

三圈图的 Mostar 指标的下界

王辉,刘蒙蒙*

(兰州交通大学数理学院,甘肃兰州730070)

摘要:连通图 G 的 Mostar 指标 $M(G)$ 的定义为 $M(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} |n_u(e) - n_v(e)|$, 其中 $n_u(e)$ 表示图 G 中到点 u 的距离比到点 v 的距离近的顶点的数目, $n_v(e)$ 表示图 G 中到点 v 的距离比到点 u 的距离近的顶点的数目。得到了连通三圈图的 Mostar 指标的下界, 刻画了相应的极值图。

关键词: Mostar 指标; 三圈图; 极值图

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A

引用格式: 王辉, 刘蒙蒙. 三圈图的 Mostar 指标的下界[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(8): 68-77, 105.

Lower bound of Mostar index with respect to tricyclic graphs

WANG Hui, LIU Mengmeng*

(School of Mathematics and Science, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The Mostar index $M(G)$ of a connected graph G is defined as $M(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} |n_u(e) - n_v(e)|$, where $n_u(e)$ and $n_v(e)$ are, respectively, the number of vertices of G lying closer to vertex u than to vertex v and the number of vertices of G lying closer to vertex v than to vertex u . The lower bound of the Mostar index among all tricyclic graphs is established, and the extremal graphs that attained the lower bound are determined.

Key words: Mostar index; tricyclic graph; extremal graph

0 引言

本文中所考虑的图都是简单、有限的无向图。文中术语和符号请参考文献[1]。对于简单连通图 G , 定义图 G 的边集为 $E(G)$, 顶点集为 $V(G)$ 。对顶点 $u \in V(G)$, $d_G(u)$ (可简称为 $d(u)$) 表示图 G 中顶点 u 的度, 即图 G 中与顶点 u 关联的边的数目。当 $d(u) = 1$ 时, 称点 u 为悬挂点, 并将与点 u 关联的边称为悬挂边。对于顶点 $u, v \in V(G)$, $d(u, v)$ 表示顶点 u 和顶点 v 之间的距离, 即连接 u, v 的最短路径的长度。

对于边 $e = uv \in E(G)$, 根据图 G 中顶点间距离的定义, 可定义以下集合:

$$N_u(e) = \{w \in V(G) : d(u, w) < d(v, w)\},$$

$$N_v(e) = \{w \in V(G) : d(v, w) < d(u, w)\},$$

$$N_0(e) = \{w \in V(G) : d(u, w) = d(v, w)\}.$$

显然, 集合 $\{N_u(e), N_v(e), N_0(e)\}$ 是对图 G 中顶点的划分。令 $n_u(e)$, $n_v(e)$ 和 $n_0(e)$ 分别表示集合 $N_u(e)$, $N_v(e)$ 和 $N_0(e)$ 中的顶点数目。如果图 G 有 n 个顶点, 则 $n_u(e) + n_v(e) + n_0(e) = n$ 。

在众多拓扑指标中, 有一类指标是通过单个边的贡献求和来获得整个图的相关性质。此类指标被称

为键加型指标。

Došlić 等^[2]提出了一个新的键加型指标,并将其命名为 Mostar 指标。对于连通图 G ,其 Mostar 指标的定义为

$$M(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} |n_u(e) - n_v(e)|,$$

其中 $n_u(e)$ 表示图 G 中到点 u 的距离比到点 v 的距离近的顶点的数目, $n_v(e)$ 表示图 G 中到点 v 的距离比到点 u 的距离近的顶点的数目。文献[2]首先提出 Mostar 指标,并研究了树图和单圈图的极值。文献[3]研究了限定条件下树图的极值,文献[4]研究了仙人掌图的极值,文献[5]研究了双圈图的极值,文献[6]介绍了 Mostar 指标在分子图中的应用,其余关于 Mostar 指标的结果可参考文献[7-10]。

本文在三圈图的修正 Szeged 指标极值问题的基础上,得到了连通三圈图的 Mostar 指标的下界,并对达到相应极值的三圈图进行了刻画。

定理 1 令 G_n 是一个 $n \geq 41$ 的连通三圈图。则

$$M(G_n) \geq \begin{cases} 8, & n \text{ 为偶数,} \\ 10, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

等号成立当且仅当 $G \cong F_n$ (图 1)。

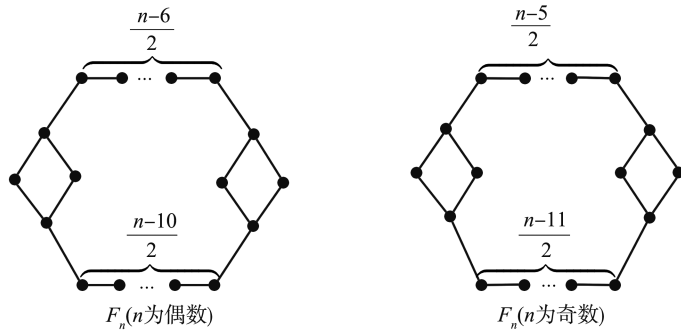


图 1 顶点数 n 分别为偶数和奇数的三圈图
Fig.1 Tricyclic graphs with even and odd vertices n

1 预备知识

为方便起见,令 $\phi(e) = |n_u(e) - n_v(e)|$,则图 G 的 Mostar 指标可进一步写为

$$M(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} |n_u(e) - n_v(e)| = \sum_{e=uv \in E(G)} \phi(e).$$

引理 1^[11] 令 $e=uv \in E(G)$ 。则

$$\phi(e) = |n_u(e) - n_v(e)| \leq n - 2,$$

等号成立当且仅当 $e=uv$ 是一条悬挂边。

根据图 F_n 的构造,可证明定理 1 中等式成立。

接下来证明,对于任何 $n \geq 41$ 的连通三圈图 G_n ,除 F_n 外,都有 $M(G_n) > M(F_n)$ 。根据存在割点的连通三圈图 and 不存在割点的连通三圈图两种情形进行证明。

2 存在割点的连通三圈图

引理 2 设 G_n 是一个 $n \geq 13$ 的连通三圈图并且至少有一条悬挂边。则

$$M(G_n) > M(F_n).$$

证明 令 $e=uv$ 是 G_n 中的一条悬挂边。于是,当 $n \geq 13$ 时,根据引理 1,有

$$M(G_n) \geq |n_u(e) - n_v(e)| = n - 2 \geq 11 > 10,$$

结论成立。

引理 3 设 G_n 是一个 $n \geq 13$ 的连通三圈图存在一个割点并且没有悬挂边, 则

$$M(G_n) > M(F_n).$$

证明 假设顶点 u 是图 G_n 中的割点。因为 G_n 是没有悬挂边的连通三圈图, 则 G_n 可以看成由双圈图 B 和单圈图 C 组合得到。并且, $V(B) \cap V(C) = \{u\}$ 。因为图 B 是双圈图, 所以显然有 $|V(B)| \geq 4$ 。

如果单圈图 C 是偶圈, 则对于 C 中的每条边 e 有, $\phi(e) = |V(B)| - 1 = n - |V(C)|$ 。因此,

$$M(G_n) \geq \sum_{e=uv \in E(G)} \phi(e) = |E(C)|(|V(B)| - 1) \geq 4 \times 3 > 10.$$

如果单圈图 C 是奇圈, 对于 C 中的一条边 $e = xy$, 有 $d(x, u) = d(y, u)$ 。对于 C 中剩余的边 e' , 有 $\phi(e') = |V(B)| - 1 = n - |V(C)|$ 。所以,

$$M(G_n) \geq \sum_{e=uv \in E(G)} \phi(e) = (|E(C)| - 1)(|V(B)| - 1).$$

如果 $|E(C)| \geq 5$, 则有 $M(G_n) \geq 4 \times 3 > 10$; 如果 $|E(C)| = 3$, 则 $|V(B)| - 1 = n - |V(C)| \geq 10$ 。此时, $M(G_n) \geq 2 \times 10 > 10$ 。

3 不存在割点的连通三圈图

在本节中, 考虑不存在割点的连通三圈图, 令符号 a, b, c, d, f, g 表示度大于 2 的顶点之间路径的长度。为了简便起见, 将这些路径分别称为 $P(a), P(b), P(c), P(d), P(f), P(g)$, 将这 4 个图分别用符号 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ 表示。如图 2 所示^[12]:

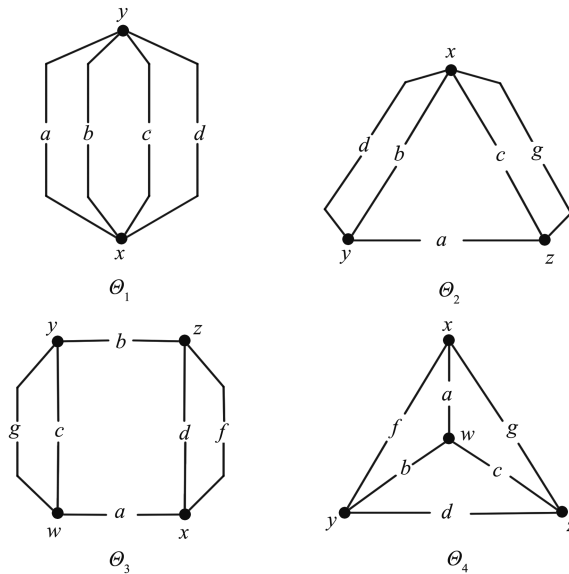


图 2 不存在割点的连通三圈图

Fig.2 Connected tricyclic graphs without cut vertices

引理 4^[13] 设 G_n 是由 4 条路径 $P(a), P(b), P(c), P(d)$ 组成的 Θ_1 图, 并且 $e = uv \in E(G)$ 。则, $|n_u(e) - n_v(e)| \leq 1$ 当且仅当 e 是 $P(a), P(b), P(c), P(d)$ 4 条路径中奇数长度路径的中间那条边。

引理 5 设 G_n 是一个 $n \geq 13$ 的 Θ_1 图。则

$$M(G_n) > M(F_n).$$

证明 不失一般性, 假设 $a \leq b \leq c \leq d$, 其中 $b \geq 2$ 。

现在考虑与顶点 x, y 分别关联但不属于 $P(a)$ 中的 6 条边 $e_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 。根据引理 4 有, $\phi(e_i) \geq 2$ 。于是

$$M(G_n) \geq 6 \times 2 > 10.$$

由此, 可以证明结论成立。

引理 6 设 G_n 是一个 $n \geq 13$ 的 Θ_2 图。则

$$M(G_n) > M(F_n)。$$

证明 不失一般性,假设 $d \geq b, g \geq c$ 。为了证明结论成立,分以下 4 种情形证明。

情形 1 $d \geq b+2$ 。

考虑 $P(d)$ 中的两条边 xx_1, yy_1 , 有

$$\phi(xx_1) = \phi(yy_1) = \begin{cases} a+c+g-2, & b \leq a+c, \\ b+g-2, & b \geq a+c. \end{cases}$$

由此,可以得到 $\phi(xx_1) = \phi(yy_1) \geq a+c+g-2$ 。

因为 $c+g \geq 3$, 则有 $a+c+g \geq 4$ 。如果 $a+c+g \geq 8$, 可以得到 $\phi(xx_1) = \phi(yy_1) \geq 6$ 。此时 $M(G_n) \geq 2 \times 6 > 10$ 。

如果 $a+c+g=7$, 此时 $\phi(xx_1) = \phi(yy_1) \geq 5$ 。再考虑边 $xx' \in P(g)$, 总有 $\phi(xx') \geq 2$ 。故 $M(G_n) \geq 2 \times 5 + 2 > 10$ 。

如果 $a+c+g=6$, 此时 $\phi(xx_1) = \phi(yy_1) \geq 4$ 。再考虑边 $xx' \in P(g)$, 总有 $\phi(xx') \geq 3$ 。故 $M(G_n) \geq 2 \times 4 + 3 > 10$ 。

如果 $a+c+g=5$, 此时 $\phi(xx_1) = \phi(yy_1) \geq 3$ 。

如果 $a=1, c=1, g=3$ 。此时考虑边 $xx' \in P(g)$, 有 $\phi(xx') = n-2-2 \geq 9$ 。故 $M(G_n) \geq 2 \times 3 + 9 > 10$ 。

如果 $a=1, c=2, g=2$ 。此时考虑边 $xx' \in P(g), xx'' \in P(c)$, 有 $\phi(xx') = \phi(xx'') \geq 3$ 。故 $M(G_n) \geq 4 \times 3 > 10$ 。

如果 $a=2, c=1, g=2$ 。此时考虑边 $xx' \in P(g), xz \in P(c)$, 有 $\phi(xx') \geq 3, \phi(xz) \geq 2$ 。故 $M(G_n) \geq 2 \times 3 + 3 + 2 > 10$ 。

如果 $a+c+g=4$, 此时 $a=1, c=1, g=2$ 。如果 $b \geq 6 > 2 = a+c$, 则有 $\phi(xx_1) = \phi(yy_1) \geq 6$ 。此时 $M(G_n) \geq 2 \times 6 > 10$; 如果 $b=5$ 或 $b=4$, 考虑边 $xx' \in P(g)$, 有 $\phi(xx') \geq 3$ 。则 $M(G_n) \geq 2 \times 4 + 3 > 10$;

如果 $b=3$, 考虑边 $xx' \in P(g)$, 有 $\phi(xx') \geq 5$ 。则 $M(G_n) \geq 2 \times 3 + 5 > 10$; 如果 $b=2$, 考虑边 $xx' \in P(g), xz' \in P(g)$, 有 $\phi(xx') \geq 6, \phi(xz') \geq 4$ 。则 $M(G_n) \geq 2 \times 2 + 6 + 4 > 10$; 如果 $b=1$, 考虑边 $xx' \in P(g)$, 有 $\phi(xx') = n-2-1 \geq 10$ 。所以 $M(G_n) \geq 2 \times 2 + 10 > 10$ 。

情形 2 $d=b+1, g=c+1$ 。

情形 2.1 $a+c-1 \geq b$ 。

考虑边 $xx_1 \in P(c)$ 和边 $xx_2 \in P(g)$ 。有 $\phi(xx_1) = d-1+g-2 = b+g-2$, 再考虑边 $xx_2 \in P(g)$, 有

$$\phi(xx_2) \geq \begin{cases} d+b-1, & c \leq a+b, \\ d+c-2, & c \geq a+b. \end{cases}$$

因此,可以得到 $\phi(xx_2) \geq d+b-1 = 2b$ 。于是,有

$$\phi(xx_1) + \phi(xx_2) \geq b+g-2+2b = 3b+g-2。$$

如果 $b \geq 4$ 或 $g \geq 10$, 则显然有 $M(G_n) \geq \phi(xx_1) + \phi(xx_2) > 10$ 。如果 $b=1$, 则需考虑 $g \leq 9$ 。当 $4 \leq g \leq 9$ 时, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 总有 $\phi(xx') \geq 6$ 。此时, $M(G_n) \geq 5+6 > 10$; 当 $g=3$ 时, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 有 $\phi(xx') \geq 6$, 再考虑边 $yx' \in P(d)$, 有 $\phi(yx') \geq 4$ 。此时, $M(G_n) \geq 4+4+6 > 10$; 当 $g=2$ 时, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 有 $\phi(xx') \geq 6$, 再考虑边 $yx' \in P(d)$, 有 $\phi(yx') \geq 5$ 。此时, $M(G_n) \geq 3+5+6 > 10$ 。

如果 $b=2$, 则需考虑 $g \leq 6$ 。当 $2 \leq g \leq 6$ 时, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 总有 $\phi(xx') \geq 5$ 。此时, $M(G_n) \geq 6+5 > 10$ 。

如果 $b=3$, 则需考虑 $g \leq 3$ 。当 $2 \leq g \leq 3$ 时, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 总有 $\phi(xx') \geq 5$ 。此时, $M(G_n) \geq 9+5 > 10$ 。

情形 2.2 $b \geq a+c+1$ 。

考虑边 $xx_1 \in P(b)$ 和边 $xx_2 \in P(d)$, 有 $\phi(xx_1) = d-2+g-1 = b+c-1$ 。再考虑边 $xx_2 \in P(d)$, 有 $\phi(xx_2) = b+c-1$, 于是, 有 $\phi(xx_1) + \phi(xx_2) \geq 2(b+c-1)$ 。

如果 $b+c \geq 7$, 则显然有 $M(G_n) \geq \phi(xx_1) + \phi(xx_2) > 10$ 。

因为 $b \geq a+c+1$, 所以 $b \geq 3$ 。故, $b+c \geq 4$ 。因此, 现在需要考虑 $4 \leq b+c \leq 6$ 的情形。又因为 $|V(G_n)| = n = a+b+c+d+g-2 = a+2(b+c) \geq 13$, 故分为以下几种情形:

如果 $b+c=4$, 则有 $a \geq 5$, 此时与 $b \geq a+c+1$ 矛盾;

如果 $b+c=5$, 则有 $a \geq 3$, 此时与 $b \geq a+c+1$ 矛盾;

如果 $b+c=6$, 则有 $a \geq 1$. 此时为满足 $b \geq a+c+1$, 有 $b=4, c=2$ 或 $b=5, c=1$. 当 $b=4, c=2$ 时, 考虑边 $xx' \in P(g)$, 有 $\phi(xx') \geq 2$. 此时 $M(G_n) \geq 2 \times 5 + 2 > 10$; 当 $b=5, c=1$ 时, 考虑边 $xx' \in P(g)$, 有 $\phi(xx') \geq 2$. 此时 $M(G_n) \geq 2 \times 5 + 2 > 10$.

情形 2.3 $b=a+c$.

考虑边 $xx_1 \in P(g)$. 有 $\phi(xx_1) = d-1+b-1 = 2b-1$. 如果 $b \geq 6$, 则显然有 $M(G_n) \geq \phi(xx_1) > 10$.

因为 $|V(G_n)| = n = a+b+c+d+g-2 = 3b+c \geq 13$, 故 $b \geq 4$. 因此, 现在需要考虑 $4 \leq b \leq 5$ 的情形.

如果 $b=5$, 则有 $a=1, c=4$ 或 $a=2, c=3$ 或 $a=3, c=2$ 或 $a=4, c=1$. 在此 4 种情形下, 考虑边 $xx_2 \in P(d)$, 都有 $\phi(xx_2) \geq 2$. 于是 $M(G_n) \geq 9+2 > 10$.

如果 $b=4$, 则有 $a=1, c=3$ 或 $a=2, c=2$ 或 $a=3, c=1$. 在此 3 种情形下, 考虑边 $xx_2 \in P(d)$, 都有 $\phi(xx_2) \geq 4$. 于是 $M(G_n) \geq 7+4 > 10$.

情形 3 $d=b+1, g=c$.

在此情形下, 显然有 $g=c \geq 2$.

情形 3.1 $a+c-1 \geq b$.

考虑边 $xx_1 \in P(c)$ 和边 $xx_2 \in P(g)$, 有

$$\phi(xx_1) = \phi(xx_2) \geq d-1+g-1 = b+g-1.$$

因为 $b \geq 1, g \geq 2$, 于是有 $b+g \geq 3$.

如果 $b+g \geq 7$, 则有 $M(G_n) \geq 2 \times 6 > 10$.

如果 $b+g=6$, 则有 $b=1, g=5$ 或 $b=2, g=4$ 或 $b=3, g=3$ 或 $b=4, g=2$. 在此 4 种情形下, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 都有 $\phi(xx') \geq 5$. 于是 $M(G_n) \geq 2 \times 5 + 5 > 10$.

如果 $b+g=5$, 则有 $b=1, g=4$ 或 $b=2, g=3$ 或 $b=3, g=2$. 在此 3 种情形下, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 都有 $\phi(xx') \geq 5$. 于是 $M(G_n) \geq 2 \times 4 + 5 > 10$.

如果 $b+g=4$, 则有 $b=1, g=3$ 或 $b=2, g=2$. 在此 2 种情形下, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 都有 $\phi(xx') \geq 5$. 于是 $M(G_n) \geq 2 \times 3 + 5 > 10$.

如果 $b+g=3$, 则有 $b=1, g=2$. 在此情形下, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 有 $\phi(xx') \geq 6$; 再考虑边 $xy \in P(b)$, 有 $\phi(xy) = 1$. 于是 $M(G_n) \geq 2 \times 2 + 6 + 1 > 10$.

情形 3.2 $b > a+c-1$.

考虑边 $xx_1 \in P(c)$. 因为 $b > a+c-1$, 则 $y \in N_{x_1}(xx_1)$. 令 u 是 $P(d)$ 上满足 $u \in N_x(xx_1)$ 的最远的顶点, 而 u' 是 u 的邻点但是它不在集合 $N_x(xx_1)$ 中. 如果圈 $P(d) \cup P(c) \cup P(a)$ 是奇圈, 则 $d(x, u) + 1 = d(u', y) + a + c - 1$. 于是, 有 $d(x, u) - (d(u', y) - 1) = a + c - 1$; 如果圈 $P(d) \cup P(c) \cup P(a)$ 是偶圈, 则 $d(x, u) = d(u', y) + a + c - 1$. 于是, 有 $d(x, u) - d(u', y) = a + c - 1$. 于是, $\phi(xx_1) = a + c - 1 + g - 1 = a + 2c - 2$. 同理, 对于边 $xx_2 \in P(g)$, 也有 $\phi(xx_2) = a + 2c - 2$.

因为 $c \geq 2$, 则 $a + 2c \geq 5$. 如果 $a + 2c \geq 8$, 则有 $M(G_n) \geq 2 \times 6 > 10$.

如果 $a + 2c = 7$, 则有 $a = 1, c = 3$ 或 $a = 3, c = 2$. 在此 2 种情形下, 考虑边 $yy' \in P(d)$, 都有 $\phi(yy') \geq 5$. 于是 $M(G_n) \geq 2 \times 5 + 5 > 10$.

如果 $a + 2c = 6$, 则有 $a = 2, c = 2$. 在此情形下, 考虑边 $yy' \in P(d)$, 有 $\phi(yy') \geq 4$. 于是 $M(G_n) \geq 2 \times 4 + 4 > 10$.

如果 $a + 2c = 5$. 则有 $a = 1, c = 2$. 于是, $b \geq 5$. 在此情形下, 考虑边 $yy' \in P(d)$, 有 $\phi(yy') \geq 5$. 于是 $M(G_n) \geq 2 \times 3 + 5 > 10$.

情形 4 $d=b, g=c$.

情形 4.1 $b=d=c=g \geq 2$.

考虑边 $xx_1 \in P(b)$, 有 $\phi(xx_1) = 2(g-1)$. 对于其余与 x 关联的 3 条边有相同的结果.

如果 $g \geq 3$, 则有 $M(G_n) \geq 4 \times 4 > 10$.

如果 $g=2$ 。因为 $n \geq 13$, 所以 $a \geq 7$ 。现在考虑边 $yy' \in P(a)$ 和边 $zz' \in P(a)$, 有 $\phi(yy') = \phi(zz') = 2$ 。于是 $M(G_n) \geq 4 \times 2 + 2 \times 2 > 10$ 。

情形 4.2 $b = d > c = g \geq 2$ 。

考虑边 $xx_1 \in P(b)$, 有 $\phi(xx_1) = d - 1 + g - 1 = d + g - 2$ 。同样地, 对于边 $xx_2 \in P(d)$, 也有 $\phi(xx_2) = d + g - 2$ 。

如果 $d + g \geq 8$, 则有 $M(G_n) \geq 2 \times 6 > 10$ 。

如果 $d + g = 7$ 。则有 $d = 5, g = 2$ 或 $d = 4, g = 3$ 。在此 2 种情形下, 考虑边 $xx' \in P(c)$, 都有 $\phi(xx') \geq 3$ 。于是 $M(G_n) \geq 2 \times 5 + 3 > 10$ 。

如果 $d + g = 6$, 则有 $d = 4, g = 2$ 。在此情形下, 考虑边 $xx' \in P(c)$, 都有 $\phi(xx') \geq 4$ 。于是 $M(G_n) \geq 2 \times 4 + 4 > 10$;

如果 $d + g = 5$ 。则有 $d = 3, g = 2$ 。在此情形下, 考虑边 $xx' \in P(c)$, 有 $\phi(xx') \geq 3$ 。同理有 $xx'' \in P(g)$, 也有 $\phi(xx'') \geq 3$ 。于是 $M(G_n) \geq 2 \times 3 + 2 \times 3 > 10$ 。

引理 7 设 G_n 是一个 $n \geq 13$ 的 Θ_3 图。则

$$M(G_n) > M(F_n)。$$

证明 不失一般性, 假设 $f \geq d, g \geq c$ 。为了证明结论成立, 分以下 4 种情形证明。

情形 1 $g \geq c + 2$ 。

考虑 $P(g)$ 中的 2 条边 ww_1, yy_1 , 有

$$\phi(ww_1) = \phi(yy_1) = \begin{cases} a + b + d + f - 2, & c \leq a + b + d, \\ c + f - 2, & c \geq a + b + d. \end{cases}$$

由此可以得到 $\phi(ww_1) = \phi(yy_1) \geq a + b + d + f - 2$ 。

因为 $d + f \geq 3$, 则有 $a + b + d + f \geq 5$ 。如果 $a + b + d + f \geq 8$, 可以得到 $\phi(ww_1) = \phi(yy_1) \geq 6$ 。此时 $M(G_n) \geq 2 \times 6 > 10$ 。

如果 $a + b + d + f = 7$, 此时 $\phi(ww_1) = \phi(yy_1) \geq 5$ 。再考虑边 $xx' \in P(f)$, 总有 $\phi(xx') \geq 1$ 。故 $M(G_n) \geq 2 \times 5 + 1 > 10$ 。

如果 $a + b + d + f = 6$, 此时 $\phi(ww_1) = \phi(yy_1) \geq 4$ 。

如果 $a = 1, b = 1, d = 1, f = 3$ 。此时考虑边 $xx' \in P(f)$, 有 $\phi(xx') = n - 2 - 2 \geq 9$ 。故 $M(G_n) \geq 2 \times 4 + 9 > 10$ 。

如果 $a = 1, b = 1, d = 2, f = 2$ 。此时考虑边 $xx' \in P(f)$, 有 $\phi(xx') \geq 2$; 同理有 $xx'' \in P(d)$, 也有 $\phi(xx'') \geq 2$ 。故 $M(G_n) \geq 2 \times 4 + 2 \times 2 > 10$ 。

如果 $a = 1, b = 2, d = 1, f = 2$ 。此时考虑边 $xx' \in P(f)$, 有 $\phi(xx') \geq 3$ 。故 $M(G_n) \geq 2 \times 4 + 3 > 10$ 。

如果 $a = 2, b = 1, d = 1, f = 2$ 。此时考虑边 $xx' \in P(f)$, 有 $\phi(xx') \geq 3$ 。故 $M(G_n) \geq 2 \times 4 + 3 > 10$ 。

如果 $a + b + d + f = 5$, 则有 $a = 1, b = 1, d = 1, f = 2$ 。此时 $\phi(ww_1) = \phi(yy_1) \geq 3$ 。再考虑边 $xx' \in P(f)$, 有 $\phi(xx') \geq 3$ 。同样有边 $zx' \in P(f)$, 有 $\phi(zx') \geq 3$ 。故 $M(G_n) \geq 2 \times 3 + 2 \times 3 > 10$ 。

情形 2 $g = c + 1, f = d + 1$ 。

情形 2.1 $a + c - 1 \geq b + d$ 。

考虑边 $yy_1 \in P(c)$ 和边 $yy_2 \in P(g)$ 。有 $\phi(yy_1) = g - 2 + f - 1 = c + d - 1$ 。再考虑边 $yy_2 \in P(g)$, 有

$$\phi(yy_2) \geq \begin{cases} b + d + f - 1, & c \leq a + b + d, \\ c + f - 2, & c \geq a + b + d. \end{cases}$$

因此, 可以得到 $\phi(yy_2) \geq b + d + f - 1 = b + 2d$ 。于是有

$$\phi(yy_1) + \phi(yy_2) \geq c + d - 1 + b + 2d = b + c + 3d - 1。$$

如果 $d \geq 4$ 或 $b \geq 8$ 或 $c \geq 8$ 时, 则显然有 $M(G_n) \geq \phi(yy_1) + \phi(yy_2) > 10$ 。

如果 $d = 1$, 则需考虑 $b + c \leq 8$ 。当 $4 \leq b + c \leq 8$ 时, 考虑边 $zz' \in P(f)$, 总有 $\phi(zz') \geq 5$, 此时, $M(G_n) \geq 6 + 5 > 10$; 当 $b + c = 3$ 时, 考虑边 $zz' \in P(f)$, 都有 $\phi(zz') \geq 6$ 。于是有, $M(G_n) \geq 5 + 6 > 10$; 当 $b + c = 2$ 时, 有 $b = 1, c = 1$ 。考虑边 $zz' \in P(f)$, 有 $\phi(zz') \geq 6$, 再考虑边 $zx \in P(d)$, 有 $\phi(zx) = 1$, 此时, $M(G_n) \geq 4 + 6 + 1 > 10$ 。

如果 $d = 2$, 则需考虑 $b + c \leq 5$ 。当 $2 \leq b + c \leq 5$ 时, 考虑边 $zz' \in P(f)$, 总有 $\phi(zz') \geq 4$, 此时, $M(G_n) \geq$

$7+4>10$ 。

如果 $d=3$, 则需考虑 $b+c \leq 2$ 。又因为 $b+c \geq 2$ 。故, $b+c=2$ 。此时, $b=1, c=1$ 。考虑边 $zz' \in P(f)$, 有 $\phi(zz') \geq 3$, 此时, $M(G_n) \geq 10+3>10$ 。

情形 2.2 $a+c \leq b+d-1$ 。

考虑边 $xx_1 \in P(d)$ 和边 $xx_2 \in P(f)$ 。有, $\phi(xx_1) = g-1+f-2 = c+d-1$ 。再考虑边 $xx_2 \in P(f)$, 有

$$\phi(xx_2) \geq \begin{cases} a+2c, & d \leq a+b+c, \\ c+d-1, & d \geq a+b+c. \end{cases}$$

因此, 可以得到 $\phi(xx_2) \geq a+2c$ 。于是, 有

$$\phi(xx_1) + \phi(xx_2) \geq a+2c+c+d-1 = a+d+3c-1。$$

此情形与情形 2.1 相似, 同理可证明。

情形 2.3 $b+d = a+c$ 。

考虑边 $yy_1 \in P(g)$, $xx_1 \in P(f)$ 。有 $\phi(yy_1) = b+d+f-2$, $\phi(xx_1) = a+c+g-2$ 。因为 $n = a+b+c+d+g+f-2 \geq 13$, 所以有 $M(G_n) \geq \phi(xx_1) + \phi(yy_1) = a+b+c+d+g+f-4 \geq 11>10$ 。

情形 3 $g = c+1, f = d$ 。

在此情形下, 显然有 $f = d \geq 2$ 。

情形 3.1 $a+d-1 \geq b+c$ 。

考虑边 $zz_1 \in P(d)$ 和边 $zz_2 \in P(f)$, 有

$$\phi(zz_1) = \phi(zz_2) = g-1+f-1 = c+d-1。$$

因为 $d \geq 2$, 于是有 $c+d \geq 3$ 。

如果 $c+d \geq 7$, 则有 $M(G_n) \geq 2 \times 6 > 10$ 。

如果 $c+d=6$, 则有 $c=1, d=5$ 或 $c=2, d=4$ 或 $c=3, d=3$ 或 $c=4, d=2$ 。在此 4 种情形下, 考虑边 $yy' \in P(g)$, 都有 $\phi(yy') \geq 3$ 。于是, $M(G_n) \geq 2 \times 5 + 3 > 10$ 。

如果 $c+d=5$, 则有 $c=1, d=4$ 或 $c=2, d=3$ 或 $c=3, d=2$ 。在此 3 种情形下, 考虑边 $yy' \in P(g)$, 都有 $\phi(yy') \geq 3$ 。于是, $M(G_n) \geq 2 \times 4 + 3 > 10$ 。

如果 $c+d=4$, 则有 $c=1, d=3$ 或 $c=2, d=2$ 。当 $c=1, d=3$ 时, 考虑边 $yy' \in P(g)$, 有 $\phi(yy') \geq 3$; 再考虑边 $wy' \in P(g)$, 有 $\phi(wy') \geq 2$ 。于是, $M(G_n) \geq 2 \times 3 + 3 + 2 > 10$; 当 $c=2, d=2$ 时, 考虑边 $yy' \in P(g)$, 有 $\phi(yy') \geq 4$; 再考虑边 $wy'' \in P(g)$, 有 $\phi(wy'') \geq 2$ 。于是, $M(G_n) \geq 2 \times 3 + 4 + 2 > 10$ 。

如果 $c+d=3$, 则有 $c=1, d=2$ 。在此情形下, 考虑边 $yy' \in P(g)$ 。无论 $b \geq 2$ 或者 $b=1$, 都有 $\phi(yy') \geq 4$; 再考虑边 $wy' \in P(g)$, 有 $\phi(wy') \geq 3$ 。于是, $M(G_n) \geq 2 \times 2 + 4 + 3 > 10$ 。

情形 3.2 $a+d \leq b+c$ 。

考虑边 $ww_1 \in P(c)$ 和边 $ww_2 \in P(g)$ 。有, $\phi(ww_1) \geq g-2+d-1 = c+d-2$ 。再考虑边 $ww_2 \in P(g)$, 有

$$\phi(ww_2) \geq \begin{cases} a+d+f-2, & c \leq a+b+d, \\ c+f-2, & c \geq a+b+d. \end{cases}$$

因此, 可以得到 $\phi(ww_2) \geq a+d+f-2 = a+2d-2$ 。于是, 有

$$\phi(ww_1) + \phi(ww_2) \geq a+c+3d-4。$$

如果, $d \geq 5$ 或 $a \geq 8$ 或 $c \geq 8$ 时, 则显然有 $M(G_n) \geq \phi(ww_1) + \phi(ww_2) > 10$ 。

如果 $d=2$, 则需考虑 $a+c \leq 8$ 。当 $5 \leq a+c \leq 8$ 时, 考虑边 $yy' \in P(g)$, 有 $\phi(yy') \geq 4$ 。故, $M(G_n) \geq 7+4 > 10$ 。

当 $a+c=4$ 时, 则有 $a=1, c=3$; $a=2, c=2$; $a=3, c=1$ 。当 $a=1, c=3$ 和 $a=2, c=2$ 时, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 都有 $\phi(xx') \geq 3$ 。同理 $xx'' \in P(f)$, 也有 $\phi(xx') \geq 3$ 。故, $M(G_n) \geq 6+2 \times 3 > 10$; 当 $a=3, c=1$ 时, 考虑边 $yy' \in P(g)$, 有 $\phi(yy') \geq 5$ 。故, $M(G_n) \geq 6+5 > 10$ 。

当 $a+c=3$ 时, 则有 $a=1, c=2$; $a=2, c=1$ 。当 $a=1, c=2$ 时, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 都有 $\phi(xx') \geq 3$ 。同

理 $xx'' \in P(f)$, 也有 $\phi(xx') \geq 3$ 。故, $M(G_n) \geq 5+2 \times 3 > 10$; 当 $a=2, c=1$ 时, 考虑边 $yy' \in P(g)$, 有 $\phi(yy') \geq 5$ 。再考虑边 $xx' \in P(d)$, 都有 $\phi(xx') \geq 2$ 。故, $M(G_n) \geq 5+5+2 > 10$ 。

当 $a+c=2$ 时, 则有 $a=1, c=1$ 。考虑边 $yy' \in P(g)$, 有 $\phi(yy') \geq 5$ 。再考虑边 $xx' \in P(d)$, 都有 $\phi(xx') \geq 2$ 。故, $M(G_n) \geq 4+5+2 > 10$ 。

如果 $d=3$, 则需考虑 $a+c \leq 5$ 。当 $2 \leq a+c \leq 5$ 时, 考虑边 $yy' \in P(g)$, 总有 $\phi(yy') \geq 4$ 。此时, $M(G_n) \geq 7+4 > 10$ 。

如果 $d=4$, 则需考虑 $a+c \leq 2$ 。又因为 $a+c \geq 2$ 。故, $a+c=2$ 。此时, $a=1, c=1$ 。考虑边 $yy' \in P(g)$, 有 $\phi(yy') \geq 1$ 。此时, $M(G_n) \geq 10+1 > 10$ 。

情形 4 $g=c, f=d$ 。

在此情形下, 不妨假设 $a \leq b$ 。

情形 4.1 $g=c > f=d \geq 2$ 。

考虑边 $ww_1 \in P(g)$, 有 $\phi(ww_1) = c-1+d-1 = c+d-2$ 。同理, 对于边 $ww_2 \in P(c)$, 也有 $\phi(ww_2) = c+d-2$ 。因为 $c \geq 3$ 且 $d \geq 2$, 于是有 $c+d \geq 5$ 。

如果 $c+d \geq 8$, 则有 $M(G_n) \geq 2 \times 6 > 10$;

如果 $c+d=7$ 。则有 $c=5, d=2$ 或 $c=4, d=3$ 。在此 2 种情形下, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 都有 $\phi(xx') \geq 2$ 。于是, $M(G_n) \geq 2 \times 5 + 2 > 10$;

如果 $c+d=6$ 。则有 $c=4, d=2$ 。在此情形下, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 有 $\phi(xx') \geq 2$ 。同理有 $xx'' \in P(f)$, 有 $\phi(xx'') \geq 2$ 。于是, $M(G_n) \geq 2 \times 4 + 2 \times 2 > 10$;

如果 $c+d=5$ 。则有 $c=3, d=2$ 。在此情形下, 考虑边 $xx' \in P(d)$, 有 $\phi(xx') \geq 2$ 。同理有 $xx'' \in P(f)$, 有 $\phi(xx'') \geq 2$ 。再考虑边 $yy' \in P(g)$, 有 $\phi(yy') \geq 1$ 。于是, $M(G_n) \geq 2 \times 3 + 2 \times 2 + 1 > 10$ 。

情形 4.2 $c=g=d=f \geq 3$ 。

考虑边 $ww_1 \in P(g)$, 有 $\phi(ww_1) = c-1+f-1 = 2(c-1)$ 。因为 $c \geq 3$, 则 $\phi(ww_1) = 2(c-1) \geq 4$ 。同理, 对于边 $ww_2 \in P(c)$, 也有 $\phi(ww_2) = 2(c-1) \geq 4$ 。再根据对称性, 对于边 $xx_1 \in P(d), xx_2 \in P(f)$, 有 $\phi(xx_1) = \phi(xx_2) = 2(c-1) \geq 4$ 。故, $M(G_n) \geq 4 \times 4 > 10$ 。

情形 4.3 $c=g=d=f=2$ 。

如果 $b \geq a+4$, 则考虑边 $ww_1 \in P(g)$, 有 $\phi(ww_1) = 2$ 。同样地, 对于边 $ww_2 \in P(c), xx_1 \in P(d), xx_2 \in P(f)$, 有相同的结果; 再考虑边 $yy' \in P(b)$, 有 $\phi(yy') \geq 2$ 。同理, 对于边 $zz' \in P(b)$, 有 $\phi(zz') \geq 2$ 。故, $M(G_n) \geq 6 \times 2 > 10$ 。

如果 $a \leq b \leq a+1$, 则考虑边 $ww_1 \in P(g)$, 有 $\phi(ww_1) = 2$ 。同样地, 对于边 $ww_2 \in P(c), xx_1 \in P(d), xx_2 \in P(f)$, 有相同的结果; 再考虑边 $yw_i, zx_i (i=1, 2)$, 有 $\phi(yw_i) \geq 1, \phi(zx_i) \geq 1$ 。故, $M(G_n) \geq 4 \times 2 + 4 \times 1 > 10$ 。

如果 $b=a+3$ 。则有图 F_n, n 为奇数; 如果 $b=a+2$ 。则有图 F_n, n 为偶数。

综上所述, 结果成立。

引理 8 设 G_n 是一个 $n \geq 41$ 的 Θ_4 图, 则

$$M(G_n) > M(F_n)。$$

证明 不失一般性, 假设 $a = \max\{a, b, c, d, f, g\}$ 。因为 $n \geq 41$, 则有 $m = n+2 \geq 43$ 。故, $a \geq 8$ 。现在考虑边 $ww_1 \in P(a)$ 。由于 $a = \max\{a, b, c, d, f, g\}$, 于是有 $d(z, w) \leq d(z, w_1)$ 。则有 $z \in N_w(ww_1)$ 或 $z \in N_0(ww_1)$ 。如果 $z \in N_0(ww_1)$, 当且仅当 $a = c \leq b+d, g=1$ 。同理, 对于 y 可以得到相同的结果。

令 C 是包含 ww_1 的最短圈。当 $a > \frac{|C|+1}{2}$ 时, $x \in N_w(ww_1)$; 当 $a = \frac{|C|+1}{2}$ 时, $x \in N_0(ww_1)$; 当 $a < \frac{|C|+1}{2}$ 时, $x \in N_{w_1}(ww_1)$ 。

情形 1 $a > \frac{|C|+1}{2}$ 。

因为 $x \in N_w(ww_1)$, 则有 $y, z \in N_w(ww_1)$ 。于是, $\phi(ww_1) = n - |C|$ 。同理, 对于边 $xx_1 \in P(a)$, 也有

$\phi(xx_1) = n - |C|$ 。

如果 $n - |C| \geq 6$, 则有 $M(G_n) \geq 2 \times 6 > 10$ 。

如果 $n - |C| = 1$ 且 C 由路 $P(a), P(f), P(b)$ 组成, 则 $V(G) - V(C) = \{z\}$ 并且 $d = c = g = 1$ 。因为 $P(a) \cup P(f) \cup P(b)$ 是最短圈, 则 $f = b = 1$ 。再根据 $m = n + 2 = a + b + c + d + f + g \geq 43$, 则 $a \geq 38$ 。现在考虑 $P(a)$ 中的每条边 e , 除了当 a 是奇数时 $P(a)$ 中间那条边, 其余边都有 $\phi(e) = 1$ 。于是, $M(G_n) \geq a - 1 > 10$ 。

如果 $n - |C| = 1$ 且 C 由路 $P(a), P(f), P(d), P(c)$ 组成。则, $b + g = 3$ 。于是分为 2 种情形: $b = 1, g = 2$ 或 $b = 2, g = 1$ 。若 $b = 1, g = 2$, 则圈 $P(a) \cup P(f) \cup P(b)$ 比圈 $P(a) \cup P(f) \cup P(d) \cup P(c)$ 的长度更短, 矛盾; 若 $b = 2, g = 1$, 则圈 $P(a) \cup P(g) \cup P(c)$ 是包含边 ww_1 的最短圈, 矛盾。

如果 $n - |C| = 2$ 且 C 由路 $P(a), P(f), P(b)$ 组成。则, $d + c + g = 4$ 并且 $f + b \leq 3$ 。因为 $n \geq 41$, 则有 $a \geq 36$ 。下面考虑 $P(a)$ 上的六条边 $e_i (1 \leq i \leq 6)$, 使得 e_i 到 x 或 w 的距离不超过 2。则有 $\phi(e_i) = 2$ 。所以, $M(G_n) \geq 6 \times 2 > 10$ 。

如果 $n - |C| = 2$ 且 C 由路 $P(a), P(f), P(d), P(c)$ 组成。则, $b + g = 4$ 。于是, 有 $b = 2, g = 2$, 否则与圈 $P(a) \cup P(f) \cup P(d) \cup P(c)$ 是最短圈, 矛盾。这种情形与 C 由 $P(a) \cup P(f) \cup P(b)$ 组成的证明是一样的。

如果 $n - |C| = 3$ 且 C 由路 $P(a), P(f), P(b)$ 组成, 则 $d + c + g = 5$ 并且 $f + b \leq 4$ 。因为 $n \geq 41$, 所以有 $a \geq 34$ 。下面考虑 $P(a)$ 上的 4 条边 $e_i (1 \leq i \leq 4)$, 使得 e_i 到 x 或 w 的距离不超过 1, 则有 $\phi(e_i) = 3$, 所以, $M(G_n) \geq 4 \times 3 > 10$ 。

如果 $n - |C| = 3$ 且 C 由路 $P(a), P(f), P(d), P(c)$ 组成。则, $b + g = 5$ 。于是有 $b = 2, g = 3$ 或 $b = 3, g = 2$ 。否则与圈 $P(a) \cup P(f) \cup P(d) \cup P(c)$ 是最短圈, 矛盾。这种情形与 C 由 $P(a) \cup P(f) \cup P(b)$ 组成的证明是一样的。

如果 $n - |C| = 4$ 且 C 由路 $P(a), P(f), P(b)$ 组成, 则 $d + c + g = 6$ 并且 $f + b \leq 5$ 。因为 $n \geq 41$, 则有 $a \geq 32$ 。下面考虑 $P(a)$ 上的 4 条边 $e_i (1 \leq i \leq 4)$, 使得 e_i 到 x 或 w 的距离不超过 1, 则有 $\phi(e_i) = 4$, 所以, $M(G_n) \geq 4 \times 4 > 10$ 。

如果 $n - |C| = 4$ 且 C 由路 $P(a), P(f), P(d), P(c)$ 组成, 则, $b + g = 6$ 。于是有 $b = 2, g = 4$ 或 $b = 3, g = 3$ 或 $b = 4, g = 2$, 否则与圈 $P(a) \cup P(f) \cup P(d) \cup P(c)$ 是最短圈, 矛盾。这种情形与 C 由 $P(a) \cup P(f) \cup P(b)$ 组成的证明是一样的。

如果 $n - |C| = 5$ 且 C 由路 $P(a), P(f), P(b)$ 组成, 则, $d + c + g = 7$ 并且 $f + b \leq 6$ 。因为 $n \geq 41$, 则有 $a \geq 30$ 。下面考虑 $P(a)$ 上的 4 条边 $e_i (1 \leq i \leq 4)$, 使得 e_i 到 x 或 w 的距离不超过 1, 则有 $\phi(e_i) = 5$ 。所以, $M(G_n) \geq 4 \times 5 > 10$ 。

如果 $n - |C| = 5$ 且 C 由路 $P(a), P(f), P(d), P(c)$ 组成, 则, $b + g = 7$ 。于是有 $b = 2, g = 5$ 或 $b = 3, g = 4$ 或 $b = 4, g = 3$ 或 $b = 5, g = 2$, 否则与圈 $P(a) \cup P(f) \cup P(d) \cup P(c)$ 是最短圈, 矛盾。这种情形与 C 由 $P(a) \cup P(f) \cup P(b)$ 组成的证明是一样的。

情形 2 $a = \frac{|C| + 1}{2}$ 。

情形 2.1 C 由路 $P(a), P(f), P(d), P(c)$ 组成。

在这种情形下, $y, z \in N_w(ww_1)$ 并且 $b \geq d + c$ 。令 u 是 $P(g)$ 上最远的顶点使得 $u \in N_w(ww_1)$, u' 是与 u 关联的顶点但它不在集合 $N_w(ww_1)$ 中。如果圈 $P(a) \cup P(c) \cup P(g)$ 是偶圈, 则 $c + d(z, u) = a - 1 + d(x, u')$ 。于是, $d(z, u) = a - c - 1 + d(x, u')$; 如果圈 $P(a) \cup P(c) \cup P(g)$ 是奇圈, 则 $c + d(z, u) + 1 = a - 1 + d(x, u')$; 于是, $d(z, u) = a - c - 2 + d(x, u')$ 。所以, $\phi(ww_1) = b - 1 + d(z, u) \geq b - 1 + a - c - 2 + d(x, u') \geq a - 2 \geq 6$ 。

再考虑边 $xx_1 \in P(a)$ 。此时, $y, z \in N_x(xx_1)$ 并且 $g \geq f + d$ 。令 v 是 $P(b)$ 上最远的顶点使得 $u \in N_x(xx_1)$, v' 是与 v 关联的顶点但它不在集合 $N_x(xx_1)$ 中。如果圈 $P(a) \cup P(f) \cup P(b)$ 是偶圈, 则 $f + d(y, v) = a - 1 + d(w, v')$ 。于是, $d(y, v) = a - f - 1 + d(w, v')$; 如果圈 $P(a) \cup P(f) \cup P(b)$ 是奇圈, 则 $f + d(y, v) + 1 = a - 1 + d(w, v')$; 于是, $d(y, v) = a - f - 2 + d(w, v')$, 所以, $\phi(xx_1) = g - 1 + d(y, v) \geq g - 1 + a - f - 2 + d(w, v') \geq a - 2 \geq 6$ 。

最终, $M(G_n) \geq 2 \times 6 > 10$ 。

情形 2.2 C 由路 $P(a), P(f), P(b)$ 组成。

在这种情形下, $y \in N_w(w w_1)$ 并且 $b \leq d+c$ 。

如果 $z \in N_0(w w_1)$, 则 $a=c \leq b+d, g=1$, 此时, $\phi(w w_1) \geq a-1 \geq 7$; 再考虑边 $xx_1 \in P(a)$, 则 $\phi(xx_1) \geq a-1+d-1 \geq 7$, 则 $M(G_n) \geq 2 \times 7 > 10$;

如果 $z \in N_w(w w_1)$, 则与情形 2.1 相似。令 u 是 $P(g)$ 上最远的顶点使得 $u \in N_w(w w_1)$, u' 是与 u 关联的顶点但它不在集合 $N_w(w w_1)$ 中。于是,

$$d(z, u) \geq \begin{cases} a-(b+d)-2, & c \geq b+d, \\ a-c-2, & c \leq b+d. \end{cases}$$

所以, $\phi(w w_1) \geq d-1+c-1+1+d(z, u) \geq d+c-1+a-c-2 \geq a-2 \geq 6$; 现在再考虑边 $xx_1 \in P(a)$, 在这种情形下, 有 $w \in N_0(xx_1), y \in N_x(xx_1)$ 。如果 $z \in N_0(xx_1)$, 则有 $\phi(xx_1) \geq a-1 \geq 7$ 。于是, $M(G_n) \geq 6+7 > 10$; 如果 $z \in N_x(xx_1)$, 则有 $\phi(xx_1) \geq a-g-2+d-1+g-1+1 \geq a-2 \geq 6$ 。于是, $M(G_n) \geq 6+6 > 10$;

情形 3 $a < \frac{|C|+1}{2}$ 。

情形 3.1 y 和 z 都在 $N_0(w w_1)$ 中。

在这种情形下, 有 $a=b=c, f=g=1$ 。于是有 $\phi(w w_1) = a-1 \geq 7$; 此时, 再考虑边 $xx_1 \in P(a)$, 则有 $\phi(xx_1) = a-1+d-1 \geq a-1 \geq 7$, 所以, $M(G_n) \geq 7+7 > 10$;

情形 3.2 y 和 z 其中一个在 $N_0(w w_1)$ 中。

不妨假设 $z \in N_0(w w_1)$ 。则有, $a=c \leq b+d, g=1$ 。

如果 $z \notin V(C)$, 则 $C=P(a) \cup P(f) \cup P(b)$ 。于是 $\phi(w w_1) \geq a-1 \geq 7$; 再考虑边 $xx_1 \in P(a)$, 在这种情形下, 有 $w \in N_{x_1}(xx_1), z \in N_x(xx_1)$ 。如果 $y \in N_x(xx_1)$, 则有 $\phi(xx_1) \geq a-1+d-1 \geq a-1 \geq 7$ 。此时, $M(G_n) \geq 7+7 > 10$; 如果 $y \in N_0(xx_1)$, 则有 $a=f, b=1$ 。

如果 $z \in V(C)$, 则 $C=P(a) \cup P(g) \cup P(c)$ 。否则, 如果 $C=P(a) \cup P(f) \cup P(d) \cup P(c)$, 由于 $z \in N_0(w w_1)$, 则 $y \in N_w(w w_1)$, 矛盾; 令 u 是 $P(f)$ 上最远的顶点使得 $u \in N_w(w w_1)$, u' 是与 u 关联的顶点但它不在集合 $N_w(w w_1)$ 中。如果圈 $P(a) \cup P(f) \cup P(b)$ 是偶圈, 则 $b+d(y, u) = a-1+d(x, u')$ 。于是, $d(y, u) - d(x, u') = a-b-1$; 如果圈 $P(a) \cup P(f) \cup P(b)$ 是奇圈, 则 $b+d(y, u) + 1 = a-1+d(x, u')$; 于是, $d(y, u) - (d(x, u') - 1) = a-b-1$ 。所以, $\phi(w w_1) \geq b+a-b-1 \geq a-1 \geq 7$ 。

再考虑边 $xx_1 \in P(a)$, 在这种情形下, 有 $w \in N_{x_1}(xx_1), z \in N_x(xx_1)$ 。如果 $y \in N_x(xx_1)$, 则有 $\phi(xx_1) \geq a-1-f+f-1+d-1+1 \geq a-1 \geq 7$ 。此时, $M(G_n) \geq 7+7 > 10$; 如果 $y \in N_0(xx_1)$, 则有 $a=f, b=1$ 。

情形 3.3 y 和 z 都在 $N_w(w w_1)$ 中。

在这种情形下, 可以得到

$$\phi(w w_1) \geq \begin{cases} a+(b-c)-2, & b \geq d+c, \\ a+d-2, & b \leq d+c. \end{cases}$$

所以, $\phi(w w_1) \geq a+d-2 \geq a-1 \geq 7$;

再考虑边 $xx_1 \in P(a)$, 此时 $w \in N_{x_1}(xx_1)$, 而 $y \in N_0(xx_1)$ 或 $y \in N_x(xx_1)$ 。同理, 对 z 也有相同的结果。如同上述分析一样, 对于边 $xx_1 \in P(a)$, 有 $\phi(xx_1) \geq a-1 \geq 7$ 。于是, $M(G_n) \geq 7+7 > 10$ 。

综上所述, 结果成立。

最后, 通过引理 2, 引理 3, 引理 5—8, 定理 1 获证。

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. London: Springer, 2008.
[2] DOŠLIĆ T, MARTINJAK I, ŠKREKOVSKI R, et al. Mostar index[J]. Journal of mathematical chemistry, 2018, 56: 2995-3013.