frac{(\phi_1^+)^2}{4} < 0, \quad \forall y \geq K.$$

因此, 积分

$$r_1 \int_0^\infty \phi_1(y) [\alpha(-y) - (\phi_1(y) + h\phi_2(y) + a\phi_3(y))] dy$$

发散。而式 (15) 的左边一致有界, 与式 (15) 右边发散相矛盾, 故 $\phi_1(\infty) = 0$, 同理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_2(\xi) = 0$ 。

接下来, 假设 $\phi_3^+ = \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \phi_3(\xi) > 0$ 。当 ϕ_3 在 $\xi = +\infty$ 附近扰动时, 存在 ϕ_3 的极大值序列 $\{\xi_n\}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\xi_n \rightarrow \infty$, 有 $\phi_3(\xi_n) \rightarrow \phi_3^+$ 。由系统 (4) 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ d_3 [\phi_3(\xi_n + \cos \theta) + \phi_3(\xi_n - \cos \theta) + \phi_3(\xi_n + \sin \theta) + \phi_3(\xi_n - \sin \theta) - 4\phi_3(\xi_n)] \\ &\quad + r_3 \phi_3(\xi_n) (-1 + b\phi_1(\xi_n) + b\phi_2(\xi_n) - \phi_3(\xi_n)) \} \\ &\leq r_3 \phi_3^+ (-1 - \phi_3^+) < 0, \end{aligned}$$

显然矛盾, 故在 $\xi = +\infty$ 处, ϕ_3 单调, 同理可得 $\phi_3(\infty) = 0$, 因此对系统 (4) 的任意非负解 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) , 有

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(\infty) = (0, 0, 0) \tag{16}$$

成立。引理 3 证毕。

对系统 (4) 的解 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) , 令

$$\phi_i^+ := \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \phi_i(\xi), \quad \phi_i^- := \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \phi_i(\xi), \quad i = 1, 2, 3,$$

因为 $\phi_i \geq \underline{\phi}_i$, 所以

$$\underline{\phi}_i \geq \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{17}$$

这里

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= 1 - h - a(2b - 1), \quad \gamma_2 := 1 - k - a(2b - 1), \\ \gamma_3 &:= -1 + b\gamma_1 + b\gamma_2 = -1 + b[2 - h - k - 2a(2b - 1)] \end{aligned}$$

均为正。

引理 4 假设式 (3) 成立, 令 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) 是系统 (4) 的解, 由引理 2, 得

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(-\infty) = E_4 =: (u^*, v^*, w^*).$$

证明 定义函数

$$\begin{aligned} m_1(\theta) &:= \theta u^* + (1 - \theta)(\gamma_1 - \varepsilon), \quad M_1(\theta) := \theta u^* + (1 - \theta)(1 + \varepsilon), \quad \theta \in [0, 1], \\ m_2(\theta) &:= \theta v^* + (1 - \theta)(\gamma_2 - \varepsilon), \quad M_2(\theta) := \theta v^* + (1 - \theta)(1 + \varepsilon), \quad \theta \in [0, 1], \\ m_3(\theta) &:= \theta w^* + (1 - \theta)(\gamma_3 - \tau_1 \varepsilon), \quad M_3(\theta) := \theta w^* + (1 - \theta)(2b - 1 + \tau_2 \varepsilon), \quad \theta \in [0, 1], \end{aligned}$$

其中

$$\tau_1 := \max \left\{ 3b, \frac{2(1-h)}{a}, \frac{2(1-k)}{a} \right\}, \quad \tau_2 := \left(2b + \min \left\{ \frac{1-h}{a}, \frac{1-k}{a} \right\} \right) / 2,$$

且 ε 满足

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ \gamma_1, \gamma_2, \frac{\gamma_3}{\tau_1}, \frac{h\gamma_2 + a\gamma_3}{a\tau_1 - 1 + h}, \frac{k\gamma_1 + a\gamma_3}{a\tau_1 - 1 + k} \right\}. \tag{18}$$

根据式 (3), 有

$$\tau_2 \in \left(2b, \min \left\{ \frac{1-h}{a}, \frac{1-k}{a} \right\} \right). \tag{19}$$

显然, 对 $\theta = 0$, 由式 (17), 可得

$$m_i(\theta) < \phi_i^- \leq \phi_i^+ < M_i(\theta), \quad i = 1, 2, 3 \tag{20}$$

成立, 因此定义

$$\theta_0 := \sup \{ \theta \in [0, 1] : \text{式 (20) 成立}, \quad i = 1, 2, 3 \}.$$

注意到 $u^* < 1, v^* < 1$ 且 $w^* < 2b-1$ 。因为 (u^*, v^*, w^*) 满足

$$u^* = 1-hv^* -aw^*, \quad v^* = 1-ku^* -aw^*, \quad w^* = -1+b(u^* +v^*),$$

所以

$$u^* > 1-h-a(2b-1) = \gamma_1, \quad v^* > 1-k-a(2b-1) = \gamma_2, \quad w^* > -1+b(\gamma_1 + \gamma_2) = \gamma_3$$

成立,则函数 $m_i(\theta)$ 或 $M_i(\theta)$ ($i=1,2,3$) 在 $\theta \in [0,1]$ 上递增。而 $m_1(1) = M_1(1) = u^*, m_2(1) = M_2(1) = v^*$ 以及 $m_3(1) = M_3(1) = w^*$,故只须证明 $\theta_0 = 1$ 。

假设 $\theta_0 < 1$ 。由 $\phi_i^-, \phi_i^+, m_i(\theta)$ 定义,可得

$$m_i(\theta_0) \leq \phi_i^- \leq \phi_i^+ \leq M_i(\theta_0), \quad i=1,2,3.$$

当 $\theta = \theta_0$ 时,根据 θ_0 的定义以及 $m_i(\theta)$ ($i=1,2,3$) 的连续性,得式 (20) 不成立。这意味着等式

$$\phi_i^+ = M_i(\theta_0), \quad \phi_i^- = m_i(\theta_0), \quad i=1,2,3 \tag{21}$$

至少有一个成立。

首先,假设 $\phi_1^- = m_1(\theta_0)$ 。如果 ϕ_1 单调,那么 $\phi_1(-\infty)$ 存在,且 $\liminf_{\xi \rightarrow -\infty} \phi_1'(\xi) = 0$ 或 $\limsup_{\xi \rightarrow -\infty} \phi_1'(\xi) = 0$,则存在序列 $\{\xi_n\}$,使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\xi_n \rightarrow -\infty$,有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_1'(\xi_n) = 0$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_1(\xi_n) = m_1(\theta_0)$ 。根据式 (19) 和 τ_2 的定义,由

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \phi_2(\xi_n) \leq M_2(\theta_0), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \phi_3(\xi_n) \leq M_3(\theta_0)$$

以及

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} [\phi_1(\xi_n + \cos \theta) + \phi_1(\xi_n - \cos \theta) + \phi_1(\xi_n + \sin \theta) + \phi_1(\xi_n - \sin \theta) - 4\phi_1(\xi_n)] = 0,$$

可得

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} [\alpha(-\xi_n) - (\phi_1(\xi_n) + h\phi_2(\xi_n) + a\phi_3(\xi_n))] \\ & \geq 1 - [\theta_0 u^* + (1-\theta_0)(\gamma_1 - \varepsilon)] - h[\theta_0 v^* + (1-\theta_0)(1 + \varepsilon)] - a[\theta_0 w^* + (1-\theta_0)(2b-1 + \tau_2 \varepsilon)] \\ & = \varepsilon(1-h-a\tau_2)(1-\theta_0) > 0 \end{aligned}$$

成立。将系统 (4) 从 0 到 ξ_n 积分,可得

$$\begin{aligned} & d_1 \int_0^{\xi_n} [\phi_1(\xi + \cos \theta) + \phi_1(\xi - \cos \theta) + \phi_1(\xi + \sin \theta) + \phi_1(\xi - \sin \theta) - 4\phi_1(\xi)] d\xi - c(\phi_1(\xi_n) - \phi_1(0)) \\ & = -r_1 \int_0^{\xi_n} \phi_1(\xi) [\alpha(-\xi) - (\phi_1(\xi) + h\phi_2(\xi) + a\phi_3(\xi))] d\xi. \end{aligned}$$

由于当 $n \rightarrow \infty$ 时,右边趋于 $+\infty$,而左边是有界的,故矛盾。

接下来,假设 ϕ_1 在 $-\infty$ 处扰动,则存在 ϕ_1 的一个局部极小值点序列 $\{\xi_n\}$,使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\xi_n \rightarrow -\infty$,有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_1(\xi_n) = m_1(\theta_0)$ 。又由 ξ_n 是 ϕ_1 的极小点,对所有的 n ,有 $\phi_1'(\xi_n) = 0$ 且

$$\phi_1''(\xi_n) := \phi_1(\xi_n + \cos \theta) + \phi_1(\xi_n - \cos \theta) + \phi_1(\xi_n + \sin \theta) + \phi_1(\xi_n - \sin \theta) - 4\phi_1(\xi_n) \geq 0.$$

同理,由系统 (4) 可得

$$\begin{aligned} 0 & = \liminf_{n \rightarrow \infty} c\phi_1'(\xi_n) \\ & = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{d_1 [\phi_1(\xi_n + \cos \theta) + \phi_1(\xi_n - \cos \theta) + \phi_1(\xi_n + \sin \theta) + \phi_1(\xi_n - \sin \theta) - 4\phi_1(\xi_n)] \\ & \quad + r_1 \phi_1(\xi_n) [\alpha(-\xi_n) - (\phi_1(\xi_n) + h\phi_2(\xi_n) + a\phi_3(\xi_n))] \} \\ & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \{r_1 \phi_1(\xi_n) [\alpha(-\xi_n) - (\phi_1(\xi_n) + h\phi_2(\xi_n) + a\phi_3(\xi_n))] \} \\ & > 0, \end{aligned}$$

上式显然矛盾,因此 $\phi_1^- = m_1(\theta_0)$ 不可能成立。类似地可证 $\phi_i^+ = M_i(\theta_0)$ ($i=1,2,3$), $\phi_i^- = m_i(\theta_0)$ ($i=2,3$),证明过程如下:

(1) 对 $\phi_1^+ = M_1(\theta_0)$,由式 (18),可得

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} [\alpha(-\xi_n) - (\phi_1(\xi_n) + h\phi_2(\xi_n) + a\phi_3(\xi_n))] \\ & \leq 1 - [\theta_0 u^* + (1-\theta_0)(1 + \varepsilon)] - h[\theta_0 v^* + (1-\theta_0)(\gamma_2 - \varepsilon)] \\ & \quad - a[\theta_0 w^* + (1-\theta_0)(\gamma_3 - \tau_1 \varepsilon)] \\ & = (1-\theta_0) [(a\tau_1 - 1 + h)\varepsilon - (h\gamma_2 + a\gamma_3)] < 0; \end{aligned}$$

(2) 对 $\phi_2^- = m_2(\theta_0)$, 由式(19), 可得

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} [\alpha(-\xi_n) - \phi_2(\xi_n) - k\phi_1(\xi_n) - a\phi_3(\xi_n)] \\ & \geq 1 - [\theta_0 v^* + (1 - \theta_0)(\gamma_2 - \varepsilon)] - k[\theta_0 u^* + (1 - \theta_0)(1 + \varepsilon)] \\ & \quad - a[\theta_0 w^* + (1 - \theta_0)(2b - 1 + \tau_2 \varepsilon)] \\ & = \varepsilon(1 - k - a\tau_2)(1 - \theta_0) > 0; \end{aligned}$$

(3) 对 $\phi_2^+ = M_2(\theta_0)$, 由式(18), 可得

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} [\alpha(-\xi_n) - \phi_2(\xi_n) - k\phi_1(\xi_n) - a\phi_3(\xi_n)] \\ & \leq 1 - [\theta_0 v^* + (1 - \theta_0)(1 + \varepsilon)] - k[\theta_0 u^* + (1 - \theta_0)(\gamma_1 - \varepsilon)] \\ & \quad - a[\theta_0 w^* + (1 - \theta_0)(\gamma_3 - \tau_1 \varepsilon)] \\ & = (1 - \theta_0) [(a\tau_1 - 1 + k)\varepsilon - (k\gamma_1 + a\gamma_3)] < 0; \end{aligned}$$

(4) 对 $\phi_3^- = m_3(\theta_0)$, 由 $\tau_1 \geq 3b$, 可得

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} (-1 + b\phi_1(\xi_n) + b\phi_2(\xi_n) - \phi_3(\xi_n)) \\ & \geq -1 + b[\theta_0 u^* + (1 - \theta_0)(\gamma_1 - \varepsilon)] + b[\theta_0 v^* + (1 - \theta_0)(\gamma_2 - \varepsilon)] \\ & \quad - [\theta_0 w^* + (1 - \theta_0)(\gamma_3 - \tau_1 \varepsilon)] \\ & = \varepsilon(\tau_1 - 2b)(1 - \theta_0) > 0; \end{aligned}$$

(5) 对 $\phi_3^+ = M_3(\theta_0)$, 由式(19), 可得

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} (-1 + b\phi_1(\xi_n) + b\phi_2(\xi_n) - \phi_3(\xi_n)) \\ & \leq -1 + b[\theta_0 u^* + (1 - \theta_0)(1 + \varepsilon)] + b[\theta_0 v^* + (1 - \theta_0)(1 + \varepsilon)] \\ & \quad - [\theta_0 w^* + (1 - \theta_0)(2b - 1 + \tau_2 \varepsilon)] \\ & = \varepsilon(2b - \tau_2)(1 - \theta_0) < 0。 \end{aligned}$$

由此可得式(21)不成立。证毕。

由引理 1—4 可证得定理 1。

定理 1 假设 $b > 1$ 和式(2)成立, 若

$$a < \frac{-1 + b(2 - h - k)}{2b(2b - 1)}, \quad b > \frac{1}{2 - h - k},$$

那么对任意的 $c > 0$, 系统(3)存在一个正解, 使得

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(-\infty) = E_4, \quad (\phi_1, \phi_2, \phi_3)(+\infty) = (0, 0, 0)。$$

3 结论

本文研究了一类三物种捕食-食饵系统(2)在离散斑块环境下满足边界条件 $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(+\infty) = (0, 0, 0)$ 和 $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)(-\infty) = E_4$ 强迫波的存在性。利用 Schauder 不动点定理并结合上下解方法, 证得强迫波的存在性, 结果表明当环境对食饵有利时, 食饵和捕食者三物种在生态环境中呈现正共存状态。

参考文献:

[1] ALFARO M, BERESTYCKI H, RAOUL G. The effect of climate shift on a species submitted to dispersion, evolution, growth and nonlocal competition[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2017, 49(1):562-596.

[2] BERESTYCKI H, DIEKMANN O, NAGELKERKE C J, et al. Can a species keep pace with a shifting climate? [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2009, 71(2):399-429.

[3] BERESTYCKI H, FANG J. Forced waves of the Fisher-KPP equation in a shifting environment[J]. Journal of Differential Equations, 2018, 264(3):2157-2183.

[4] ROSSI L, BERESTYCKI H. Reaction-diffusion equations for population dynamics with forced speed II-cylindrical-type

- domains[J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 2009, 25(1):19-61.
- [5] FANG Jian, LOU Yijun, WU Jianhong. Can pathogen spread keep pace with its host invasion? [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2016, 76(4):1633-1657.
- [6] HU Haijun, Zou Xingfu. Existence of an extinction wave in the Fisher equation with a shifting habitat[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2017, 145(11):4763-4771.
- [7] YANG Yong, WU Chufen, LI Zunxian. Forced waves and their asymptotics in a Lotka-Volterra cooperative model under climate change[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 353:254-264.
- [8] DONG Fangdi, LI Bingtuan, LI Wantong. Forced waves in a Lotka-Volterra competition-diffusion model with a shifting habitat[J]. *Journal of Differential Equations*, 2021, 276:433-459.
- [9] 张道祥,孙光讯,徐明丽,等. 带有时滞和非线性收获效应的捕食者-食饵系统的空间动力学[J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2018, 56(3):515-522.
ZHANG Daoxiang, SUN Guangxun, XU Mingli, et al. Spatial dynamics in predator-prey system with time delay and nonlinear harvesting effect[J]. *Journal of Jilin University(Science Edition)*, 2018, 56(3):515-522.
- [10] ZHNG Zewei, WANG Wendi, YANG Jiangtao. Persistence versus extinction for two competing species under a climate change[J]. *Nonlinear Analysis(Modelling and Control)*, 2017, 22(3):285-302.
- [11] WANG Jiabin, WU Chufen. Forced waves and gap formations for a Lotka-Volterra competition model with nonlocal dispersal and shifting habitats[J]. *Nonlinear Analysis(Real World Applications)*, 2021, 58:103208.
- [12] CHOI W, GUO J S. Forced waves of a three species predator-prey system in a shifting environment[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2022, 514(1):126283.
- [13] PANG Liyan, WU Shilian. Propagation dynamics for lattice differential equations in a time-periodic shifting habitat[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2021, 72(3):93.
- [14] 赵海琴. 二维格上时滞微分方程的行波解[J]. *咸阳师范学院学报*, 2010, 25(4):10-12.
ZHAO Haiqin. Traveling wave solutions in a 2-D lattice delayed differential equation without quasi-monotonicity[J]. *Journal of Xianyang Normal University*, 2010, 25(4):10-12.
- [15] SHI Zhenxia, LI Wantong, CHENG Cuiping. Stability and uniqueness of traveling wavefronts in a two-dimensional lattice differential equation with delay[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 208(2):484-494.
- [16] CHENG Cuiping, LI Wantong, WANG Zhicheng. Persistence of bistable waves in a delayed population model with stage structure on a two-dimensional spatial lattice[J]. *Nonlinear Analysis (Real World Applications)*, 2012, 13(4):1873-1890.
- [17] MA Shiwang. Traveling wavefronts for delayed reaction-diffusion systems via a fixed point theorem[J]. *Journal of Differential Equations*, 2001, 171(2):294-314.

(编辑:陈丽萍)