山东大学学报(理学版)2025 年 11 月 第 60 卷 第 11 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.11, 2025　　http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)11-0153-06　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.085

相容连续偏序集上的 *ce*-拓扑和 *cp*-拓扑

郭智莲[1],杨海龙[2*]
(1.西北政法大学经济学院, 陕西 西安 710063; 2.陕西师范大学数学与统计学院, 陕西 西安 710119)

摘要:在相容定向完备偏序集上引入 *ce*-拓扑和 *cp*-拓扑的概念,给出在相容连续偏序集上的两类拓扑若干性质,证明相容连续偏序集上的基是 *cp*-拓扑的稠密集。
关键词:相容连续偏序集;*ce*-拓扑;*cp*-拓扑;连续格
中图分类号:O153.1　　**文献标志码**:A
引用格式:郭智莲,杨海龙. 相容连续偏序集上的 *ce*-拓扑和 *cp*-拓扑[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):153-158.

The *ce*-topology and *cp*-topology on consistently continuous posets

GUO Zhilian[1], YANG Hailong[2*]
(1. College of Economics, Northwest University of Political Science and Law, Xi'an 710063, Shaanxi, China; 2. College of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, Shaanxi, China)

Abstract: The definitions of *ce*-topology and *cp*-topology on consistently directedly complete posets are introduced. Some properties of them on consistently continuous posets are given. Furthermore, it is obtained that the basis on a consistently continuous partial order set is topologically dense.
Key words: consistently continuous posets; *ce*-topology; *cp*-topology; continuous lattice

0　引言

连续格理论[1]自提出以来,学者们进一步将连续格概念推广到连续偏序集概念,Domain[2]是特殊的连续偏序集,Domain 理论为计算机程序设计语言指称语义学奠定了数学基础,学者们也推广了 Domain 理论[3-12]。文献[13]结合 **R** 与 **N** 的序结构特点给出相容连续偏序集的概念,指出 **R** 是相容连续偏序集,**N** 是相容代数偏序集。文献[14-15]给出了相容连续偏序集和其上 Scott 拓扑的一些基本性质,刻画了 Scott 拓扑的基。

受文献[16]的启发,本文引入了相容定向完备偏序集上的 *ce*-拓扑和 *cp*-拓扑等概念,得到了许多基本性质,得到了相容连续偏序集上基的若干等价刻画,证明了相容连续偏序集的基恰好是 *cp*-拓扑的稠密集。

1　预备知识

设$(L,\leqslant)$是一个偏序集,L 的全体子集记作 2^L,设 $X\subseteq L$,令 $\downarrow X=\{y\in L\mid \exists x\in L$,使得 $y\leqslant x\}$, $\uparrow X=\{y\in L\mid \exists x\in L$,使得 $y\geqslant x\}$。特殊地, $\downarrow\{x\}=\downarrow x$。当 $\downarrow X=X$ 时,称 X 是下集;当 $\uparrow X=X$ 时,称 X 是上集[1-2]。

收稿日期:2024-03-14;**网络出版时间**:2025-03-06 17:49:01
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12171293);西北政法大学研究生教育教学改革研究项目(YJZC202312)
第一作者:郭智莲(1980—),女,副教授,硕士生导师,博士,主要研究方向为格上拓扑与模糊推理. E-mail:gzl_434@163.com
*通信作者:杨海龙(1977—),男,教授,博士生导师,博士,主要研究方向为智能信息处理与决策. E-mail:yanghailong@snnu.edu.cn

定义 1[13] 设 L 为偏序集,$\varnothing \neq D \subseteq L$,如果(1)$D$ 是定向集;(2)存在 $x \in L$,使得 $D \subseteq \downarrow x$,则称 D 为 L 的相容定向集。

定义 2[13] 设 L 为偏序集,若对于 L 中的任意相容定向子集 D,在 L 中都有最小的上界(即上确界 $\bigvee D$),则称 L 是相容定向完备偏序集。

定义 3[13] 设 L 是相容定向完备偏序集,定义 L 上的 Way-below 关系“$\ll$”如下:$\forall x,y \in L$,若对于 L 中的相容定向集 D,当 $y \leqslant \bigvee D$ 时,$\exists d \in D$,使得 $x \leqslant d$,则称 x 相容双小于 y,记作 $x \ll y$。记 $\Downarrow x = \{s \in L \mid s \ll x\}$,$\Uparrow x = \{t \in L \mid x \ll t\}$,分别称为 x 的 Way-below 下集和上集。当 $x \ll x$ 时,称 x 是 L 的紧元,L 的所有紧元之集记作 $K_c(L)$。

定义 4[13] 设 L 是相容定向完备偏序集,如果满足以下 2 个条件:

(1) $\forall x \in L$, $\Downarrow x$ 是相容定向集;

(2) $\forall x \in L$, $x = \bigvee \Downarrow x$,

则称 L 是一个相容连续偏序集。

注 1 已有的多种广义连续偏序集,未见到能恰当体现 **R**、**N** 这些基本对象序结构特点的具体研究。文献[13]引入相容连续偏序集概念,指出 **R** 是相容连续偏序集,**N** 是相容代数偏序集,而且任一相容连续偏序集都紧密联系一个连续偏序集,即它的定向完备化。

命题 1[13] 设 L 是相容定向完备偏序集,则下列结论成立:

(1) $x \ll y \Rightarrow x \leqslant y$;

(2) $s \leqslant x \ll y \leqslant t \Rightarrow s \ll t$;

(3) 若 L 有最小元 0_L,则 $\forall x \in L$, $0_L \ll x$。

命题 2[13] 设 L 是相容连续偏序集, $\forall x,y \in L$,若 $x \ll y$ 且 $x \neq y$,则 $\exists z \in L$,使得 $x \ll z \ll y$ 且 $x \neq z$。

定义 5[13] 若 $I = \downarrow D$,其中 D 是 L 中的相容定向集,则称 I 是 L 上的相容理想,L 的全体相容理想之集记作 $I_c(L)$。

命题 3[14] 设 L 为相容定向完备偏序集,$x,y \in L$,则 $x \ll y$ 当且仅当 $\forall I \in I_c(L)$,若 $y \leqslant \bigvee I$,则 $x \in I$。

定义 6[13] 设 L 是一个相容定向完备偏序集,$B \subseteq L$,称 B 是 L 的基当且仅当满足以下条件:

(1) $\forall x \in L$, $\Downarrow x \cap B$ 是 L 的相容定向集;

(2) $x = \bigvee (\Downarrow x \cap B)$。

命题 4[14] 设 L 是相容连续偏序集,$B \subseteq L$,则下列条件等价:

(1) B 是 L 的基;

(2) $\forall x,y \in L$,若 $x \ll y$,则存在 $b \in B$,使得 $x \leqslant b \ll y$;

(3) $\forall x,y \in L$,若 $x \ll y$,则存在 $b \in B$,使得 $x \ll b \ll y$。

定义 7[13] 设 L 是相容定向完备偏序集,$U \subseteq L$,如果 U 满足以下条件:

(1) $\uparrow U = U$;

(2) 对 L 中的任意相容定向集 D,当 $\bigvee D \in U$ 时,有 $U \cap D \neq \varnothing$,则称 U 为 L 上的 Scott 开集,L 上的 Scott 开集全体是 L 上的一个拓扑,记为 $\sigma(L)$,称为 Scott 拓扑。

命题 5[14] 设 L 是相容连续偏序集,则下列性质成立:

(1) $\forall x \in L$, $\Uparrow x \in \sigma(L)$;

(2) U 是 Scott 开集当且仅当 $\uparrow U = U$ 且 $y \in U \Rightarrow \exists x \in U$,使得 $x \ll y$;

(3) $\{\Uparrow x \mid x \in L\}$ 是 Scott 拓扑空间 $(L, \sigma(L))$ 的一个基;

(4) $\{\Uparrow x \mid x \in B\}$ 是 Scott 拓扑空间 $(L, \sigma(L))$ 的一个基,其中 B 是 L 的基;

(5) 设 $I \in I_c(L)$,则 $U \in \sigma(L) \Leftrightarrow$ 当 $\bigvee I \in U$ 时,有 $U \cap I \neq \varnothing$。

2 *ce*-拓扑

定义 8 设 L 是相容定向完备偏序集,定义映射 $\Downarrow$: $2^L \to 2^L$ 为,$\forall M \in 2^L$,有 $\Downarrow M = \bigcup_{x \in M} \Downarrow_x$。同样的,定义

映射 $\Uparrow: 2^L \to 2^L$, $\forall M \in 2^L$,有 $\Uparrow M = \bigcup_{x \in M} \Uparrow x$。

定理 1　设 L 是相容定向完备偏序集, $\forall \{M_i\}_{i \in I} \subseteq 2^L$ 和 $\forall M, N \in 2^L$,如下结论成立:

(1) $\Downarrow \varnothing = \varnothing$, $\Uparrow \varnothing = \varnothing$;

(2) $\Downarrow(\bigcup_{i \in I} M_i) = \bigcup_{i \in I} \Downarrow M_i$, $\Uparrow(\bigcup_{i \in I} M_i) = \bigcup_{i \in I} \Uparrow M_i$;

(3) $M \subseteq N \Rightarrow \Downarrow M \subseteq \Downarrow N$, $M \subseteq N \Rightarrow \Uparrow M \subseteq \Uparrow N$;

(4) $\Downarrow M \setminus \Downarrow N \subseteq \Downarrow(M \setminus N)$, $\Uparrow M \setminus \Uparrow N \subseteq \Uparrow(M \setminus N)$;

(5) $\Downarrow(\Downarrow M) \subseteq \Downarrow M$, $\Uparrow(\Uparrow M) \subseteq \Uparrow M$。

定义 9　设 L 是相容定向完备偏序集, $M \subseteq L$, 当 $\Downarrow M \subseteq M$ 时,称 M 是 L 的 ce-开集,称 L 的 ce-开集的补集为 ce-闭集。

定理 2　设 L 是相容定向完备偏序集,则

(1) L 的 ce-开集全体构成拓扑,称为 ce-拓扑,记作 $ce(L)$。对于任意一族 ce-开集,它们的交集仍是 ce-开集;

(2) $\{\{x\} \cup \Downarrow x \mid x \in L\}$ 是 L 上 ce-拓扑的一个基;

(3) 设 $N \subseteq L$, N 是 ce-闭集当且仅当 $\Uparrow N \subseteq N$;

(4) $\forall M \subseteq L$, $\Downarrow M$ 是 ce-开集, $\Uparrow M$ 是 ce-闭集。

证明　(1) 由定理 1(1) 知 $\varnothing \in ce(L)$,显然 $\Downarrow L \subseteq L$,从而 $L \in ce(L)$。设 $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq ce(L)$,由定理 1(2) 知, $\Downarrow(\bigcup_{i \in I} M_i) = \bigcup_{i \in I} \Downarrow M_i \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$,故 $\bigcup_{i \in I} M_i \in ce(L)$,因此 $ce(L)$ 是 L 上的拓扑。$\Downarrow(\bigcap_{i \in I} M_i) = \bigcap_{i \in I} \Downarrow M_i \subseteq \bigcap_{i \in I} M_i$,故 $\bigcap_{i \in I} M_i \in ce(L)$。

(2) 由定理 1(5)、(2) 知, $\Downarrow(\{x\} \cup \Downarrow x) = \Downarrow x \cup \Downarrow(\Downarrow x) \subseteq \Downarrow x \cup \Downarrow x = \Downarrow x \subseteq \{x\} \cup \Downarrow x$,从而 $\{x\} \cup \Downarrow x \in ce(L)$。下面证明当 $M \in ce(L)$ 且 $x \in M$ 时, $\{x\} \cup \Downarrow x \subseteq M$。$\forall y \in \{x\} \cup \Downarrow x$,若 $y \in \{x\}$,则 $y \in M$;若 $y \in \Downarrow x \subseteq M$,则 $y \in M$,故 $\{x\} \cup \Downarrow x \subseteq M$。因此, $\{\{x\} \cup \Downarrow x \mid x \in L\}$ 是 L 上 ce-拓扑的一个基。

(3) 设 N 是 ce-闭集, $\forall x \in \Uparrow N$,则存在 $y \in N$,使得 $y \ll x$。假设 $x \notin N$,则 $x \in L \setminus N \in ce(L)$,从而 $y \in \Downarrow x \subseteq L \setminus N$,与 $y \in N$ 矛盾,因此 $x \in N$,从而 $\Uparrow N \subseteq N$。反之,设 $\Uparrow N \subseteq N$,下面证明 $L \setminus N \in ce(L)$ 即可。假设 $\Downarrow(L \setminus N) \not\subseteq L \setminus N$,即存在 $s \in \Downarrow(L \setminus N)$,使得 $s \notin L \setminus N$。从而有 $t \in (L \setminus N)$,使得 $s \ll t$,即 $t \in \Uparrow N \subseteq N$,与 $t \in L \setminus N$ 矛盾,因此 $\Downarrow(L \setminus N) \subseteq L \setminus N$,则 N 是 ce-闭集。

(4) 由(3)和定理 1(5)可以证得。

例:对于自然数集 $\mathbf{N}$,其上的 ce-拓扑是 $\varnothing \cup \{\{0,1,2,\cdots,n\} \mid n \in \mathbf{N}\}$,即由 $\mathbf{N}$ 上的全体下集形成的拓扑。

定理 3　设 L, T 是相容定向完备偏序集, $f: L \to T$ 是单射且 f 保 $\ll$ 关系,则 $f: (L, ce(L)) \to (T, ce(T))$ 是连续的且 $\forall k \in K_c(L)$,有 $f(k) \in K_c(T)$。

证明　设 f 保关系 $\ll$,则 $\forall k \in K_c(L)$, $f(k) \in K_c(T)$ 成立。下面证明 f 是关于 ce-拓扑连续的。由定理 2 知,只需证明, $\forall x \in T$, $f^{-1}(\{x\} \cup \Downarrow x)$ 是 L 中的 ce-开集,即 $\Downarrow(f^{-1}(\{x\} \cup \Downarrow x)) \subseteq f^{-1}(\{x\} \cup \Downarrow x)$。$\forall y \in \Downarrow f^{-1}(\{x\} \cup \Downarrow x)$, $\exists z \in f^{-1}(\{x\} \cup \Downarrow x)$,使得 $y \ll z$,由于 f 保 $\ll$ 关系,则 $f(x) \ll f(z)$,从而 $f(y) \in \Downarrow f(z) \subseteq \{x\} \cup \Downarrow x$,故 $y \in f^{-1}(\{x\} \cup \Downarrow x)$。

定理 4　设 L 是相容定向完备偏序集,则 $\forall M \in 2^L$,有

(1) $cl_c(M) = M \cup \Uparrow M$, $\mathrm{int}_c(M) = M \setminus \Uparrow(L \setminus M)$,其中, $cl_c(M)$ 和 $\mathrm{int}_c(M)$ 分别表示 M 在 $ce(L)$ 拓扑中的闭包和内部;

(2) $\Uparrow cl_c(M) = cl_c(\Uparrow M)$;

(3) $\Uparrow M = \mathrm{der}_c(M) \cup (M \cap K_s(L))$,其中 $\mathrm{der}_c(M)$ 表示 M 在拓扑 $ce(L)$ 中的导集。

证明　(1) 下面证明 $cl_c(M) = M \cup \Uparrow M$。由定理 1(2) 知, $\Uparrow(M \cup \Uparrow M) = \Uparrow M \cup \Uparrow(\Uparrow M) \subseteq \Uparrow M \subseteq M \cup \Uparrow M$,故 $M \cup \Uparrow M$ 是 ce-闭集。又设 F 是任意闭集且 $M \subseteq F$,则 $\Uparrow M \subseteq \Uparrow F \subseteq F$,从而 $M \cup \Uparrow M \subseteq F$,所以 $cl_c(M) = M \cup \Uparrow M$ 成立。下面证明 $\mathrm{int}_c(M) = M \setminus \Uparrow(L \setminus M)$。由于 $cl_c(L \setminus M) = (L \setminus M) \cup \Uparrow(L \setminus M)$,因此

$\mathrm{int}_c(M)=L\backslash cl_c(L\backslash M)=L\backslash((L\backslash M)\cup\Uparrow(L\backslash M))=M\backslash\Uparrow(L\backslash M)$。

(2) 由 $M\subseteq cl_c(M)$ 和定理1(3)知，$\Uparrow M\subseteq\Uparrow cl_c(M)$，再由定理2(4)知 $cl_c(\Uparrow M)\subseteq\Uparrow cl_c(M)$，由(1)知，$\Uparrow cl_c(M)=\Uparrow M\cup\Uparrow(\Uparrow M)\subseteq\Uparrow M\subseteq cl_c(\Uparrow M)$，所以 $\Uparrow cl_c(M)=cl_c(\Uparrow M)$。

(3) 下面证明 $\Uparrow M\subseteq\mathrm{der}_c(M)\cup(M\cap K_s(L))$，首先证明 $\Uparrow M\backslash K_c(L)\subseteq\mathrm{der}_c(M)$。设 $x\in\Uparrow M\backslash K_c(L)$，由 $\Uparrow M\subseteq\Uparrow(M\cup\{x\})=\Uparrow x\cup\Uparrow(M\backslash\{x\})$ 且 $x\notin\Uparrow x$，再由(1)知，$x\in\Uparrow(M\backslash\{x\})\subseteq cl_c(M\backslash\{x\})$，因此 $x\in\mathrm{der}_c(M)$。从而 $\Uparrow M\subseteq\mathrm{der}_c(M)\cup(M\cap K_s(L))$。

反过来，设 $x\in\mathrm{der}_c(M)\cup(M\cap K_s(L))$，若 $x\in\Uparrow M\backslash K_c(L)$，当 $x\in\mathrm{der}_c(M)$ 时，则 $x\in cl_c(M\backslash\{x\})=(M\backslash\{x\})\cup\Uparrow(M\backslash\{x\})$，从而 $x\in\Uparrow(M\backslash\{x\})\subseteq\Uparrow M$；当 $x\in M\cap K_s(L)$ 时，则 $x\in\Uparrow x\subseteq\Uparrow M$。所以 $\mathrm{der}_c(M)\cup M\cap K_s(L)\subseteq\Uparrow M$。综上可知，$\Uparrow M=\mathrm{der}_c(M)\cup(M\cap K_s(L))$。

下面在相容连续偏序集上给出一系列的基本性质。

定理 5 设 L 是相容连续偏序集，L 上的 ce-拓扑是 T_1 的当且仅当 $\forall x, y\in L$, $x\ll y$ 能推出 $x=y$。

证明 *必要性*。设 L 上的 ce-拓扑是 T_1 的，则 $\forall x\in L$, $\{x\}$ 是 ce-闭集。由定理4(1)知，$\{x\}=cl_c\{x\}=\{x\}\cup\Uparrow x$，从而 $\forall x, y\in L$，由 $x\ll y$ 推出 $x=y$。

充分性。设 $\forall x, y\in L$，由 $x\ll y$ 推出 $x=y$，因此 $cl_c\{x\}=\{x\}\cup\Uparrow x=\{x\}$，则 L 上的 ce-拓扑是 T_1 的。

定理 6 设 L 是相容连续偏序集，则 $\forall M\in 2^L$, $\Downarrow(\Downarrow M)=\Downarrow M$, $\Uparrow(\Uparrow M)=\Uparrow M$。

证明 由命题2和定理1(5)可以证得。

定理 7 设 L 是相容连续偏序集，$B\subseteq L$，则以下条件等价，

(1) B 是 L 的基；

(2) $\forall a\in L$, $\Uparrow(\Uparrow a\cap B)=\Uparrow a$；

(3) $\forall M\subseteq L$, $\Uparrow(\Uparrow M\cap B)=\Uparrow M$；

(4) 对于任意 ce-闭集 N, $\Uparrow(N\cap B)=\Uparrow N$；

(5) $\forall M\subseteq L$, $cl_c(\Uparrow M\cap B)=\Uparrow M$；

(6) $\forall U\in\sigma(L)$, $\forall R\in ce(L)$，若 $U\cap R\neq\varnothing$，则 $U\cap R\cap B\neq\varnothing$。

证明 (1)⇒(2)。由定理1(3)和(5)知，$\forall a\in L$, $\Uparrow(\Uparrow a\cap B)\subseteq\Uparrow(\Uparrow a)\subseteq\Uparrow a$。$\forall x\in\Uparrow a$，由命题4知，$\exists b\in B$，使得 $a\ll b\ll x$，则 $x\in\Uparrow(\Uparrow a\cap B)$，从而 $\Uparrow a\subseteq\Uparrow(\Uparrow a\cap B)$，综上可知，$\Uparrow(\Uparrow a\cap B)=\Uparrow a$。

(2)⇒(3)。设 $M\subseteq L$，由(2)和定理1(2)可知，$\Uparrow(\Uparrow M\cap B)=\Uparrow((\bigcup_{a\in M}\Uparrow a)\cap B)=\Uparrow(\bigcup_{a\in M}(\Uparrow a\cap B))=\bigcup_{a\in M}\Uparrow(\Uparrow a\cap B)=\bigcup_{a\in M}\Uparrow a=\Uparrow M$。

(3)⇒(4)。由定理7(3)直接得到。

(4)⇒(5)。设 $M\subseteq L$，由定理4(1)、定理2(4)和定理6及(4)知，

$$cl_c(\Uparrow M\cap B)=(\Uparrow M\cap B)\cup\Uparrow(\Uparrow M\cap B)=(\Uparrow M\cap B)\cup\Uparrow(\Uparrow M)=(\Uparrow M\cap B)\cup\Uparrow M=\Uparrow M$$

(5)⇒(6)。$\forall U\in\sigma(L)$ 和 $\forall R\in ce(L)$，若 $U\cap R\neq\varnothing$，由命题5(2)知，$\Uparrow U=U$，则由(5)可得，$cl_c(U\cap B)=cl_c(\Uparrow U\cap B)=\Uparrow U=U$。若 $x\in U\cap R$，则 $x\in cl_c(U\cap B)$，从而 $U\cap R\cap B\neq\varnothing$。

(6)⇒(1)。$\forall x,y\in L$，且 $x\ll y$，由命题2知，存在 $s,t\in L$，使得 $x\ll s\ll t\ll y$，从而 $s\in\Uparrow x\cap(\{t\}\cup\Downarrow t)$。由命题5(1)知 $\Uparrow x\in\sigma(L)$，又由于 $\{t\}\cup\Downarrow t\in ce(L)$，根据(6)可得，$\Uparrow x\cap(\{t\}\cup\Downarrow t)\cap B\neq\varnothing$，则存在 $b\in B$，使得 $x\ll b\ll y$，由命题4知，B 是 L 的基。

3 $c\rho$-拓扑

定义 10 设 L 是相容定向完备偏序集，称 $c\rho(L)=\sigma(L)\vee ce(L)$ 是 L 上的 $c\rho$-拓扑。

根据上述定义，L 上的 $c\rho$-拓扑是以 ce 开集和 Scott 开集为子基生成的拓扑。

注 2 (1) 例如，$\mathbf{N}$ 是自然数集，$\mathbf{N}$ 上的 $c\rho$-拓扑是以集族 $\{(m,n)\mid m<n,\ m,n\in\mathbf{N}\}$ 作为拓扑基所生成。

(2) 相容定向完备偏序集上的 Scott 开集是 $c\rho$-拓扑中的既开又闭集。

由 $c\rho$-拓扑的定义以及 Scott 拓扑和 ce-拓扑基的等价刻画，下面给出 $c\rho$-拓扑的一个基。

定理 8　设 L 是相容连续偏序集，则 $\mathscr{B}=\{\Uparrow x\cap(\{y\}\cup\Downarrow y)\mid x,y\in L\}$ 是 L 上的 $c\rho$-拓扑的一个基。

证明　由命题 5 知，$\{\Uparrow x\mid x\in L\}$ 是 $\sigma(L)$ 拓扑基，由定理 2(2) 知，$\{\{y\}\cup\Downarrow y\mid y\in L\}$ 是 $ce(L)$ 的拓扑基，所以 $\{\Uparrow x\mid x\in L\}\cup\{\{y\}\cup\Downarrow y\mid y\in L\}$ 是 $c\rho(L)$ 的子基。显然有 $\mathscr{B}=\{\Uparrow x\cap(\{y\}\cup\Downarrow y)\mid x,y\in L\}\subseteq c\rho(L)$，则 $\forall x\in L$，$U\in c\rho(L)$ 且 $x\in U$，存在有限个 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $y_j(j=1,2,\cdots,m)$ 使得 $x\in(\bigcap_{i=1}^{n}\Uparrow x_i)\cap(\bigcap_{j=1}^{m}(\{y\}_j\cup\Downarrow y_j))\subseteq U$，所以 $x_i\ll x(i=1,2,\cdots,n)$。从而有 $z\in L$，使得 $x_i\ll z\ll x$，故 $x\in\Uparrow z\cap(\{x\}\cup\Downarrow x)\in\mathscr{B}$。易证 $\Uparrow z\cap(\{x\}\cup\Downarrow x)\subseteq U$，于是 $\mathscr{B}$ 是 $c\rho$-拓扑的一个基。

命题 6　设 L 是相容连续偏序集，则 $\forall U\in\sigma(L)$，$G\in ce(L)$，有 $\uparrow(U\cap G)\in\sigma(L)$。

证明　设 $U\in\sigma(L)$，$G\in ce(L)$，显然 $\uparrow(U\cap G)$ 是上集。设 $I\in I_c(L)$ 且 $\bigvee I\in\uparrow(U\cap G)$，则存在 $x\in U\cap G$ 使得 $x\leqslant\bigvee I$，由命题 5(2) 知，存在 $y\in U$ 且 $y\ll x$，则 $y\in I$ 且 $y\in\Downarrow x\subseteq\Downarrow G\subseteq G$，则 $y\in U\cap G$，于是 $y\in\uparrow(U\cap G)\cap I$，由命题 4(5) 知，$\uparrow(U\cap G)\in\sigma(L)$。

由定理 8 和命题 6 可以得到相容连续偏序集上 $c\rho$-拓扑的一些基本性质。

定理 9　设 L 是相容连续偏序集，则以下均成立，

(1) 若上集 $U\in c\rho(L)$，则 $U\in\sigma(L)$；

(2) 若 $V\in c\rho(L)$，则 $\uparrow V\in\sigma(L)$；

(3) $\forall x\in L$，若 $\{x\}\in c\rho(L)$，则 $x\in K_c(L)$；

(4) 若 F 是 $c\rho$-拓扑闭集，当 $I\in I_c(L)$ 且 $I\subseteq F$ 时，$\bigvee I\in F$。

证明　(1) 设上集 $U\in c\rho(L)$，由定理 8 知，$\forall s\in U$，$\exists x,y\in L$，使得 $s\in\uparrow(\Uparrow x\cap(\{y\}\cup\Downarrow y))\subseteq\uparrow U=U$，根据命题 6 知 $\uparrow(\Uparrow x\cap(\{y\}\cup\Downarrow y))\in\sigma(L)$，从而 $U\in\sigma(L)$。

(2) 设 $V\in c\rho(L)$，$\forall s\in\uparrow V$，存在 $x\in V$，使得 $x\leqslant s$。由定理 8 知，存在 $y,z\in L$，使得 $x\in\Uparrow y\cap(\{z\}\cup\Downarrow z)\subseteq V$，则 $s\in\uparrow x\subseteq\uparrow(\Uparrow y\cap(\{z\}\cup\Downarrow z))\subseteq\uparrow V$，从而 $\uparrow V\in\sigma(L)$。

(3) 设 $x\in L$ 且 $\{x\}\in c\rho(L)$，由定理 9(2) 知 $\uparrow x\in\sigma(L)$，根据 $\ll$ 关系和 Scott 开集的定义可以验证 $x\ll x$，即 $x\in K_c(L)$。

(4) 设 F 是 $c\rho$-拓扑闭集且 $I\in I_c(L)$，$I\subseteq F$。假设 $\bigvee I\in L\backslash F$，根据定理 8 知，存在 $x,y\in L$，使得 $\bigvee I\in\Uparrow x\cap(\{y\}\cup\Downarrow y)\subseteq L\backslash F$，由命题 2 知存在 $z\in L$，使得 $x\ll z\ll\bigvee I$，从而 $z\in I\cap L\backslash F$，这与 $I\subseteq F$ 矛盾，故 $\bigvee I\in F$。

定理 10　设 L 是相容连续偏序集，$B\subseteq L$，则 B 是 L 的基当且仅当 B 是 $c\rho(L)$ 的稠密集。

证明　*必要性*。由定理 7 和定理 8 知，当 B 是 L 的基时，B 与 $c\rho(L)$ 的任意非空基 $\Uparrow s\cap(\{t\}\cup\Downarrow t)$ 的交非空，从而 B 是 $c\rho(L)$ 的稠密集。

充分性。设 B 是 $c\rho(L)$ 的稠密集，$\forall x,y\in L$，$x\ll y$，则存在 $s,t\in L$，使得 $x\ll s\ll t\ll y$，从而 $\Uparrow s\cap(\{t\}\cup\Downarrow t)\neq\varnothing$，故存在 $b\in B$，使得 $b\in\Uparrow s\cap(\{t\}\cup\Downarrow t)\neq\varnothing$，则 $x\ll b\ll y$，所以 B 是 L 的基。

参考文献：

[1] SCOTT D. Continuous lattices in lecture notes in mathematics 274[M]. Berlin: Springer, 1972: 97-136.

[2] GIERZ G, HOFMANN K H, KEIMEL K, et al. Continuous lattices and domains[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[3] GIERZ G, LAWSON J D. Generalized continuous and hypercontinuous lattices[J]. Rocky Mountian Journal of Mathematics, 1981, 11: 271-296.

[4] BARANGA A. Z-continuous posets[J]. Discrete Mathematics, 1996, 152: 33-45.

[5] ZHAO Dongsheng. Semicontinuous lattices[J]. Algebra Universalis, 1997, 37: 458-476.

[6] ZHAO Bin, ZHOU Yihui. The category of supercontinuous posets[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 320: 632-641.

[7] YANG Jinbo, LUO Maokang. Quasicontinuous domains and generalized completely distributive lattices[J]. Advanced in Mathematics, 2007, 36(4):399-406.
[8] 郭智莲,赵彬. 相容Domain间Scott连续自映射的不动点[J]. 模糊系统与数学,2011,25(5):38-42.
GUO Zhilian, ZHAO Bin. The fixed-point sets of Scott continuous mapping on consistent Domain[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2011, 25(5):38-42.
[9] LU Jing, ZHAO Bin, WANG Kaiyun, et al. Quasicontinuous spaces[J]. Commentationes Mmthematicae Universitatis Carolinae, 2022, 63(4):513-526.
[10] 郭智莲,杨海龙. 相容拟半连续Domain和相容交半连续Domain[J]. 山东大学学报(理学版),2012,47(2):104-108.
GUO Zhilian, YANG Hailong. Consistently quasi-semicontinuous Domains and consistently meet-semicontinuous Domains [J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2012, 47(2):104-108.
[11] LIU Dongming, JIANG, Guanghao. Order-homomorphism and extension of consistently connected continuous domains[J]. International Journal of Applied Mathematics and Statistics, 2019, 58(1):1-11.
[12] LU Chongxia, LI Qingguo. Essential and density topologies on s_2-continuous posets[J]. Mathematical Structures in Computer Science, 2018, 28(10):1770-1785.
[13] 徐罗山. 相容连续偏序集及其定向完备化[J]. 扬州大学学报(自然科学版),2000,3(1):1-6.
XU Luoshan. Consistently continuous posets and their directed completions[J]. Journal of Yangzhou University(Natural Science Edition), 2000, 3(1):1-6.
[14] 汪鲲,卢涛. 相容连续偏序集的若干性质[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报,2019,35(3):13-15.
WANG Kun, LU Tao. Some properties of consistently continuous posets[J]. Natural Sciences Journal of Haerbin Normal University, 2019, 35(3):13-15.
[15] 汪鲲,卢涛. 相容定向完备偏序集与相容Scott拓扑[J]. 贵州师范学院学报,2019,35(3):1-3.
WANG Kun, LU Tao. Consistently directed complete set with consistently Scott topology[J]. Journal of Guizhou Education University, 2019, 35(3):1-3.
[16] 毛徐新,徐罗山. 半连续格上的半基,*se*-拓扑和*sp*-拓扑[J]. 高校应用数学学报A辑,2023,38(4):471-477.
MAO Xuxin, XU Luoshan. Semi-bases, *se*-topology, *sp*-topology of semicontinuous lattices[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities(Ser.A), 2023, 38(4):471-477.

(编辑:陈丽萍)

(上接第152页)

参考文献:

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable module theory[M]. Providence: Memoirs of the American Mathematical Society, 1969.
[2] ENOCHS E E, JENDA O M G, TORRECILLAS B. Gorenstein flat modules[J]. Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly, 1993, 10(1):1-9.
[3] YANG Gang, LIU Zhongkui, LIANG Li. Ding projective and Ding injective modules.[J]. Colloquium Algebra, 2013, 20(4):601-612.
[4] GILLESPIE J, IACOB A. Duality pairs, generalized Gorenstein modules and Ding injective envelopes[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2022, 360:381-398.
[5] GILLESPIE J. The flat model structure on Ch(R)[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2004, 356(8): 3369-3390.
[6] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189:167-193.
[7] YANG Xiaoyan, LIU Zhongkui. DG-projective, injective and flat complexes[J]. Colloquium Algebra, 2013, 20(1):155-162.
[8] ENOCHS E E, GARCÍA ROZAS J R. Gorenstein injective and projective complexes[J]. Communications Algebra, 1998, 26(5):1657-1674.

(编辑:陈丽萍)