山东大学学报(理学版)2025 年 8 月 第 60 卷 第 8 期
Journal of Shandong University (*Natural Science*), Vol.60, No.8, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)08-0013-08 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.453

四维欧氏空间中直纹面及其结构函数

曲瑞祥,田涵宇,于延华*
(东北大学理学院数学系, 辽宁 沈阳 110819)

摘要:在四维欧氏空间中,利用腰曲线的定义,提出直纹面的结构函数,将三维欧氏空间中的不可展直纹面及其标准方程推广到四维欧氏空间。通过直纹面的结构函数来研究曲面自身的性质,得到 4 类特殊伴随直纹面的结构函数、导线和腰曲线之间的关系,并对这些直纹面进行分类。最后给出导线是 Mannheim 曲线和第三型斜角螺线时结构函数的具体表达式,并计算此时伴随直纹面的平均曲率向量场。

关键词:四维欧氏空间;直纹面;结构函数;平均曲率向量场;特殊曲线
中图分类号:O185 **文献标志码**:A
引用格式:曲瑞祥,田涵宇,于延华.四维欧氏空间中直纹面及其结构函数[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(8):13-20.

Ruled surfaces in four-dimensional Euclidean space and their structural functions

QU Ruixiang, TIAN Hanyu, YU Yanhua*
(School of Science, Northeastern University, Shenyang 110819, Liaoning, China)

Abstract: In four-dimensional Euclidean space, utilizing the definition of a waist curve, the structure functions of ruled surfaces is proposed, extending the non-developable ruled surfaces and their standard equations in three-dimensional Euclidean space to four-dimensional Euclidean space. By studing the properties of the surface itself through the structural function of the ruled surface, the relationships between the structural functions, directors, and waist curves of four types of special associated ruled surfaces are obtained, and these four kinds of ruled surfaces are classified. Finally, specific expressions for the structural functions are given when the director is a Mannheim curve and a skew helix of the third type, and the mean curvature vector field of the associated ruled surface in these cases is calculated.

Key words: four-dimensional Euclidean space; ruled surface; structure function; mean curvature; special curve

0 引言

直纹面是单参数线集,是经典微分几何最重要的主题之一。直纹面的性质已经应用到运动学、建筑学和电学等不同领域[1-4]。专家学者们关于直纹面领域开展了很多深入研究。Liu 等[5]利用极限理论定义了三维欧氏空间中不可展直纹面的距离密度函数、平移密度函数和单位公垂线向量场,给出不可展直纹面的运动学表征,系统建立三维欧氏空间中直纹面的不变量理论,并在之后的工作中将理论拓展至中心仿射空间[6]和 Minkowski 空间[7]。2002 年,Saji[8]在四维欧氏空间中研究直纹面及其奇点相关问题。2021 年,Altin[9]研究了直纹面作为超曲面在四维欧氏空间中的问题。至此,高维空间中的直纹面得到研究。本文将三维直纹面相关性质和结构函数等问题推广到高维空间中,在四维欧氏空间研究直纹面及其伴随直纹面所具有的几何性质。

收稿日期:2023-12-03; **网络出版时间**:2025-04-09 16:35:01
基金项目:中央高校基本科研业务专项资金资助项目(N2104007)
第一作者:曲瑞祥(1999—),男,硕士研究生,研究方向为几何分析、微分几何. E-mail:a18954672168@163.com
* **通信作者**:于延华(1978—),女,副教授,博士,研究方向为几何分析、微分几何. E-mail:yyh_start@126.com

1 预备知识

设 E^4 是四维欧氏空间,其内积定义为 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4$,外积定义为

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}=\det\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4\end{vmatrix}。$$

向量 $\boldsymbol{x}$ 的模长定义为

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2},$$

其中,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,z_3,z_4)$, $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 是 E^4 中的标准正交基。

令 $r(s,t):M^2\to E^4$ 是四维欧氏空间中的一个曲面,设 $\boldsymbol{T}M^2$ 是曲面 M^2 的切平面,则 $E^4=\boldsymbol{T}M^2\oplus\boldsymbol{T}^\perp M^2$, $\boldsymbol{T}^\perp M^2$ 是切平面的正交补。曲面的高斯和 Weingarten 公式为

$$\widetilde{\nabla}_X\boldsymbol{Y}=\nabla_X\boldsymbol{Y}+h(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}), \tag{1}$$

$$\widetilde{\nabla}_X\boldsymbol{\xi}=-A_\xi\boldsymbol{X}+\nabla_X^\perp\boldsymbol{\xi}, \tag{2}$$

式中, $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{T}M^2$, $\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{T}^\perp M^2$, $\widetilde{\nabla}$ 和 ∇ 分别是 E^4 和 M^2 上的 Levi-Civita 联络, $\nabla^\perp$ 是 M^2 的法联络, h 为第二基本形式。设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2\}$ 为曲面在 E^4 中的标准正交基,则曲面的平均曲率向量为

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}h(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i), \tag{3}$$

其中,$\boldsymbol{r}_s=f\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{r}_t=g\boldsymbol{e}_2$, f、g 是光滑函数,此时曲面满足

$$\boldsymbol{r}_{ss}=\widetilde{\nabla}_{\boldsymbol{r}_s}\boldsymbol{r}_s=\Gamma_{11}^1\boldsymbol{r}_s+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{r}_t+h_{11}^1\boldsymbol{N}_1+h_{11}^2\boldsymbol{N}_2, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{r}_{st}=\widetilde{\nabla}_{\boldsymbol{r}_s}\boldsymbol{r}_t=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_s+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_t+h_{12}^1\boldsymbol{N}_1+h_{12}^2\boldsymbol{N}_2, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{r}_{tt}=\widetilde{\nabla}_{\boldsymbol{r}_t}\boldsymbol{r}_t=\Gamma_{22}^1\boldsymbol{r}_s+\Gamma_{22}^2\boldsymbol{r}_t+h_{22}^1\boldsymbol{N}_1+h_{22}^2\boldsymbol{N}_2, \tag{6}$$

式中 Γ 是联络系数。联络系数和曲率张量分别为

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kh}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right), \tag{7}$$

$$R_{1212}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\partial x^2}+\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\partial x^1}-\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^2\partial x^1}-\frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^1\partial x^2}\right)+\Gamma_{11}^h\Gamma_{22}^p g_{ph}-\Gamma_{12}^p\Gamma_{21}^h g_{ph}。 \tag{8}$$

设 $\boldsymbol{A}(s)$ 是 E^4 中以 s 为弧长参数的正则曲线,那么沿 $\boldsymbol{A}(s)$ 有切向量场 $\boldsymbol{t}(s)$、第一法向量场 $\boldsymbol{n}_1(s)$、第二法向量场 $\boldsymbol{n}_2(s)$、第三法向量场 $\boldsymbol{n}_3(s)$,且其满足 Frenet 公式

$$\begin{cases}\boldsymbol{t}'(s)=\kappa_1(s)\boldsymbol{n}_1(s),\\ \boldsymbol{n}_1'(s)=-\kappa_1(s)\boldsymbol{t}(s)+\kappa_2(s)\boldsymbol{n}_2(s),\\ \boldsymbol{n}_2'(s)=-\kappa_2(s)\boldsymbol{n}_1(s)+\kappa_3(s)\boldsymbol{n}_3(s),\\ \boldsymbol{n}_3'(s)=-\kappa_3(s)\boldsymbol{n}_2(s),\end{cases}$$

其中,$\kappa_1(s)$、$\kappa_2(s)$、$\kappa_3(s)$ 分别是 $\boldsymbol{A}(s)$ 的第一法曲率函数、第二法曲率函数和第三法曲率函数。

设 $\boldsymbol{x}(s)$ 是 E^4 中以 s 为弧长参数的单位球面曲线。令 $\boldsymbol{\alpha}(s)=\boldsymbol{x}'(s)$,这里 $\boldsymbol{x}'(s)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(s)}{\mathrm{d}s}$。令 $\boldsymbol{\beta}(s)=\dfrac{\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{\alpha}'(s)}{|\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{\alpha}'(s)|}$,记 $\kappa_{g_1}=|\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{\alpha}'(s)|$。令 $\boldsymbol{\gamma}(s)=\dfrac{\kappa_{g_1}\boldsymbol{\alpha}(s)+\boldsymbol{\beta}'(s)}{|\kappa_{g_1}\boldsymbol{\alpha}(s)+\boldsymbol{\beta}'(s)|}$,记 $\kappa_{g_2}=|\kappa_{g_1}\boldsymbol{\alpha}(s)+\boldsymbol{\beta}'(s)|$。由此得到 E^4 中的球面标架 $\{\boldsymbol{x}(s),\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\}$,其中 κ_{g_1}、κ_{g_2} 分别是单位球面曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的第一和第二球曲率函数,且满足公式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(s)=\boldsymbol{\alpha}(s), \\ \boldsymbol{\alpha}'(s)=-\boldsymbol{x}(s)+\kappa_{g_1}(s)\boldsymbol{\beta}(s), \\ \boldsymbol{\beta}'(s)=-\kappa_{g_1}(s)\boldsymbol{\alpha}(s)+\kappa_{g_2}(s)\boldsymbol{\gamma}(s), \\ \boldsymbol{\gamma}'(s)=-\kappa_{g_2}(s)\boldsymbol{\beta}(s)。 \end{cases} \tag{9}$$

2　E^4 中的直纹面及其结构函数

定义 1　由 E^4 中的空间曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 作为导线,由 $\boldsymbol{x}(s)$ 在每点处的的切向量作为直母线生成的直纹面称为切线面。同理可得第一法向量直纹面、第二法向量直纹面和第三法向量直纹面,这 4 类直纹面称为空间曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的伴随直纹面。

定义 2　设 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 是 E^4 中的直纹面,则 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 是可展曲面当且仅当 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 的切平面沿着直母线是不变的。

定义 3　对于不可展直纹面 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{b}(s)$, $|\boldsymbol{b}(s)|=1$ 且 $\boldsymbol{b}(s)$ 以 s 为弧长参数。当 $\langle \boldsymbol{A}'(s), \boldsymbol{b}'(s)\rangle=0$ 时,$\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{b}(s)$ 称为直纹面的标准方程,且 $\boldsymbol{A}(s)$ 称为 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 的腰曲线。令 $\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{b}(s)$,

$$\boldsymbol{A}'(s)=\lambda_1(s)\boldsymbol{x}(s)+\lambda_2(s)\boldsymbol{\beta}(s)+\lambda_3(s)\boldsymbol{\gamma}(s), \tag{10}$$

则 $\lambda_1(s)$、$\lambda_2(s)$、$\lambda_3(s)$、$\kappa_{g_1}(s)$ 和 $\kappa_{g_2}(s)$ 称为该直纹面的结构函数或直纹不变量。

证明　对于柱面,切平面 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{A}'(s),\boldsymbol{b}_0\}$ 随着 v 的变化不发生改变。

对于锥面 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}_0+v\boldsymbol{b}(s)$, $\boldsymbol{X}_s=\boldsymbol{b}'(s)$, $\boldsymbol{X}_v=\boldsymbol{b}(s)$。切平面 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{b}'(s),\boldsymbol{b}(s)\}$ 随着 v 的变化不发生改变。

设 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{t}(s)$ 是 $\boldsymbol{A}(s)$ 的切线面且 $\boldsymbol{A}'(s)=\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{X}_s=\boldsymbol{t}(s)+v\boldsymbol{t}'(s)$, $\boldsymbol{X}_v=\boldsymbol{t}(s)$。切平面 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{t}(s)+v\boldsymbol{t}'(s),\boldsymbol{t}(s)\}$ 随着 v 的变化不发生改变。

假设 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{b}(s)$ 是可展直纹面且不是柱面、锥面和切线面,$\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{b}(s)$ 满足 $|\boldsymbol{b}(s)|=|\boldsymbol{b}'(s)|=1$, $\langle \boldsymbol{A}',\boldsymbol{b}'\rangle=0$。由此可以得到 $\boldsymbol{A}'(s)=\lambda_1\boldsymbol{x}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{X}_s=\lambda_1\boldsymbol{x}+v\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{X}_v=\boldsymbol{x}$。因为 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 是可展直纹面,可以得到沿直母线切平面不变,即

$$\mathrm{span}\{\lambda_1\boldsymbol{x}+v_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{x}\}=\mathrm{span}\{\lambda_1\boldsymbol{x}+v_2\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{x}\},\quad \forall v_1\neq v_2,$$

所以 $\{\lambda_1\boldsymbol{x}+v_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{x}\}$ 与 $\{\lambda_1\boldsymbol{x}+v_2\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{x}\}$ 等价。

由此可得

$$\lambda_1\boldsymbol{x}+v_2\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma}=k_1(\lambda_1\boldsymbol{x}+v_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma})+k_2\boldsymbol{x},$$

$$\lambda_2=\frac{v_2}{v_1}\lambda_2,\quad \lambda_3=\frac{v_2}{v_1}\lambda_3,\quad \forall v_1\neq v_2,$$

即 $\lambda_2=\lambda_3=0$。

可知 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{b}(s)$ 是切线面,与假设不符,所以不存在柱面、锥面、切线面以外的可展直纹面。

定理 1　设 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 是 E^4 中的直纹面,其方程为 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{b}(s)$, $|\boldsymbol{b}(s)|=1$,则 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 是可展直纹面当且仅当 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 为柱面、锥面或曲线的切线面。

定理 2　令 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{b}(s)$ 是 E^4 的不可展直纹面,且 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 是标准方程。在不考虑位置的情况下,直纹面 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 由结构函数唯一确定。

证明　在不考虑位置的情况之下,给定结构函数 $\{\lambda_1(s),\lambda_2(s),\lambda_3(s),\kappa_{g_1}(s),\kappa_{g_2}(s)\}$,由式(9)可知球面曲线 $\boldsymbol{b}(s)$ 被 $\kappa_{g_1}(s)$、$\kappa_{g_2}(s)$ 唯一确定,由式(10)可知腰曲线被 $\lambda_1(s)$、$\lambda_2(s)$、$\lambda_3(s)$ 唯一确定,而直纹面 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{b}(s)$ 由腰曲线和直母线方向唯一确定。

由式(10)可计算得到

$$\boldsymbol{X}_s=\lambda_1\boldsymbol{x}+v\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma},\quad \boldsymbol{X}_v=\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{X}_{sv}=\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{X}_{vv}=\boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{X}_{ss}=(\lambda_1'-v)\boldsymbol{x}+(\lambda_1-\kappa_{g_1}\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}+(\kappa_{g_1}v+\lambda_2'-\kappa_{g_2}\lambda_3)\boldsymbol{\beta}+(\lambda_2\kappa_{g_2}+\lambda_3')\boldsymbol{\gamma}。$$

在直纹面法平面中选取直纹面单位法向量 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$,其中,

$$\boldsymbol{N}_1=\frac{-\lambda_2\boldsymbol{\alpha}+v\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\lambda_2^2+v^2}},\quad \boldsymbol{N}_2=\frac{-\lambda_3v\boldsymbol{\alpha}-\lambda_2\lambda_3\boldsymbol{\beta}+(\lambda_2^2+V^2)\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{\lambda_3v^2+(\lambda_2\lambda_3)^2+(\lambda_2^2+V^2)^2}}。$$

将上式代入式(4)、(5)和(6)可得直纹面的形状算子为

$$A_{N_1}=\begin{pmatrix} \dfrac{-\lambda_1\lambda_2+\kappa_{g_1}\lambda_2^2+\kappa_{g_1}v^2+\lambda_2' v-\kappa_{g_2}\lambda_3 v}{\sqrt{\lambda_2^2+v^2}} & \dfrac{-\lambda_2}{\lambda_2^2+v^2} \\ \dfrac{-\lambda_2}{\lambda_2^2+v^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{N_2}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{\lambda_3^2(\lambda_2^2+v^2)+(\lambda_2^2+v^2)^2}}{\lambda_2^2+v^2}\left(\lambda_2\kappa_{g_2}+\lambda_3'-\lambda_3\dfrac{\lambda_1 v+\lambda_2\lambda_2'+\lambda_3\lambda_3'}{\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2}\right) & \dfrac{(-\lambda_3 v)\sqrt{\lambda_3^2(\lambda_2^2+v^2)+(\lambda_2^2+v^2)^2}}{(\lambda_2^2+v^2)(\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2)} \\ \dfrac{(-\lambda_3 v)\sqrt{\lambda_3^2(\lambda_2^2+v^2)+(\lambda_2^2+v^2)^2}}{(\lambda_2^2+v^2)(\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2)} & 0 \end{pmatrix}。$$

由式(3)可得平均曲率向量为

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{-\lambda_1\lambda_2+\kappa_{g_1}\lambda_2^2+\kappa_{g_1}v^2+\lambda_2' v-\kappa_{g_2}\lambda_3 v}{\sqrt{\lambda_2^2+v^2}}N_1+\frac{\sqrt{\lambda_3^2(\lambda_2^2+v^2)+(\lambda_2^2+v^2)^2}}{\lambda_2^2+v^2}\left(\lambda_2\kappa_{g_2}+\lambda_3'-\lambda_3\frac{\lambda_1 v+\lambda_2\lambda_2'+\lambda_3\lambda_3'}{\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2}\right)N_2\right),$$

$$\nabla_{e_1}e_1=(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2)\frac{\lambda_1 v+\lambda_2\lambda_2'+\lambda_3\lambda_3'}{\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2}e_1+\left[\frac{-\lambda_1(\lambda_1\lambda_1'+\lambda_2\lambda_2'+\lambda_3\lambda_3')}{\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2}+\frac{(\lambda_1'-v)(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2)}{\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2}\right]e_2,$$

$$\nabla_{e_2}e_2=\left(\frac{-\lambda_1 v}{\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2}\right)e_2+(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2)\frac{v}{\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2}e_1,\quad \nabla_{e_1}e_2=\nabla_{e_2}e_1=O。$$

通过式(8)计算得到 $R_{1212}=\dfrac{\lambda_2^2+\lambda_3^2}{\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2}$。

命题 1 设 $X(s,v)=A(s)+vb(s)$ 是 E^4 中不可展直纹面的标准方程,那么 $X(s,v)$ 在点 (s,v) 处的高斯曲率为

$$K(s,v)=-\frac{\lambda_2^2+\lambda_3^2}{(\lambda_2^2+\lambda_3^2+v^2)^2}。$$

由此可见,E^4 中仍存在以下等价关系:

(1) $X(s,v)=A(s)+vb(s)$ 是可展直纹面;

(2) $X(s,v)=A(s)+vb(s)$ 与平面等距;

(3) 高斯曲率 $K=0$。

注记 1 由 $\lambda_1(u)=\langle A'(u),x(u)\rangle$,得到

$$\Lambda=\lambda_1(u)\mathrm{d}u=\langle A'(u),x(u)\rangle\mathrm{d}u=\langle \mathrm{d}A(u),x(u)\rangle,$$

定义了整体的 1-形式,因此 $J=\int_0^1\Lambda=\langle \mathrm{d}A(u),x(u)\rangle$ 是直纹面 $X(s,v)$ 上腰曲线的点沿 s_1 到 s_2 移动的距离。

注记 2 考虑 (α,β)-平面上的单位向量 $n_1=\cos\theta\alpha+\sin\theta\beta$,角度 θ 的总变化量称为向量 x 沿腰曲线运动时的第一螺角,由 1-形式给出 $\lambda_{x_1}=\oint\theta=-\oint\langle \mathrm{d}\alpha,\beta\rangle=\oint\kappa_{g_1}$。

注记 3 考虑 (β,γ)-平面上的单位向量 $n_2=\cos\theta\beta+\sin\theta\gamma$,角度 θ 的总变化量称为向量 x 沿腰曲线运动时的第二螺角,由 1-形式给出 $\lambda_{x_2}=\oint\theta=-\oint\langle \mathrm{d}\beta,\gamma\rangle=\oint\kappa_{g_2}$。

3 伴随直纹面的结构函数

3.1 空间曲线的第一法向量直纹面

空间曲线 $A(\tilde{s})$ 的第一法向量直纹面可以表示为 $X(s,v)=A(s)+vn_1(s)$,其中 $\tilde{s}$、s 分别是曲线 $A(\tilde{s})$ 和 $n_1(s)$ 的弧长参数。空间曲线 $A(\tilde{s})$ 的 Frenet 标架 $\{t(\tilde{s}),n_1(\tilde{s}),n_2(\tilde{s}),n_3(\tilde{s})\}$,令 $x(s)=n_1(s)$,有球面曲线标架 $\{x(s),\alpha(s),\beta(s),\gamma(s)\}$。

命题 2　以上定义的两组标架满足

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)\begin{pmatrix}0 & -\cos\theta & \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi\\ 0 & 0 & \sin\phi & -\cos\phi\end{pmatrix},$$

其中

$$\cos\theta(\tilde{s})=\frac{\kappa_1(\tilde{s})}{\sqrt{\kappa_1^2(\tilde{s})+\kappa_2^2(\tilde{s})}},\quad \sin\theta(\tilde{s})=\frac{\kappa_2(\tilde{s})}{\sqrt{\kappa_1^2(\tilde{s})+\kappa_2^2(\tilde{s})}},$$

$$\sin\phi(\tilde{s})=\frac{\kappa_3(\tilde{s})\sin\theta(\tilde{s})}{\sqrt{\theta'^2(\tilde{s})+\kappa_3^2(\tilde{s})\sin^2\theta(\tilde{s})}},\quad \cos\phi(\tilde{s})\frac{\theta'(\tilde{s})}{\sqrt{\theta'^2(\tilde{s})+\kappa_3^2(\tilde{s})\sin^2\theta(\tilde{s})}}。$$

证明　由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_1}{\mathrm{d}\tilde{s}}\cdot\frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}\tilde{s}}=\frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}s}(-\kappa_1\boldsymbol{t}+\kappa_2\boldsymbol{n}_2)$, $\frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}$, $\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{t}\cos\theta+\boldsymbol{n}_2\sin\theta$,

可得

$$\kappa_{g_1}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{x}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}\tilde{s}}\frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}s},\quad \kappa_{g_1}=\frac{\sqrt{\theta'^2+\kappa_3^2\sin^2\theta}}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}。$$

同理可得

$$\kappa_{g_2}=\left\langle\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s},\boldsymbol{\beta}\right\rangle=-\frac{\phi'+\kappa_3\cos\theta}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}},$$

则直纹面 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{n}_1(s)$ 的腰曲线为

$$\boldsymbol{a}(\tilde{s})=\boldsymbol{A}(\tilde{s})+\xi(\tilde{s})\boldsymbol{n}_1(\tilde{s})=\boldsymbol{A}(\tilde{s})+\frac{\kappa_1(\tilde{s})}{\kappa_1^2(\tilde{s})+\kappa_2^2(\tilde{s})}\boldsymbol{n}_1(\tilde{s})。$$

由此可得第一法向量直纹面的标准方程为

$$\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{a}(s)+v\boldsymbol{n}_1(s),$$

进一步求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}s}&=\lambda_1\boldsymbol{x}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma}\\&=\lambda_1\boldsymbol{n}_1+\lambda_2(\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{t}+\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{n}_2+\sin\phi\boldsymbol{n}_3)+\lambda_3(\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{t}+\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{n}_2-\cos\phi\boldsymbol{n}_3),\end{aligned}\tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}[(1-\xi\kappa_1)\boldsymbol{t}+\xi'\boldsymbol{n}_1+\xi\kappa_2\boldsymbol{n}_2]。\tag{12}$$

比较式(11)与式(12)可得结构函数:

$$\lambda_1=\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s},\quad \lambda_2=\int\lambda_1\mathrm{d}s\tan\theta\cos\phi,\quad \lambda_3=\int\lambda_1\mathrm{d}s\tan\theta\sin\phi。$$

定理 3　设 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{a}(s)+v\boldsymbol{b}(s)$ 是 E^4 中一个直纹面的方程,那么 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 是腰曲线 $\boldsymbol{A}(s)$ 的第一法向量直纹面当且仅当它的结构函数满足

$$\kappa_{g_1}=\Psi'+\tan\Phi\cot\Psi\Phi',\quad \kappa_{g_2}=-\frac{\Phi'}{\sin\Psi},$$

且腰曲线 $\boldsymbol{A}(s)=\boldsymbol{a}(s)-(\int\lambda_1\mathrm{d}s)\boldsymbol{b}(s)$,其中

$$\sin\Phi=\frac{\lambda_3}{\sqrt{(\int\lambda_1\mathrm{d}s)^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}},\quad \cos\Phi=\frac{\sqrt{(\int\lambda_1\mathrm{d}s)^2+\lambda_2^2}}{\sqrt{(\int\lambda_1\mathrm{d}s)^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}},$$

$$\sin\Psi=\frac{\lambda_2}{\sqrt{(\int\lambda_1\mathrm{d}s)^2+\lambda_2^2}},\quad \cos\Psi=\frac{\int\lambda_1\mathrm{d}s}{\sqrt{(\int\lambda_1\mathrm{d}s)^2+\lambda_2^2}}。$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}s}=-\left(\int\lambda_1\mathrm{d}s\right)\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma},$$

$$\boldsymbol{t}=-\cos\Psi\cos\Phi\boldsymbol{\alpha}+\sin\Psi\cos\Phi\boldsymbol{\beta}+\sin\Phi\boldsymbol{\gamma},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}=&\cos\Psi\cos\Phi\boldsymbol{x}+(\sin\Psi\Psi'\cos\Phi+\cos\Psi\sin\Phi\Phi'-\sin\Psi\cos\Phi\kappa_{g_1})\boldsymbol{\alpha}\\&+(\cos\Psi\Psi'\cos\Phi-\sin\Psi\sin\Phi\Phi'-\cos\Psi\cos\Phi\kappa_{g_1}-\sin\Phi\kappa_{g_2})\boldsymbol{\beta}\\&+(\cos\Phi\Phi'+\sin\Psi\cos\Phi\kappa_{g_2})\boldsymbol{\gamma}。\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{x}$，可得 $\kappa_{g_1}=\Psi'+\tan\Phi\cot\Psi\Phi'$，$\kappa_{g_2}=-\dfrac{\Phi'}{\sin\Psi}$。

3.2 空间曲线的第二法向量直纹面

空间曲线 $\boldsymbol{A}(\tilde{s})$ 的第二法向量直纹面可以表示为 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{n}_2(s)$，其中 $\tilde{s}$、s 分别是曲线 $\boldsymbol{A}(s)$、$\boldsymbol{n}_2(s)$ 的弧长参数。由 $\langle\boldsymbol{A}'(s),\boldsymbol{n}_2'(s)\rangle=\langle\boldsymbol{t}(\tilde{s})\dfrac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}s},(\kappa_3(s)\boldsymbol{n}_3(s)-\kappa_2(s)\boldsymbol{n}_1(s))\rangle=0$，可知 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{n}_2(s)$ 是标准方程。

命题 3 $\boldsymbol{A}(s)$ 的 Frenet 标架与 $\boldsymbol{n}_2(\tilde{s})=\boldsymbol{x}(\tilde{s})$ 的球面曲线标架满足

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)\begin{pmatrix}0&0&\sin\phi&\cos\phi\\0&-\cos\theta&\sin\theta\cos\phi&-\sin\theta\sin\phi\\1&0&0&0\\0&\sin\theta&\cos\theta\cos\phi&-\cos\theta\sin\phi\end{pmatrix}。$$

直纹不变量如下：

$$\kappa_{g_1}=\frac{\sqrt{\theta'^2+\kappa_1^2\cos^2\theta}}{\sqrt{\kappa_2^2+\kappa_3^2}},\quad\kappa_{g_2}=\frac{\phi'-k_1\sin\theta}{\sqrt{\kappa_2^2+\kappa_3^2}},\quad\lambda_1=0,\quad\lambda_2=\frac{\sin\phi}{\sqrt{\kappa_2^2+\kappa_3^2}},\quad\lambda_3=\frac{\cos\phi}{\sqrt{\kappa_2^2+\kappa_3^2}},$$

其中

$$\sin\theta=\frac{\kappa_3}{\sqrt{\kappa_2^2+\kappa_3^2}},\quad\cos\theta=\frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_2^2+\kappa_3^2}},$$

$$\sin\phi=\frac{\kappa_1\cos\theta}{\sqrt{\theta'^2+\kappa_1^2\cos^2\theta}},\quad\cos\phi=\frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2+\kappa_1^2\cos^2\theta}}。$$

定义 4[10] E^4 中一条正则曲线为 Mannheim 曲线当且仅当存在常数 ω，使该曲线的第一法曲率函数和第二法曲率函数满足关系式：$\omega\kappa_1^2=\kappa_1^2+\kappa_2^2$。

推论 1 如果存在常数 $\boldsymbol{A}$，使第二法向量直纹面的结构函数满足 $\boldsymbol{A}\kappa_{g_1}\lambda_1=\sqrt{\lambda_2^2+\lambda_3^2}$，则此直纹面是由 Mannheim 曲线生成，且其法曲率满足 $\kappa_1^2+\kappa_2^2=\omega\kappa_1^2$，其中 $\omega=\dfrac{\boldsymbol{A}+\sqrt{(\boldsymbol{A}-2)^2-4}}{2}(\boldsymbol{A}>4)$ 或者 $\dfrac{\boldsymbol{A}-\sqrt{(\boldsymbol{A}-2)^2-4}}{2}(\boldsymbol{A}<0)$。

3.3 空间曲线的第三法向量直纹面

空间曲线 $\boldsymbol{A}(\tilde{s})$ 的第三法向量直纹面表示为 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{n}_3(s)$，其中 $\tilde{s}$、s 分别是曲线 $\boldsymbol{A}(\tilde{s})$、$\boldsymbol{n}_3(\tilde{s})$ 的弧长参数。由 $\langle\boldsymbol{A}'(\tilde{s}),\boldsymbol{n}_3'(\tilde{s})\rangle=\langle\boldsymbol{t}(\tilde{s}),-k_3(s)\boldsymbol{n}_2(s)\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}}\rangle=0$ 可知 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{n}_3(s)$ 是标准方程。

命题 4 $\boldsymbol{A}(s)$ 的 Frenet 标架与 $\boldsymbol{n}_2(\tilde{s})=\boldsymbol{x}(\tilde{s})$ 的球面曲线标架满足

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}。$$

结构函数分别为

$$\kappa_{g_1}=\frac{\kappa_2}{\kappa_3},\quad \kappa_{g_2}=-\frac{\kappa_1}{\kappa_3},\quad \lambda_1=0,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=\frac{1}{\kappa_3}。$$

定理 4　设 S 是 E^4 中具有标准方程 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{b}(s)$ 的纹面,那么 $\boldsymbol{X}(s,v)$ 是腰曲线 $\boldsymbol{A}(s)$ 的第三法向量直纹面的充要条件为它的结构函数满足

$$\lambda_1(s)=\lambda_2(s)=0,\quad \lambda_3(s)\neq 0。$$

此时 $\boldsymbol{A}(s)$ 的 3 个曲率函数满足如下关系:

$$\kappa_1=-\frac{\kappa_{g_2}}{\lambda_3},\quad \kappa_2=\frac{\kappa_{g_1}}{\lambda_3},\quad \kappa_3=\frac{1}{\lambda_3}。$$

且该直纹面的平均曲率向量为 $\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\left[(\kappa_{g_1}v-\lambda_3\kappa_{g_2})\boldsymbol{N}_1+\frac{\lambda_3'v^2}{\lambda_3^2+v^2}\boldsymbol{N}_2\right]$。当结构函数 λ_3 是常数时,法向量 $\boldsymbol{N}_1$ 是单位平均曲率向量。

推论 2　如果存在常数 c,使第三法向量直纹面的结构函数满足 $\frac{\kappa_{g_1}}{\kappa_{g_2}}=c$,则此直纹面是由 Mannheim 曲线作为导线生成,其曲率函数满足 $\kappa_1^2+\kappa_2^2=(c^2+1)\kappa_1^2$。

定义 5[11]　E^4 中不存在以下曲线:

(1) 曲线的第一法向量与固定方向成常角;

(2) 曲线的第二法向量与固定方向成常角。

将第三法向量与固定方向成常角的曲线定义为第三型斜螺线,其曲率满足关系

$$\cos\delta\frac{\kappa_3}{\kappa_2}=P\cos\int_0^s\kappa_1\mathrm{d}s-Q\sin\int_0^s\kappa_1\mathrm{d}s,$$

螺线的固定方向可表示为

$$\boldsymbol{U}=\left(Q\cos\int_0^s\kappa_1\mathrm{d}s+P\sin\int_0^s\kappa_1\mathrm{d}s\right)\boldsymbol{t}+\cos\delta\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\boldsymbol{n}_1+\cos\delta\boldsymbol{n}_3,$$

其中,常角 $\delta\neq\frac{k}{2}\pi$,P、Q 均是实数。

推论 3　如果存在正数 P 和 Q,以及 $\delta\neq\frac{k}{2}\pi$,使得第三法直纹面满足

$$\cos\delta\frac{1}{\kappa_{g_1}}=-Q\cos\int_0^s\frac{\kappa_{g_2}}{\lambda_3}\mathrm{d}s-P\sin\int_0^s\frac{\kappa_{g_2}}{\lambda_3}\mathrm{d}s,$$

则此直纹面是由第三型斜螺线作为导线生成的,此时导线与固定方向

$$\boldsymbol{U}=\left(P\cos\int_0^s\frac{\kappa_{g_2}}{\lambda_3}\mathrm{d}s-Q\cos\int_0^s\frac{\kappa_{g_2}}{\lambda_3}\mathrm{d}s\right)\boldsymbol{\gamma}+\cos\delta\frac{1}{\kappa_{g_1}}\boldsymbol{\beta}+\cos\delta\boldsymbol{x}$$

成常角 δ。

3.4　空间曲线的切线面

空间曲线 $\boldsymbol{A}(\tilde{s})$ 的切线面可以表示为 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{t}(s)$,其中 $\tilde{s}$、s 分别是曲线 $\boldsymbol{A}(s)$、$\boldsymbol{t}(s)$ 的弧长参数。由 $\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{A}(s)+v\boldsymbol{t}(s)$ 是标准方程。直接计算可得

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\kappa_{g_1}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1},\quad \kappa_{g_2}=\frac{\kappa_3}{\kappa_1},\quad \lambda_1=\frac{1}{\kappa_1},\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=0。$$

这里假设 $\mathrm{d}s=\kappa_1\mathrm{d}\tilde{s}$。

且切线直纹面的平均曲率向量为

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\left(\kappa_{g_1} v \boldsymbol{N}_1+\frac{\lambda_1}{v} \boldsymbol{N}_2\right),$$

当结构函数 $\kappa_{g_1}=0$ 时,法向量 $\boldsymbol{N}_2$ 是单位平均曲率向量。

推论 4 若存在常数 c,使得切线直纹面的结构函数 $\kappa_{g_1}=c$,则此直纹面是由 Mannheim 曲线作为导线生成。

证明 如果 $\kappa_{g_1}=c$,由切线直纹面满足 $\kappa_{g_1}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}$, 即 $\kappa_1^2+\kappa_2^2=(1+c^2)\kappa_1^2$,则存在常数 $\omega=c^2+1$,满足 $\kappa_1^2+\kappa_2^2=\omega\kappa_1^2$,所以导线是 Mannheim 曲线。

推论 5 如果存在正数 P、Q 以及 $\delta \neq \frac{k}{2}\pi$,使得切线直纹面满足

$$\cos \delta \frac{\kappa_{g_2}}{\kappa_{g_1}}=Q \cos \int_0^s \frac{1}{\lambda_1} \mathrm{d}s-P \sin \int_0^s \frac{1}{\lambda_1} \mathrm{d}s,$$

则此直纹面是由第三型斜螺线生成。此时导线与固定方向

$$\boldsymbol{U}=\left(P \cos \int_0^s \frac{1}{\lambda_1} \mathrm{d}s+Q \cos \int_0^s \frac{1}{\lambda_1} \mathrm{d}s\right) \boldsymbol{x}+\cos \delta \frac{\kappa_{g_2}}{\kappa_{g_1}} \boldsymbol{\beta}+\cos \delta \boldsymbol{\gamma}$$

成常角 δ。

参考文献:

[1] RAVANI B, WANG J W. Computer aided geometric design of line constructs[J]. Journal of Mechanical Design, 1991, 113(4):363-371.

[2] HOSCHEK J. Eine verallgemeinerung des satzes von holditch[J]. Monatshefte Für Mathematik, 1975, 80(2):93-99.

[3] POTTMANN H, WALLNER J. Computational line geometry[J]. Journal of Theoretical Biology, 2001, 86(507):207-223.

[4] ELBER G, FISH R. 5-axis freeform surface milling using piecewise ruled surface approximation[J]. Journal of Manufacturing Science & Engineering, 1997, 119:383-387.

[5] LIU H L, YU Y H, JUNG S D. Invariants of non-developable ruled surfaces in Euclidean 3-space[J]. Beitrage zur Algebra und Geometrie, 2014, 55(1):189-199.

[6] YU Y H, YANG Y, LIU H L. Centroaffine ruled surfaces in $\mathbf{R}^3$[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 365(2):683-693.

[7] LIU H L. Characterizations of ruled surfaces with lightlike ruling in minkowski 3-space[J]. Results in Mathematics, 2009, 56(1):357.

[8] SAJI K. Singularities of non-degenerate 2-ruled hypersurfaces in 4-space[J]. Hiroshima Mathematical Journal, 2002, 32:309-323.

[9] ALTIN M, KAZAN A, YOON D W. 2-ruled hypersurfaces in Euclidean 4-space[J]. Journal of Geometry and Physics, 2021, 166:104236.

[10] MATSUD H, YOROZU S. On generalized Mannheim curves in Euclidean 4-space[J]. Nihonkai Mathematical Journal, 2009, 20(1):33-56.

[11] ALI A, TURGU M. Some characterizations of slant helices in the Euclidean space E^n[J]. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2010, 39:327-336.

(编辑:胡春燕)