文章编号:1671-9352(2025)11-0027-05 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.130

半群 $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$ 的秩

苟昌胜,阮礼敏,赵平*

(贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要:设 $\mathscr{P}_n$ 是 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的部分变换半群,对任意 $1\leqslant m\leqslant n$,令

$$\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=\{\alpha\in\mathscr{P}_n:X_m\subseteq\mathrm{dom}(\alpha),\ \alpha|_{X_m}\in\mathscr{O}_m\},$$

则 $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$ 是 $\mathscr{P}_n$ 的子半群。本文研究半群 $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$ 的秩,其中 $1\leqslant m\leqslant n-1$。对于 $n\geqslant 3$,证明

$$\mathrm{rank}\ \mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=\begin{cases}2+2m, & n-m=1,\\ 3+2m, & n-m=2,\\ 4+2m, & n-m\geqslant 3。\end{cases}$$

关键词:部分变换半群;保序全变换半群;秩;生成集

中图分类号:O152.7 **文献标志码**:A

引用格式:苟昌胜,阮礼敏,赵平.半群 $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$ 的秩[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):27-31.

On the rank of the semigroup $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$

GOU Changsheng, RUAN Limin, ZHAO Ping*

(School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, Guizhou, China)

Abstract: Let $\mathscr{P}_n$ be a partial transformation semigroup on the finite set $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$. Let $1\leqslant m\leqslant n$, a subsemigroup of $\mathscr{P}_n$ be defined by

$$\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=\{\alpha\in\mathscr{P}_n:X_m\subseteq\mathrm{dom}(\alpha),\ \alpha|_{X_m}\in\mathscr{O}_m\},$$

In the paper, the rank of the subsemigroup $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$ is studied, where $1\leqslant m\leqslant n-1$. For $n\geqslant 3$, it is proven that

$$\mathrm{rank}\ \mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=\begin{cases}2+2m, & n-m=1,\\ 3+2m, & n-m=2,\\ 4+2m, & n-m\geqslant 3.\end{cases}$$

Key words: partial transformation semigroup; order-preserving full transformation semigroup; rank; generating set

0 引言

设 $\mathscr{T}_n$ 和 $\mathscr{P}_n$ 分别是 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的全变换半群和部分变换半群,设 $\alpha\in\mathscr{P}_n$, $\mathrm{im}(\alpha)$ 和 $\mathrm{dom}(\alpha)$ 分别表示 α 的像和定义域。若对任意 $x,y\in\mathrm{dom}(\alpha)$,有 $x\leqslant y\Rightarrow x\alpha\leqslant y\alpha$,则称 α 是保序的。设 $\mathscr{O}_n$ 和 $\mathscr{PO}_n$ 分别为 X_n 上的所有保序全变换之集和所有保序部分变换之集,则 $\mathscr{O}_n$ 和 $\mathscr{PO}_n$ 都是 $\mathscr{P}_n$ 的子半群,称 $\mathscr{O}_n$ 和 $\mathscr{PO}_n$ 分别为 X_n 上的保序全变换半群和保序部分变换半群。

对 $1\leqslant m\leqslant n-1$,设 $\mathscr{O}_m$ 是 $X_m=\{1,2,\cdots,m\}$ 上的保序全变换半群,令

$$\mathscr{T}_{n,m}=\{\alpha\in\mathscr{T}_n:x\alpha=x,\ x\in X_m\},$$

收稿日期:2024-04-19; **网络出版时间**:2025-02-28 09:13:30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12261022)

第一作者:苟昌胜(2000—),男,硕士研究生,研究方向为半群理论. E-mail:13765914093@163.com

* **通信作者**:赵平(1973—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为半群理论. E-mail:pingzhao731108@163.com

则 $\mathscr{F}_{n,m}$是 $\mathscr{T}_n$ 的子半群。设 $\alpha\in\mathscr{P}_n$且 $X_m\subseteq\mathrm{dom}(\alpha)$, $\alpha|_{X_m}$表示 α 在集合 X_m 下的限制,即 $\mathrm{dom}(\alpha|_{X_m})=X_m$ 且 $x\alpha|_{X_m}=x\alpha$,令

$$\mathscr{O}_{n,m}=\{\alpha\in\mathscr{O}_n:\alpha|_{X_m}\in\mathscr{O}_m \text{且 } x\alpha=x,\ x\in X_n\backslash X_m\},$$

则 $\mathscr{O}_{n,m}$是 $\mathscr{O}_n$ 的子半群且 $\mathscr{O}_{n,m}\cong\mathscr{O}_m$。

有限半群 S 的秩定义为

$$\mathrm{rank}\ S=\min\{|A|:A\subseteq S,\ \langle A\rangle=S\}。$$

半群理论中,秩的相关研究一直是热点之一[1]。众所周知,当 $n\geqslant3$,全变换半群 $\mathscr{T}_n$ 的秩为 3,部分变换半群 $\mathscr{P}_n$ 的秩为 4。Howie[2]研究了有限全变换半群中的幂等元生成集,Gomes 等[3]研究半群 $\mathscr{O}_n$ 和$\mathscr{P}\mathscr{O}_n$ 的秩,Honyam 等[4]刻画半群 $\mathscr{F}_{n,m}$的格林关系和理想,给出它的生成集及秩,Garba[5]研究保序变换半群的某些理想的秩和幂等元秩,Zhao 等[6]研究各种变换幺半群的理想的秩,Korkmaz 等[7]研究保序且降序变换半群的幂零子半群的秩,Ayik 等[8]研究广义变换半群 $\mathscr{G}\mathscr{T}(X,Y)$的秩,张建国等[9]研究半群 D_kP_n 的秩和平方幂等元秩。本文考虑半群

$$\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}=\{\alpha\in\mathscr{P}_n:X_m\subseteq\mathrm{dom}(\alpha),\ x\alpha=x,\ x\in X_m\},\ \mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=\{\alpha\in\mathscr{P}_n:X_m\subseteq\mathrm{dom}(\alpha),\ \alpha|_{X_m}\in\mathscr{O}_m\},$$

对 $1\leqslant m\leqslant n-1$,得到$\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}$和 $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$的秩。

1 主要结论及证明

记 δ_j 为 $X_n\backslash\{j\}$ 上的恒等变换,其中 $1\leqslant j\leqslant n$。设 $i,\ j\in X_n\backslash X_m$,$(i\quad j)$是 X_n 上的对换,即

$$x(i\quad j)=\begin{cases}j, & x=i,\\ i, & x=j,\\ x, & x\in X_n\backslash\{i,j\}。\end{cases}$$

显然$(i\quad j)\in\mathscr{F}_{n,m}$。

引理 1 设 $1\leqslant m\leqslant n-1$,则$\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}=\langle\delta_{m+1}\cup\mathscr{F}_{n,m}\rangle$。

证明 任意取 $\alpha\in\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}$,若 $\mathrm{dom}(\alpha)=X_n$,则 $\alpha\in\mathscr{F}_{n,m}$。若 $\mathrm{dom}(\alpha)\neq X_n$,不妨设 $X_n\backslash\mathrm{dom}(\alpha)=\{s_1,s_2,\cdots,s_t\}$,令

$$i\beta=\begin{cases}i\alpha, & i\in\mathrm{dom}(\alpha),\\ m+1, & i\in X_n\backslash\mathrm{dom}(\alpha),\end{cases}$$

则 $\beta\in\mathscr{F}_{n,m}$且 $\alpha=\delta_{s_1}\delta_{s_2}\cdots\delta_{s_t}\beta$。若 $s_i\neq m+1$,则易验证

$$\delta_{s_i}=(m+1\quad s_i)\delta_{m+1}(m+1\quad s_i)\in\mathscr{F}_{n,m}\delta_{m+1}\mathscr{F}_{n,m}\subseteq\langle\delta_{m+1}\cup\mathscr{F}_{n,m}\rangle,$$

从而 $\alpha=\delta_{s_1}\delta_{s_2}\cdots\delta_{s_t}\beta\in\langle\delta_{m+1}\cup\mathscr{F}_{n,m}\rangle$。再由 α 的任意性可知,$\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}\subseteq\langle\delta_{m+1}\cup\mathscr{F}_{n,m}\rangle$。注意到 $\delta_{m+1},\mathscr{F}_{n,m}\subseteq\mathscr{P}\mathscr{F}_{n,m}$,则$\langle\delta_{m+1}\cup\mathscr{F}_{n,m}\rangle\subseteq\mathscr{P}\mathscr{F}_{n,m}$,因此,$\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}=\langle\delta_{m+1}\cup\mathscr{F}_{n,m}\rangle$。

引理 2 设 $1\leqslant m\leqslant n-1$, G 是$\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}$的生成集,则 $G\cap(\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}\backslash\mathscr{F}_{n,m})\neq\varnothing$。

证明 假设 $G\cap(\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}\backslash\mathscr{F}_{n,m})=\varnothing$,则 $G\subseteq\mathscr{F}_{n,m}$,从而$\langle G\rangle\subseteq\mathscr{F}_{n,m}\subset\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}$,矛盾。

设 $1\leqslant m\leqslant n-1$,对 $m\leqslant s\leqslant n$,令

$$J_s=\{\alpha\in\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}:|\mathrm{im}(\alpha)|=s\},\ J_s^T=\{\alpha\in\mathscr{F}_{n,m}:|\mathrm{im}(\alpha)|=s\},$$

则 $J_s^T\subseteq J_s$。对任意 $\alpha\in\mathscr{P}_n$, $i\alpha^{-1}$表示 α 的原像集$\{x\in\mathrm{dom}(\alpha):x\alpha=i\}$,其中 $i\in\mathrm{im}(\alpha)$。对 $1\leqslant i\leqslant m$,定义

$$D_i=\{\alpha\in J_{n-1}^T:|i\alpha^{-1}|=2\}$$

且

$$D=\{\alpha\in J_{n-1}^T:|i\alpha^{-1}|=1,\ 1\leqslant i\leqslant m\}。$$

显然 $J_{n-1}^T=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_m\cup D$。

引理 3 设 $1\leqslant m\leqslant n-1$,若 G 是$\overline{\mathscr{P}\mathscr{F}}_{n,m}$的生成集,则 $G\cap D_i\neq\varnothing$,其中 $1\leqslant i\leqslant m$。

证明　假设存在 $1\leqslant i\leqslant m$,使得 $G\cap D_i=\varnothing$。取定 $\alpha\in D_i$,则由 G 是$\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}$的生成集可知,存在 $g_1,g_2,\cdots,g_t\in G\backslash D_i$,使得 $\alpha=g_1g_2\cdots g_t$。由 $\alpha\in J_{n-1}$易知,$g_1,g_2,\cdots,g_t\in J_{n-1}\cup J_n$(否则,$|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(g_1g_2\cdots g_t)|\leqslant n-2$,矛盾),于是 $g_1,g_2,\cdots,g_t\in[G\cap(J_{n-1}\cup J_n)]\backslash D_i$,从而 $ig_k^{-1}=\{i\}$,其中 $1\leqslant k\leqslant t$。进而,$ig_t^{-1}g_{t-1}^{-1}\cdots g_1^{-1}=ig_1^{-1}=\{i\}$。再由 $\alpha\in D_i$可知,$|i\alpha^{-1}|=2$,从而 $2=|i\alpha^{-1}|=|i(g_1g_2\cdots g_t)^{-1}|=|ig_t^{-1}g_{t-1}^{-1}\cdots g_1^{-1}|=|\{i\}|=1$,矛盾。

令 $J_{n-1}^*=\{\alpha\in J_{n-1}:|\mathrm{dom}(\alpha)|=n-1\}$,则 $J_{n-1}=J_{n-1}^T\cup J_{n-1}^*$。

引理 4　设 $1\leqslant m\leqslant n-2$,若 G 是$\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}$的生成集,则 $G\cap D\neq\varnothing$。

证明　假设 $G\cap D=\varnothing$。取定 $\alpha\in D$,则由 G 是$\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}$的生成集可知,存在 $g_1,g_2,\cdots,g_t\in G\backslash D$,使得 $\alpha=g_1g_2\cdots g_t$。由 $\alpha\in J_{n-1}$易知,$g_1,g_2,\cdots,g_t\in J_{n-1}\cup J_n$(否则,$|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(g_1g_2\cdots g_m)|\leqslant n-2$,矛盾),从而 $g_1,g_2,\cdots,g_t\in[G\cap(J_{n-1}\cup J_n)]\backslash D$。再由 $\alpha\notin J_n$可知,存在 $r\in\{1,2,\cdots,t\}$,使得 $g_r\notin J_n$。令 $s=\min\{k:g_k\notin J_n\}$,则 $g_s\in(G\cap J_{n-1})\backslash D$。注意到

$$J_{n-1}\backslash D=(J_{n-1}^T\backslash D)\cup J_{n-1}^*=D_1\cup D_2\cdots\cup D_m\cup J_{n-1}^*,$$

以下分 2 种情形讨论:

情形 1　$g_s\in G\cap(D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_m)$,显然存在 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$,使得 $g_s\in D_i$,则 $|ig_s^{-1}|=2$。

情形 1.1　$s=1$。由 $\alpha\in D$ 及 $ig_2g_3\cdots g_t=i$,可得

$$1=|i\alpha^{-1}|=|i(g_t^{-1}g_{t-1}^{-1}\cdots g_2^{-1}g_1^{-1})|=|(ig_t^{-1}g_{t-1}^{-1}\cdots g_2^{-1})g_1^{-1})|\geqslant|ig_1^{-1}|=|ig_s^{-1}|=2,$$

矛盾。

情形 1.2　$2\leqslant s<t$。由 s 定义可知,$g_1,g_2,\cdots,g_{s-1}\in J_n$,则 $|ig_s^{-1}g_{s-1}^{-1}\cdots g_1^{-1}|=|ig_s^{-1}|=2$。再由 $\alpha\in D$ 及 $ig_{s+1}g_{s+2}\cdots g_t=i$,可得

$$1=|i\alpha^{-1}|=|ig_t^{-1}g_{t-1}^{-1}\cdots g_{s+1}^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}|\geqslant|ig_s^{-1}g_{s-1}^{-1}\cdots g_1^{-1}|=|ig_s^{-1}|=2,$$

矛盾。

情形 1.3　$s=t$。由 s 定义可知,$g_1,g_2,\cdots,g_{t-1}\in J_n$,则 $|ig_t^{-1}g_{t-1}^{-1}\cdots g_1^{-1}|=|ig_s^{-1}|=2$。再由 $\alpha\in D$ 可得,$1=|i\alpha^{-1}|=|i(g_1g_2\cdots g_t)^{-1}|=|ig_s^{-1}|=2$,矛盾。

情形 2　$g_s\in G\cap J_{n-1}^*$。显然存在 $i\in\{m+1,m+2,\cdots,n\}$,使得 $i\notin\mathrm{dom}(g_s)$。由 $\alpha\in D$ 可知,$\mathrm{dom}(\alpha)=X_n$,从而由 $\alpha=g_1g_2\cdots g_t$ 可知,$2\leqslant s\leqslant t$。再由 $g_1,g_2,\cdots,g_{s-1}\in J_n$可知,存在 $j\in\{m+1,m+2,\cdots,n\}$,使得 $jg_1g_2\cdots g_{s-1}=i$,于是 $j\alpha=jg_1g_2\cdots g_{s-1}g_s\cdots g_t=ig_sg_{s+1}\cdots g_t$,矛盾。

记 $X_{n-m}=X_n\backslash X_m$,设 $\mathscr{T}_{n-m}$和 S_{n-m}分别是 X_{n-m}上的全变换半群和置换群,则 $J_n\cong S_{n-m}$。

引理 5[4]　设 $n\geqslant3$ 且 $1\leqslant m\leqslant n-1$,则

$$\mathrm{rank}\ \mathscr{F}_{n,m}=\mathrm{rank}\ \mathscr{T}_{n-m}+m=\begin{cases}1+m, & n-m=1,\\ 2+m, & n-m=2,\\ 3+m, & n-m\geqslant3。\end{cases}$$

定理 1　设 $n\geqslant3$ 且 $1\leqslant m\leqslant n-1$,则

$$\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}=\begin{cases}2+m, & n-m=1,\\ 3+m, & n-m=2,\\ 4+m, & n-m\geqslant3。\end{cases}$$

证明　注意到 $J_n\cong S_{n-m}$。令 G 是$\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}$的任意生成集,易得$\langle G\cap J_n\rangle=J_n$,于是$|G|\geqslant\mathrm{rank}\ J_n$,从而由 G 的任意性可得

$$\mathrm{rank}\ \overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\geqslant\mathrm{rank}\ J_n=\mathrm{rank}\ S_{n-m}。$$

由引理 2、3 可知,G 至少包含$(\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\backslash\mathscr{F}_{n,m})$, $D_1,D_2,\cdots,D_m$ 中的一个元,从而

$$\mathrm{rank}\ \overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\geqslant\mathrm{rank}\ S_{n-m}+m+1。$$

以下分 2 种情形讨论:

情形 1　$n-m=1$。显然 $\mathrm{rank}\ S_{n-m}=\mathrm{rank}\ S_1=\mathrm{rank}\ \mathscr{T}_1=\mathrm{rank}\ \mathscr{T}_{n-m}$,从而

$$\mathrm{rank}\ \overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\geqslant\mathrm{rank}\ S_{n-m}+m+1=\mathrm{rank}\ \mathscr{T}_{n-m}+m+1。$$

情形 2 $1\leqslant m\leqslant n-2$。注意到 $\operatorname{rank}\mathscr{T}_{n-m}=\operatorname{rank}S_{n-m}+1$(见文献[6])。由引理 4 可知,$G\cap D\neq\varnothing$,从而

$$\operatorname{rank}\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\geqslant\operatorname{rank}S_{n-m}+m+2=\operatorname{rank}\mathscr{T}_{n-m}+m+1。$$

综上所述,$\operatorname{rank}\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\geqslant\operatorname{rank}\mathscr{T}_{n-m}+m+1$。

由引理 1 可知,$\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}=\langle\delta_{m+1}\cup\mathscr{F}_{n,m}\rangle$,从而由引理 5 可得

$$\operatorname{rank}\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\leqslant\operatorname{rank}\mathscr{F}_{n,m}+1=\operatorname{rank}\mathscr{T}_{n-m}+m+1。$$

因此

$$\operatorname{rank}\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}=\operatorname{rank}\mathscr{T}_{n-m}+m+1=\begin{cases}2+m, & n-m=1,\\3+m, & n-m=2,\\4+m, & n-m\geqslant 3。\end{cases}$$

设 $1\leqslant m\leqslant n-1$ 且 $\alpha\in\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$,令

$$i\beta_\alpha=\begin{cases}i\alpha, & i\alpha\in X_m,\\ i, & i\in X_{n-m},\end{cases}$$

$$i\lambda_\alpha=\begin{cases}i\alpha, & i\in X_{n-m}\text{且 }i\alpha\in X_m,\\ i, & \text{其他},\end{cases}$$

$$i\gamma_\alpha=\begin{cases}i\alpha, & i\alpha\in X_{n-m},\\ i, & i\alpha\in X_m\text{或 }i\notin\operatorname{dom}(\alpha),\end{cases}$$

显然$\beta_\alpha\in\mathscr{O}_{n,m}$且 $\lambda_\alpha,\gamma_\alpha\in\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}$。设 A 是 X_n 的非空子集,1_A 表示 A 上的恒等变换,注意到

$$\beta_\alpha|_{X_m}=\alpha|_{X_m},\quad \beta_\alpha|_{X_{n-m}}=1_{X_{n-m}}\text{且 }\lambda_\alpha|_{X_m}=\gamma_\alpha|_{X_m}=1_{X_m}。$$

引理 6 设 $1\leqslant m\leqslant n-1$ 且 $\alpha\in\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$,则 $\alpha=1_{\operatorname{dom}(\alpha)}\beta_\alpha\lambda_\alpha\gamma_\alpha$。

证明 任意取 $i\in\operatorname{dom}(\alpha)$,若 $i\in X_m$,则 $i\alpha\in X_m$,于是$(i\alpha)\alpha\in X_m$,从而由 $\beta_\alpha,\lambda_\alpha$ 及 γ_α 的定义可得

$$i1_{\operatorname{dom}(\alpha)}\beta_\alpha\lambda_\alpha\gamma_\alpha=i\beta_\alpha\lambda_\alpha\gamma_\alpha=(i\alpha)\lambda_\alpha\gamma_\alpha=(i\alpha)\gamma_\alpha=i\alpha。$$

若 $i\in X_{n-m}$,则由 β_α 的定义可得,$i\beta_\alpha=i$。(Ⅰ)若 $i\alpha\in X_m$,则$(i\alpha)\alpha\in X_m$,从而由β_α, λ_α 及 γ_α 的定义可得

$$i1_{\operatorname{dom}(\alpha)}\beta_\alpha\lambda_\alpha\gamma_\alpha=i\beta_\alpha\lambda_\alpha\gamma_\alpha=(i\lambda_\alpha)\gamma_\alpha=(i\alpha)\gamma_\alpha=i\alpha。$$

(Ⅱ)若 $i\alpha\notin X_m$,则由 $\beta_\alpha,\lambda_\alpha$ 及 γ_α 的定义可得

$$i1_{\operatorname{dom}(\alpha)}\beta_\alpha\lambda_\alpha\gamma_\alpha=i\beta_\alpha\lambda_\alpha\gamma_\alpha=(i\lambda_\alpha)\gamma_\alpha=i\gamma_\alpha=i\alpha。$$

综上所述,$\alpha=1_{\operatorname{dom}(\alpha)}\beta_\alpha\gamma_\alpha\lambda_\alpha$。

引理 7 设 $1\leqslant m\leqslant n-1$,则 $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=\langle\mathscr{O}_{n,m}\cup\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\rangle$。

证明 任意取 $\alpha\in\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$,则由引理 6,可得

$$\alpha=1_{\operatorname{dom}(\alpha)}\beta_\alpha\gamma_\alpha\lambda_\alpha\in\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\cdot\mathscr{O}_{n,m}\cdot\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\cdot\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\subseteq\langle\mathscr{O}_{n,m}\cup\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\rangle。$$

再由 α 的任意性,可知 $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)\subseteq\langle\mathscr{O}_{n,m}\cup\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\rangle$。显然$\langle\mathscr{O}_{n,m}\cup\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\rangle\subseteq\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$。因此,$\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=\langle\mathscr{O}_{n,m}\cup\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\rangle$。

引理 8[3] 设 $n\geqslant 2$,则 $\operatorname{rank}\mathscr{O}_n=n+1$。

由 $\mathscr{O}_{n,m},\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}$定义可知,$\mathscr{O}_{n,m}\setminus\{1_{X_n}\}\cap\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}\setminus\{1_{X_n}\}=\varnothing$。

引理 9 设 $1\leqslant m\leqslant n-1$, M,N 分别为 $\mathscr{O}_{n,m}$, $\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}$的最小生成集且 $H=(M\cup N)\setminus\{1_{X_n}\}$,则 H 是$\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$的最小生成集。

证明 注意到$1_{X_n}\in\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}=\langle N\rangle$,则由引理 7,可得 $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=\langle M\cup N\rangle=\langle(M\cup N)\setminus\{1_{X_n}\}\rangle=\langle H\rangle$。下证 H 是最小生成集。假设存在 $s\in H$,使得 $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=\langle H\setminus\{s\}\rangle$,于是存在 $s_1,s_2,\cdots,s_t\in H\setminus\{s\}$ 且 $s=s_1s_2\cdots s_t$,从而 $s|_{X_m}=(s_1s_2\cdots s_t)|_{X_m}=s_1|_{X_m}s_2|_{X_m}\cdots s_t|_{X_m}$。以下分 2 种情形讨论:

情形 1 $s\in(M\setminus\{1_{X_n}\})$。若 $s_1,s_2,\cdots,s_t\in M\setminus\{1_{X_n}\}$,则$\langle M\setminus\langle 1_{X_n}\rangle\rangle=\langle M\setminus\langle 1_{X_n}\cup s\rangle\rangle$,矛盾。若存在 $j\in\{1,2,\cdots,t\}$,使得$s_j\in N$ 且 $s_j|_{X_m}=1|_{X_m}$,则

$$s|_{X_m}=s_1|_{X_m}s_2|_{X_m}\cdots s_t|_{X_m}=s_1|_{X_m}s_2|_{X_m}\cdots s_{j-1}|_{X_m}s_{j+1}|_{X_m}\cdots s_t|_{X_m}。$$

从而存在 $G=\{g_i:s_{g_i}\in\{s_1,s_2,\cdots,s_t\}\backslash N\subseteq M\backslash\{1_{X_n}\}\}$,使得 $s|_{X_m}=s_{g_1}|_{X_m}s_{g_2}|_{X_m}\cdots s_{g_r}|_{X_m}$,其中 $r=|G|$。再由 $s|_{X_{n-m}}=s_{g_1}|_{X_{n-m}}=s_{g_2}|_{X_{n-m}}=\cdots=s_{g_r}|_{X_{n-m}}=1|_{X_{n-m}}$,则 $s=s_{g_1}s_{g_2}\cdots s_{g_r}$。因此,$\langle M\backslash\langle 1_{X_n}\rangle\rangle=\langle M\backslash\langle 1_{X_n}\cup s\rangle\rangle$,矛盾。

情形 2　$s\in(N\backslash\{1_{X_n}\})$。若 $s_1,s_2,\cdots,s_t\in N\backslash\{1_{X_n}\}$,则 $\langle N\backslash\langle 1_{X_n}\rangle\rangle=\langle N\backslash\langle 1_{X_n}\cup s\rangle\rangle$,矛盾。若存在 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$,使得 $s_i\in(M\backslash\{1_{X_n}\})$,则 $|\mathrm{im}(s_i|_{X_m})|<m$。再由 $s\in(N\backslash\{1_{X_n}\})$ 可得, $m=|\mathrm{im}(s|_{X_m})|=|\mathrm{im}(s_1|_{X_m}s_2|_{X_m}\cdots s_i|_{X_m}\cdots s_t|_{X_m})|\leqslant|\mathrm{im}(s_i|_{X_m})|<m$,矛盾。

因此,$H=(M\cup N)\backslash\{1_{X_n}\}$ 是 $\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)$ 的最小生成集。

定理 2　设 $n\geqslant 3$ 且 $1\leqslant m\leqslant n-1$,则

$$\operatorname{rank}\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=\begin{cases}2+2m, & n-m=1,\\ 3+2m, & n-m=2,\\ 4+2m, & n-m\geqslant 3。\end{cases}$$

证明　注意 $\mathscr{O}_{n,m}\cong\mathscr{O}_m$ 及引理 8 可得,$\operatorname{rank}\mathscr{O}_{n,m}=\operatorname{rank}\mathscr{O}_m=m+1$, 于是由引理 9 可知,

$$\operatorname{rank}\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=\operatorname{rank}\mathscr{O}_{n,m}+\operatorname{rank}\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}-1=m+\operatorname{rank}\overline{\mathscr{PF}}_{n,m},$$

从而由定理 1 可得

$$\operatorname{rank}\mathscr{P}_{\mathscr{O}_m}(n)=m+\operatorname{rank}\overline{\mathscr{PF}}_{n,m}=\begin{cases}2+2m, & n-m=1,\\ 3+2m, & n-m=2,\\ 4+2m, & n-m\geqslant 3。\end{cases}$$

参考文献:

[1] HOWIE J M. Fundamentals of semigroup theory[M]. London: Oxford University Press, 2003.

[2] HOWIE J M. Idempotent generators in finite full transformation semigroups[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1978, 81(3/4):317-323.

[3] GOMES G M S, HOWIE J M. On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations[J]. Semigroup Forum 1992, 45(3):272-282.

[4] HONYAM P, SANWONG J. Semigroups of transformations with fixed sets [J]. Quaestiones Mathematicae, 2013, 36(1):79-92.

[5] GARBA G U. On the idempotent ranks of certain semigroups of order-preserving transformations[J]. Portugaliae Mathematica, 1994, 51(2):185-204.

[6] ZHAO P, FERNANDES V H. The ranks of ideals in various transformation monoids[J]. Communications in Algebra, 2015, 43(2):674-692.

[7] KORKMAZ E, AYIK H. Ranks of nilpotent subsemigroups of order-preserving and decreasing transformation semigroups[J]. Turkish Journal of Mathematics, 2021, 45(4):1626-1634.

[8] AYIK G, ABUSARRIS H D M. On the rank of generalized transformation semigroups[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2022, 45(4):1777-1787.

[9] 张建国,余江慧,罗永贵. 半群 D_kP_n 的秩和平方幂等元秩[J]. 山东理工大学学报(自然科学版),2023,37(6):11-15.

(编辑:陈丽萍)