

## 2-奇异变换半群 $T_n(2)$ 的秩

高荣海<sup>1</sup>, 徐波<sup>2</sup>

(1. 贵州师范大学学报编辑部, 贵州 贵阳 550025; 2. 贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550025)

**摘要:** 设自然数  $n \geq 4$ ,  $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\text{Sing}_n$  为  $X_n$  上的奇异变换半群, 对  $\alpha \in \text{Sing}_n$ , 或者存在  $x \in X_n \setminus \{1\}$ , 使得  $x\alpha = 1\alpha$ , 或者存在  $x \in X_n \setminus \{2\}$ , 使得  $x\alpha = 2\alpha$ , 称  $\alpha$  为 2-奇异变换. 由  $\text{Sing}_n$  中所有的 2-奇异变换构成的半群记为  $T_n(2)$ , 通过元素的生成关系得到半群  $T_n(2)$  的最小生成集, 确定了  $T_n(2)$  的秩为  $2n-3$ .

**关键词:** 2-奇异变换; 半群; 生成集; 秩

**中图分类号:** O152.7 **文献标志码:** A

**引用格式:** 高荣海, 徐波. 2-奇异变换半群  $T_n(2)$  的秩[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(11): 6-10, 15.

## Rank of the 2-singular transformation semigroup $T_n(2)$

GAO Ronghai<sup>1</sup>, XU Bo<sup>2</sup>

(1. Journal Editorial Department, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, Guizhou, China; 2. School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, Guizhou, China)

**Abstract:** Let  $n \geq 4$ ,  $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .  $\text{Sing}_n$  is singular transformation semigroup on  $X_n$ . for  $\alpha \in \text{Sing}_n$ ,  $\alpha$  is called 2-singular transformation if it exists  $x \in X_n \setminus \{1\}$  that satisfy  $x\alpha = 1\alpha$  or exists  $x \in X_n \setminus \{2\}$  that satisfy  $x\alpha = 2\alpha$ . Let  $T_n(2)$  be consisting of all 2-singular transformations in  $\text{Sing}_n$ . A minimum generating set is determined through the construction method, and it is proved that the rank of  $T_n(2)$  is  $2n-3$ .

**Key words:** 2-singular transformation; semigroup; generation set; rank

## 0 引言

半群理论中的 Cayley 定理不仅强调开展变换半群理论研究的重要意义, 也让人们认识到变换半群理论中丰富的具体模型与实例, 为认识和掌握抽象半群理论提供重要参照. 自然地, 对变换半群理论中具有某些限制的变换构成的子半类的研究就成为变换半群理论研究中的重要内容. 而在各类变换半群子类研究的课题中, 变换半群的极大子半群<sup>[1-3]</sup>、变换半群的分类<sup>[4]</sup>、半群的正则性<sup>[5]</sup>等是重要的研究方向. 在半群中由某些子集生成的子半群的研究方面, Howie<sup>[6]</sup>给出全变换半群中由幂等元生成的子半群结构, 又给出有限全变换半群幂等生成元集的特点<sup>[7]</sup>. 后来关于某些具有特殊性质的变换构成的子半群的生成集(秩或者幂等元秩)受到广大研究者的高度关注, 如, 文献[8]考虑有限全变换半群中具有保序和压缩性质的变换构成的半群的秩, 该类半群的元素特点是像具有连续性, 因此文献[9]依据文献[8]中元素的对偶特点, 即元素是核具有连续横截面的保序变换, 并得到该类半群的秩. 其他关于具有特殊性质的变换构成的子半群的秩、幂等元秩的众多研究结果见文献[10-14]. 考虑在  $X_n$  上的奇异变换半群中的变换  $\alpha$  (满足: 存在  $X_n \setminus \{1\}$  中的元素  $x$ , 使得  $x\alpha = 1\alpha$ ) 所构成的子半群, 给出该类半群的格林等价划分和秩<sup>[15-16]</sup>. 本文将此类半群稍加推广, 考虑如下半群.

设自然数  $n \geq 4$ ,  $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $X_n$  上奇异变换之集  $\text{Sing}_n$  在变换的复合下作成一个半群。如果  $\text{Sing}_n$  中的一个变换  $\alpha$  满足:或者存在  $X_n \setminus \{1\}$  中的元素  $x$ , 使得  $x\alpha = 1\alpha$ , 或者存在  $X_n \setminus \{2\}$  中的元素  $x$ , 使得  $x\alpha = 2\alpha$ , 则称  $\alpha$  为一个 2-奇异变换。 $X_n$  上一切 2-奇异变换构成的集合记作  $T_n(2)$ , 关于变换的复合运算构成  $\text{Sing}_n$  的子半群。得到  $\text{Sing}_n(2)$  的一个最小生成集, 当  $n \geq 4$  时,  $T_n(2)$  的秩为  $2n-3$ 。

为了方便阅读, 给出半群的秩的定义, 设  $S$  是一个半群, 半群  $S$  的秩, 通常记作  $\text{rank}(S)$ , 是指  $S$  的最小生成集的元素个数, 即  $\text{rank}(S) = \min\{|A| : A \subseteq S, \langle A \rangle = S\}$ 。

### 1 预备知识

设  $\alpha \in T_n(2)$ , 用  $\text{im}(\alpha)$ ,  $|\text{im}(\alpha)|$  以及  $\ker(\alpha)$  分别表示  $\alpha$  的象集,  $\alpha$  的象集中元素的个数以及等价关系  $\alpha^{-1} \circ \alpha = \{(x, y) \in X_n \times X_n : x\alpha = y\alpha\}$ , 若  $|\text{im}(\alpha)| = r$ ,  $1 \leq r \leq n-1$ , 则  $\alpha$  为

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{pmatrix},$$

其中,  $X_n$  关于等价关系  $\ker(\alpha)$  的商集  $X_n/\ker(\alpha) = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ , 而  $A_i$  在  $\alpha$  之下的象为  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ 。

为了表达上的方便, 在  $T_n(2)$  上引入以下几个二元关系, 对任意  $\alpha, \beta \in T_n(2)$ , 定义

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \in \mathcal{L}^\Delta &\Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta), \\ (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^\Delta &\Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta), \\ (\alpha, \beta) \in \mathcal{J}^\Delta &\Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|, \\ (\alpha, \beta) \in \mathcal{H}^\Delta &\Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) \text{ 且 } \ker(\alpha) = \ker(\beta), \end{aligned}$$

则  $\mathcal{H}^\Delta, \mathcal{L}^\Delta, \mathcal{R}^\Delta$  与  $\mathcal{J}^\Delta$  都是  $T_n(2)$  上的等价关系, 易见  $\mathcal{H}^\Delta = \mathcal{L}^\Delta \cap \mathcal{R}^\Delta$  且  $\mathcal{L}^\Delta \subseteq \mathcal{J}^\Delta, \mathcal{R}^\Delta \subseteq \mathcal{J}^\Delta$ 。对  $1 \leq r \leq n-1$ , 记  $J_r^\Delta = \{\alpha \in T_n(2) : |\text{im}(\alpha)| = r\}$ , 则  $J_1^\Delta, J_2^\Delta, \dots, J_{n-1}^\Delta$  恰好是  $T_n(2)$  的  $n-1$  个  $\mathcal{J}^\Delta$ -等价类, 并且  $T_n(2) = \cup_{r=1}^{n-1} J_r^\Delta$ 。顶端  $\mathcal{J}^\Delta$ -类  $J_{n-1}^\Delta$  中有如下的  $2n-3$  个  $\mathcal{R}^\Delta$ -类,  $n$  个  $\mathcal{L}^\Delta$ -类以及  $n(2n-3)$  个  $\mathcal{H}^\Delta$ -类

$$\begin{aligned} R^\Delta(i, j) &= \{\alpha \in J_{n-1}^\Delta : i\alpha = j\alpha\}, \quad i < j \leq n, \quad i = 1, 2, \\ L^\Delta(m) &= \{\alpha \in J_{n-1}^\Delta : \text{im}(\alpha) = X_n \setminus \{m\}\}, \quad 1 \leq m \leq n, \\ H^\Delta(i, j; m) &= R^\Delta(i, j) \cap L^\Delta(m), \quad i < j \leq n, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq m \leq n. \end{aligned}$$

### 2 主要结果及其证明

**定理 1** 设自然数  $n \geq 4$ , 则  $\text{rank } T_n(2) = 2n-3$ 。

为完成定理 1 的证明先给出若干引理与推论。

**引理 1** 对任意  $\alpha, \beta \in T_n(2)$ , 若  $(\alpha, \beta), (\alpha, \alpha\beta) \in \mathcal{J}^\Delta$ , 则  $(\alpha, \alpha\beta) \in \mathcal{R}^\Delta, (\alpha\beta, \beta) \in \mathcal{L}^\Delta$ 。

**证明** 对任意  $\alpha, \beta \in T_n(2)$ , 若  $(\alpha, \beta), (\alpha, \alpha\beta) \in \mathcal{J}^\Delta$ , 则  $|\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)| = |\text{im}(\alpha\beta)|$ 。

由  $X_n$  的有限性与  $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta), \ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta)$ , 知  $\text{im}(\alpha\beta) = \text{im}(\beta), \ker(\alpha) = \ker(\alpha\beta)$ , 即  $(\alpha, \alpha\beta) \in \mathcal{R}^\Delta, (\alpha\beta, \beta) \in \mathcal{L}^\Delta$ , 证毕。

由引理 1 知  $T_n(2)$  的任意一个生成集都必须覆盖  $J_{n-1}^\Delta$  中每个  $\mathcal{R}^\Delta$ -类和每个  $\mathcal{L}^\Delta$ -类, 而  $J_{n-1}^\Delta$  中共有  $2n-3$  个  $\mathcal{R}^\Delta$ -类与  $n$  个  $\mathcal{L}^\Delta$ -类。

**推论 1** 设自然数  $n \geq 4$ , 则  $\text{rank}(T_n(2)) \geq 2n-3$ 。

**引理 2** 对  $1 \leq r \leq n-2$ , 有  $J_r^\Delta \subseteq \langle J_{r+1}^\Delta \rangle$ 。

**证明**

$1 \leq r \leq n-2$ , 或者存在  $i (1 \leq i \leq r)$ , 使得  $|A_i| \geq 3$ ; 或者存在  $j, k (1 \leq j < k \leq r)$ , 使得  $|A_j| = |A_k| = 2$ 。下面分情况证明。

**情形 1** 存在  $i, 1 \leq i \leq r$ , 使得  $|A_i| \geq 3$ , 此时, 讨论 2 种可能。

**子情形 1.1** 存在  $a \in \{1, 2\} \cap A_i$ 。

由  $|A_i| \geq 3$ , 故存在与  $a$  不相等且互不相同的元素  $x, y \in X_n$ , 使得  $\{a, x, y\} \subseteq A_i$ . 为构造所需变换, 取  $z \in X_n \setminus \text{im}(\alpha)$ , 并对  $1 \leq s \leq r, s \neq i$ , 取元素  $b_s \in A_s$ , 记  $Y_1 = X_n \setminus (\{b_s \mid 1 \leq s \leq r, s \neq i\} \cup \{t, x\})$ . 构造  $X_n$  上的变换  $\beta, \gamma$  为

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & \{x\} & A_i \setminus \{x\} & \cdots & A_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & x & a & \cdots & b_r \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & \{x, a\} & \cdots & b_r & Y_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & \cdots & a_r & z \end{pmatrix},$$

则  $\beta, \gamma \in J_{r+1}^\Delta$  且  $\alpha = \beta\gamma \in \langle J_{r+1}^\Delta \rangle$ .

**子情形 1.2**  $\{1, 2\}$  与  $A_i$  不相交, 即  $\{1, 2\} \cap A_i = \emptyset$ .

此时必存在  $m \neq i, 1 \leq m \leq r$  (不失一般性可设  $m < i$ ), 存在  $a \in \{1, 2\}$ , 以及与  $a$  不相等且互不相同的元素  $t, x, y \in X_n$ , 使得  $\{a, t\} \subseteq A_m, \{x, y\} \subseteq A_i$ . 为构造变换, 取  $z \in X_n \setminus \text{im}(\alpha)$ , 并对  $1 \leq s \leq r, s \notin \{m, i\}, b_s \in A_s$ .

记  $Y_2 = X_n \setminus (\{b_s \mid 1 \leq s \leq r, s \notin \{m, i\}\} \cup \{a, t\} \cup \{x, y\})$ . 构造  $X_n$  上的变换  $\beta, \gamma$  为

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{m-1} & A_m & \cdots & A_{i-1} & \{x\} & A_i \setminus \{x\} & \cdots & A_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & a & \cdots & b_{i-1} & x & y & \cdots & b_r \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & \{a, t\} & \cdots & b_{i-1} & \{x, y\} & \cdots & b_r & Y_2 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots & a_{i-1} & a_i & \cdots & a_r & z \end{pmatrix},$$

则  $\beta, \gamma \in J_{r+1}^\Delta$  且  $\alpha = \beta\gamma \in \langle J_{r+1}^\Delta \rangle$ .

**情形 2** 对每一个  $i (1 \leq i \leq r)$ , 都有  $|A_i| \leq 2$ .

此时, 由  $n \geq 4, 1 \leq r \leq n-2$ , 必存在  $j, k (1 \leq j < k \leq r)$ , 使得  $|A_j| = |A_k| = 2$ . 下面讨论 2 种可能.

**子情形 2.1** 存在  $a \in \{1, 2\} \cap (A_j \cup A_k)$ .

不失一般性可设  $a \in A_j$ , 由  $|A_j| = |A_k| = 2$ , 存在与  $a$  不相等且互不相同的元素  $t, x, y \in X_n$ , 使得  $\{a, t\} \subseteq A_j, \{x, y\} \subseteq A_k$ . 为构造变换,  $z \in X_n \setminus \text{im}(\alpha)$ , 对  $1 \leq s \leq r, s \notin \{j, k\}, b_s \in A_s$ , 记  $Y_3 = X_n \setminus (\{b_s \mid 1 \leq s \leq r, s \notin \{j, k\}\} \cup \{a, t, y\})$ . 构造  $X_n$  上的变换  $\beta, \gamma$  为

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{j-1} & A_j & \cdots & A_{k-1} & \{x\} & \{y\} & \cdots & A_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{j-1} & t & \cdots & b_{k-1} & a & y & \cdots & b_r \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{j-1} & \{t\} & \cdots & b_{k-1} & \{a, y\} & \cdots & b_r & Y_3 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{j-1} & a_j & \cdots & a_{k-1} & a_k & \cdots & a_r & z \end{pmatrix},$$

则  $\beta, \gamma \in J_{r+1}^\Delta$  且  $\alpha = \beta\gamma \in \langle J_{r+1}^\Delta \rangle$ .

**子情形 2.2**  $\{1, 2\} \cap (A_j \cup A_k) = \emptyset$ .

必存在  $m \notin \{j, k\}, 1 \leq m \leq r$ , 不失一般性可设  $m < j$ , 存在  $a \in \{1, 2\}$ , 与  $a$  不相等且互不相同的元素  $t, x, y \in X_n$ , 使得  $\{a, t\} \subseteq A_m, \{x, y\} \subseteq A_j$ .

为构造变换,  $z \in X_n \setminus \text{im}(\alpha)$ , 对  $1 \leq s \leq r, s \notin \{m, j\}, b_s \in A_s$ . 记  $Y_4 = X_n \setminus (\{b_s \mid 1 \leq s \leq r, s \notin \{m, j\}\} \cup \{a, t, y\})$ . 构造  $X_n$  上的变换  $\beta, \gamma$  为

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{m-1} & A_m & \cdots & A_{j-1} & \{x\} & \{y\} & \cdots & A_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & t & \cdots & b_{j-1} & a & y & \cdots & b_r \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & \{t\} & \cdots & b_{j-1} & \{a, y\} & \cdots & b_r & Y_4 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots & a_{j-1} & a_j & \cdots & a_r & z \end{pmatrix},$$

则  $\beta, \gamma \in J_{r+1}^\Delta$  且  $\alpha = \beta\gamma \in \langle J_{r+1}^\Delta \rangle$ .

**推论 2** 设自然数  $n \geq 4$ , 则  $J_{n-1}^\Delta$  是  $T_n(2)$  的生成集, 即  $T_n(2) = \langle J_{n-1}^\Delta \rangle$ .

为构造最小生成集, 设自然数  $n \geq 4$ , 考察  $T_n(2)$  中的变换

$$\alpha_0, \theta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-2}, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-1}, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-2}.$$

上述变换分别定义为

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{3\} & \{4\} & \cdots & \{n\} \\ 3 & 2 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}, \\ \theta_0 &= \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{3\} & \{4\} & \cdots & \{n-1\} & \{n\} \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 2 \end{pmatrix}, \\ \beta_1 &= \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{3\} & \{4\} & \cdots & \{n\} \\ 1 & 2 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}, \\ \beta_{n-2} &= \begin{pmatrix} \{1,n-1\} & \{2\} & \cdots & \{n-2\} & \{n\} \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}, \\ \gamma_1 &= \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{3\} & \cdots & \{n-1\} & \{n\} \\ 1 & 4 & \cdots & n & 3 \end{pmatrix}, \\ \gamma_{n-1} &= \begin{pmatrix} \{1,n\} & \{2\} & \cdots & \{n-2\} & \{n-1\} \\ 1 & 4 & \cdots & n & 3 \end{pmatrix}, \\ \sigma_1 &= \begin{pmatrix} \{1\} & \{2,3\} & \{4\} & \{5\} & \cdots & \{n\} \\ 3 & n & 2 & 4 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_{n-2} &= \begin{pmatrix} \{1\} & \{2,n\} & \{3\} & \cdots & \{n-1\} \\ 2 & n & 3 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

对  $2 \leq i \leq n-3$ ,

$$\beta_i = \begin{pmatrix} \{1,i+1\} & \{2\} & \cdots & \{i\} & \{i+2\} & \{i+3\} & \cdots & \{n\} \\ 1 & 2 & \cdots & i & i+1 & i+3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

对  $2 \leq i \leq n-2$ ,

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} \{1,i+1\} & \{2\} & \cdots & \{i\} & \{i+2\} & \cdots & \{n-1\} & \{n\} \\ 1 & 4 & \cdots & i+2 & i+3 & \cdots & n & 3 \end{pmatrix}.$$

对  $2 \leq i \leq n-3$ ,

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2,i+2\} & \{3\} & \cdots & \{i+1\} & \{i+3\} & \cdots & \{n\} \\ 2 & i+2 & 3 & \cdots & i+1 & i+3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

**引理 3** 设自然数  $n \geq 4$ ,  $\alpha_0, \theta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-2}, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-2}$  定义如前, 则

- (1)  $\theta_0 = \gamma_1 \alpha_0$ ,  $\alpha_0 = \gamma_1 \sigma_1$ , 且  $\gamma_i = \beta_i \gamma_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n-2$ ;
- (2)  $H^\Delta(1, k; 1) = \gamma_{m-1} H^\Delta(1, 2; 1)$ ,  $3 \leq k \leq n$ ;
- (3)  $H^\Delta(1, 2; 2) = H^\Delta(1, 2; 1) \gamma_1$ ,  $H^\Delta(1, 2; j) = H^\Delta(1, 2; 1) \beta_{j-2}$ ,  $3 \leq j \leq n$ ;
- (4)  $H^\Delta(2, k+2; 1) = \sigma_k H^\Delta(1, 2; 1)$ ,  $1 \leq k \leq n-2$ ;
- (5)  $H^\Delta(1, j; m) = H^\Delta(1, j; 1) H^\Delta(1, 2; m)$ ,  $3 \leq j \leq n$ ,  $2 \leq m \leq n$ .
- (6)  $H^\Delta(2, j; m) = H^\Delta(2, j; 1) H^\Delta(1, 2; m)$ ,  $3 \leq j \leq n$ ,  $2 \leq m \leq n$ .

**证明** 这里以(6)为例证明, 其余可类似证得. 对给定的  $j, m, 3 \leq j \leq n$ ,  $2 \leq m \leq n$ , 只须证明  $H^\Delta(2, j; m) \subseteq H^\Delta(2, j; 1) H^\Delta(1, 2; m)$ ,  $H^\Delta(2, j; 1) H^\Delta(1, 2; m) \subseteq H^\Delta(2, j; m)$  即可.

先证  $H^\Delta(2, j; m) \subseteq H^\Delta(2, j; 1) H^\Delta(1, 2; m)$ . 任取  $\sigma \in H^\Delta(2, j; m)$ , 则  $\text{im}(\sigma) = X_n \setminus \{m\}$ ,  $X_n / \ker(\sigma)$  中唯一的非单点核类为  $\{2, j\}$ , 故  $\sigma$  为

$$\sigma = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2,j\} & \cdots & \{j-1\} & \{j+1\} & \cdots & \{n\} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{j-1} & a_j & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

其中  $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j, \dots, a_{n-1}$  是  $X_n \setminus \{m\}$  的一个全排列. 构造  $\mu, \phi$  为

$$\begin{aligned} \mu &= \begin{pmatrix} \{1\} & \{2,j\} & \cdots & \{j-1\} & \{j+1\} & \cdots & \{n\} \\ 2 & 3 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}, \\ \phi &= \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{3\} & \cdots & \{j\} & \{j+1\} & \cdots & \{n\} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{j-1} & a_j & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

则  $\mu \in H^\Delta(2, j; 1)$ ,  $\phi \in H^\Delta(1, 2; m)$ , 且  $\sigma = \mu \phi$ .

再证  $H^\Delta(2, j; 1)H^\Delta(1, 2; m) \subseteq H^\Delta(2, j; m)$ 。任取  $\mu \in H^\Delta(2, j; 1)$ ,  $\phi \in H^\Delta(1, 2; m)$ , 则  $\mu, \phi$  为

$$\mu = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2, j\} & \cdots & \{j-1\} & \{j+1\} & \cdots & \{n\} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{j-1} & b_j & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & \{3\} & \cdots & \{j-1\} & \{j\} & \cdots & \{n\} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{j-1} & a_j & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

其中  $b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, b_j, \dots, b_{n-1}$  是  $X_n \setminus \{1\}$  的一个全排列,  $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j, \dots, a_{n-1}$  是  $X_n \setminus \{m\}$  的一个全排列。

注意到  $b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, b_j, \dots, b_{n-1}$  是  $X_n \setminus \{1\}$  的一个全排列, 所以  $b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, b_j, \dots, b_{n-1}$  是  $X_n / \ker(\phi)$  的一个横截面(或者代表元系)。 $\ker(\mu\phi) = \ker(\mu)$ ,  $\text{im}(\mu\phi) = \text{im}(\phi)$ ,  $\mu\phi \in H^\Delta(2, j; m)$ 。由  $\mu, \phi$  的任意性, 得  $H^\Delta(2, j; 1)H^\Delta(1, 2; m) \subseteq H^\Delta(2, j; m)$ 。

**引理 4** 设自然数  $n \geq 4$ ,  $\alpha_0, \theta_0$  定义如前, 则  $H^\Delta(1, 2; 1)$  由  $\alpha_0, \theta_0$  生成。

**证明** 注意到  $H^\Delta(1, 2; 1)$  与  $n-1$  元集合  $Y = \{2, 3, \dots, n\}$  上的对称群  $S_Y$  同构, 而  $S_Y$  由一个对换(23)和一个  $n-1$  元循环置换(23...n)生成, 由此可知  $H^\Delta(1, 2; 1)$  由  $\alpha_0, \theta_0$  生成。

**推论 3** 设自然数  $n \geq 4$ ,  $W_0 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-2}, \gamma_{n-1}, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-2}\}$ , 则  $J_{n-1}^\Delta \subseteq \langle W_0 \rangle$ 。

**定理 1 的证明。** 由推论 2、3, 得  $T_n(2) = \langle W_0 \rangle$ , 注意到  $W_0$  的元素个数  $|W_0| = 2n-3$ , 结合推论 1 即证  $\text{rank } T_n(2) = 2n-3$ 。

#### 参考文献:

- [1] NICHOLS J W. A class of maximal inverse subsemigroups of full transformation semigroup[J]. Semigroup Forum, 1976, 11: 187-188.
- [2] TODOROV K, KRACOLOVA L. On the maximal subsemigroup of the ideals of a finite symmetric semigroups[J]. Simon Stevin, 1985, 59:129-140.
- [3] 张心茹, 罗永贵. 半群  $A_k^*(T_n)$  的极大正则子半群[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2022, 40(5): 99-103.  
ZHANG Xinru, LUO Yonggui. The maximal regular subsemigroups of the semigroup  $A_k^*(T_n)$ [J]. Journal of Guizhou Normal University(Natural Sciences), 2022, 40(5): 99-103.
- [4] 史先锋, 罗永贵. 半群  $A_k^*I_n$  的(完全)独立子半群的完全分类[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2023, 41(2): 86-90.  
SHI Xianfeng, LUO Yonggui. The complete classifications of (completely) isolated subsemigroups of the semigroup  $A_k^*I_n$ [J]. Journal of Guizhou Normal University(Natural Sciences), 2023, 41(2): 86-90.
- [5] 赵颐, 戴先胜. 半群  $\mathcal{S}_n(r)$  的正则性[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2024, 42(6): 78-80.  
ZHAO Yi, DAI Xiansheng. The regularity of the semigroup  $\mathcal{S}_n(r)$ [J]. Journal of Guizhou Normal University (Natural Sciences), 2024, 42(6): 78-80.
- [6] HOWIE J M. The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semigroups[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1966, 41:707-716.
- [7] HOWIE J M. Idempotent generators in finite full transformation semigroups[J]. Proceedings of the Royal Society Edinburgh Section A-Mathematics, 1978, A81:317-323.
- [8] 徐波, 冯荣权, 高荣海. 一类变换半群的秩[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(8): 222-224.  
XU Bo, FENG Rongquan, GAO Ronghai. The rank of a class of transformation semigroups[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2010, 40(8): 222-224.
- [9] 高荣海, 徐波. 半群  $OCK_n$  的理想的秩[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2013, 49(3): 384-388.  
GAO Ronghai, XU Bo. On the rank of the ideals for semigroup  $OCK_n$ [J]. Journal of Lanzhou University(Natural Sciences), 2013, 49(3): 384-388.
- [10] 龚何余, 舒琴, 赵平. 半群  $CF(n, r)$  的幂等元秩[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(10): 122-126.  
GONG Heyu, SHU Qin, ZHAO Ping. On the rank of semigroup  $CF(n, r)$ [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2024, 59(10): 122-126.
- [11] 高荣海, 徐波, 曾吉文. 定点保距部分一一变换半群[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2018, 54(6): 836-840.  
GAO Ronghai, XU Bo, ZENG Jiwen. On the semigroups of partial one-to-one distance-preserving mappings with respect to a fixed point[J]. Journal of Lanzhou University(Natural Sciences), 2018, 54(6): 836-840.